UNIDAD 9 Más transformaciones: homotecia y semejanza

En unidades anteriores estudiaste transformaciones geométricas en las que permanecen invariantes la forma y las dimensiones de las figuras. Recordarás que las traslaciones y las rotaciones son ejemplos de transformaciones que, además de dejar invariante la forma, conservan la orientación de las figuras, por eso se dice que son movimientos que no salen del plano. En cambio, la simetría es una transformación en la que las figuras se "dan vuelta" y cambian su orientación: lo que en el original está a la izquierda, en la imagen queda a la derecha. La naturaleza nos permite observar elementos simétricos, por ejemplo, las alas de una mariposa; cuando están cerradas se superponen exactamente y cuando están abiertas pertenecen a un mismo plano.

A partir de esta unidad y en las siguientes vas a profundizar en la proporcionalidad entre segmentos a través del estudio de otras transformaciones. Ahora se tratará de casos en los que se conserva la forma, pero puede variar el tamaño de las figuras. Estudiarás la homotecia y la semejanza.

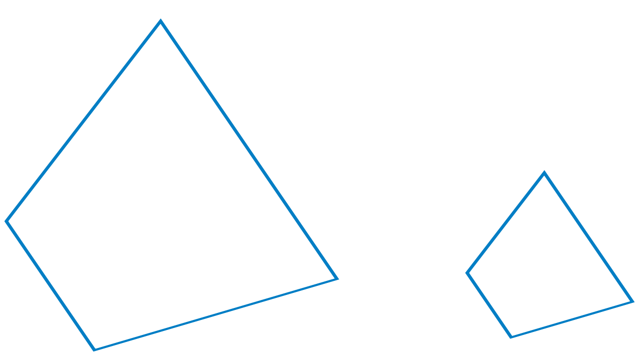
Estos conceptos son de fundamental importancia porque, gracias a ellos, los antiguos griegos pudieron estimar las dimensiones de la Tierra, el Sol y la Luna y las distancias entre ellos, con la simple ayuda de un aparato para medir ángulos.

TEMA 1: ¿QUÉ ES LA HOMOTECIA?

A 1. Puntos correspondientes

a) Dibujá en tu carpeta dos figuras como las que se muestran. Si te parece necesario, calcalas.

1. Ponele letras a los vértices. Si observás con atención, verás que al poner letras a los vértices, podrás considerar que a cada vértice de la primera figura corresponde uno de la segunda. Por lo tanto, al poner las letras podés representar esa correspondencia usando la forma que ya consideraste en otras transformaciones: A y A´.



2. Si es posible, trazá con color líneas rectas uniendo vértices que se correspondan entre sí, es decir, las rectas que pasan por *A* y *A'*, *B* y *B'*, *C* y *C'*, *D* y *D'*. Estas rectas se cortan en algún punto; buscalo, marcalo y llamalo *O*. Compará tu trabajo con el de tus compañeros y controlá con tu docente antes de continuar.

3. Respondé: ¿dónde está ubicado el punto *O*?

b) Dibujá y recortá tres triángulos equiláteros distintos entre sí, por ejemplo, con lados de 2 cm, 4 cm y 6 cm, respectivamente. Nombralos *ABC*, *A'B'C'* y *A"B"C"*.

1. Intentá ubicarlos en una hoja de carpeta de modo que los vértices correspondientes se puedan unir entre sí con líneas rectas, y de manera que esas rectas se corten en un punto. Cuando lo logres, pegalos en la carpeta en esa posición y trazá con color esas rectas.

2. Nombrá *P* el punto donde se cortan. Observá dónde está ubicado.

c) Reiterá lo que hiciste en la consigna **b**, con las siguientes figuras:

1. dos rectángulos, uno de 2 cm x 4 cm, y otro de 3 cm x 6 cm;

2. dos rombos, uno con diagonal mayor de 8 cm y diagonal menor de 6 cm, y otro con diagonal mayor de 16 cm y diagonal menor de 12 cm.

d) Leé el recuadro siguiente y confirmá si observaste lo que allí se expresa.

Hay pares de figuras, o a veces más de dos, que tienen:
- igual forma,
- distinto tamaño,
- vértices correspondientes alineados según rectas que se cortan en un único punto o centro,
- ángulos correspondientes iguales y
- lados correspondientes paralelos.

e) Volvé a la consigna **b**: el centro de esa transformación es el punto *P* y, para caracterizarla, tendrás que hacer mediciones y algunos cálculos. Copiá esta lista de segmentos en la hoja donde pegaste los triángulos *ABC*, *A'B'C'* y *A"B"C"*. Medí cada segmento y completá la lista con las medidas correspondientes:

PA = ………	*PA'* = ………	*PA"* = ………
PB = ………	*PB'* = ………	*PB"* = ………
PC = ………	*PC'* = ………	*PC"* = ………
AB = ………	*A'B'* = ………	
BC = ………	*B'C'* = ………	
CA = ………	*C'A'* = ………	

1. Realizá los cocientes entre las medidas de los siguientes pares:

PA’ y *PA*; *PB’* y *PB*; *PC’* y *PC*; *A’B’* y *AB*; *B’C’* y *BC*; *C’A’* y *CA*.

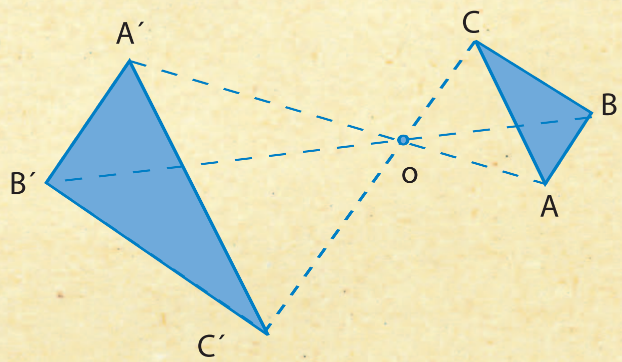
2. Compará tu trabajo con el de tus compañeros, controlá las respuestas con tu docente y escribí todas tus observaciones.

En estos casos se dice que una de las figuras es la imagen de la otra por una transformación llamada **homotecia** (del griego *homós*, semejante), en la que puede variar el tamaño de la figura. La homotecia queda caracterizada por un **centro** y un número. Ese número es la **razón** que vincula la longitud de los segmentos correspondientes en esa transformación.

Por ejemplo, la homotecia que transforma el triángulo *ABC* en el triángulo *A’B’C’* es la homotecia de centro *P* y razón 2.

f) Observá los triángulos que dibujaste en **b**. Respondé estas preguntas relativas a cada par de figuras correspondientes. ¿Cuál es el centro y la razón de la homotecia que transforma el triángulo *ABC* en el triángulo *A”B”C”*? ¿Y el *A’B’C’* en el *A”B”C”*?

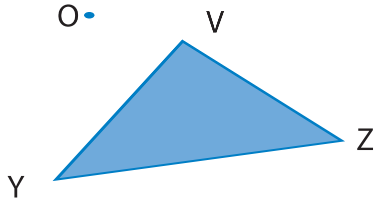
El punto en el que concurren las rectas que determinan los puntos de una figura y sus correspondientes es el centro de homotecia. La razón de homotecia, que se llama ***k***, se calcula hallando el cociente entre *OA* y *OA’*. *O* es el centro; *A* un punto cualquiera y *A’* su correspondiente imagen. El signo de la razón depende de la posición de *O* respecto de *A* y *A’*. Si la razón es positiva, *A* y su imagen *A’* se encuentran sobre una misma semirrecta de origen *O*. En cambio, si *A* y *A’* pertenecen a semirrectas opuestas de origen *O*, la razón es negativa y el centro se encuentra entre *A* y *A’*, como en la figura en la que al triángulo *ABC* se ha aplicado una homotecia de centro *O* y razón –2.



2. Imágenes homotéticas

a) Para hallar la imagen del triángulo *VYZ* según una homotecia de centro *O* y razón 3, seguí las siguientes instrucciones.

1. Dibujá un triángulo *VYZ* y un punto exterior *O*, como se muestra en la figura.



2. Trazá desde el punto *O*, con línea punteada, tres semirrectas que pasen por *V*, *Y* y *Z*, respectivamente.

3. Tomá la medida de *OV* y marcá *V'* sobre la semirrecta de manera que el segmento *OV'* sea el triple de *OV*.

4. Hacé lo mismo para encontrar *Y'* y *Z'*. Para lograr más precisión en las medidas podés usar el compás.

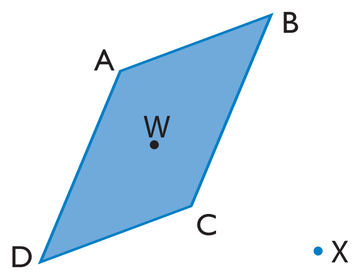
5. Uní *V'* con *Y'* y con *Z'*. Ha quedado así dibujada la imagen de *VYZ*, según la homotecia de centro *O* y razón 3. Resaltá con colores el triángulo *VYZ* y su imagen *V'Y'Z'*.

b) En una hoja en blanco, dibujá un cuadrado *ABCD* de 4 cm de lado y escribí las instrucciones necesarias para hallar la imagen del cuadrado según una homotecia, de modo que uno de tus compañeros o tu docente puedan hacerlo. No olvides tener en cuenta que deben cumplirse las relaciones que observaste en la actividad 1, consigna **d**.

c) Intercambiá la hoja con la de algún compañero. Cada uno dibujará la imagen siguiendo las instrucciones. Controlen si los dibujos son correctos. Ante cualquier duda consulten con el docente.

A 3. El centro y la razón de homotecia

a) Dibujá con color en tu carpeta un cuadrilátero *ABCD*, un punto exterior *X* y un punto interior *W*. Dibujá *A'B'C'D'*, imagen de *ABCD*, por la homotecia de centro *X* y razón 2.



b) Dibujá con otro color *A"B"C"D"*, imagen del cuadrilátero *ABCD* por la homotecia de centro *W* y razón 2.

c) Respondé en tu carpeta.

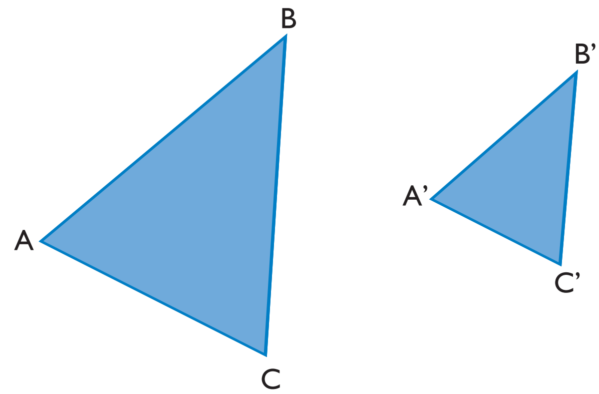
1. ¿Cómo es el tamaño de cada una de las imágenes obtenidas respecto del tamaño de la figura original?

2. ¿Cómo es la forma de las dos imágenes obtenidas respecto de la forma de la figura original?

3. ¿Qué relación hay entre los lados de la figura original y sus correspondientes en las respectivas imágenes?, ¿y acerca de los ángulos en la figura original y sus correspondientes en las respectivas imágenes?

4. Compará tus respuestas con la de tus compañeros y consúltenlas con su docente.

d) ¿Cuál es el centro de la homotecia que transforma *ABC* en *A'B'C'*? Explicá en tu carpeta cómo procediste para responder.



Como habrás podido observar a través de estas actividades, al aplicar este tipo de transformaciones se obtienen figuras de la misma forma que la original, pero que pueden no tener el mismo tamaño.

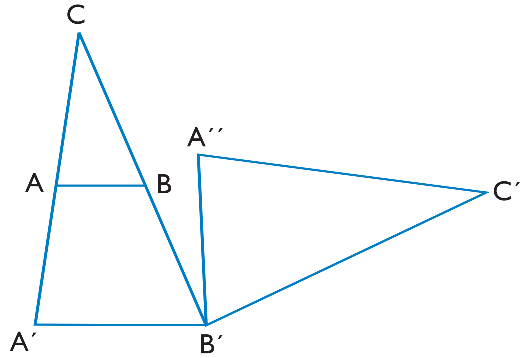
Las homotecias son transformaciones conformes porque conservan la forma de las figuras, pero no necesariamente su tamaño. En cambio, las rotaciones, las simetrías y las traslaciones, que ya estudiaste en la unidad 6 del *Cuaderno de estudio 2*, además de conformes son transformaciones **isométricas** (del griego *isos*, igual) del plano porque conservan las medidas de las figuras.

A continuación avanzarás en el estudio de las transformaciones. En el tema siguiente explorarás la semejanza y verás de qué manera está relacionada con la homotecia. En la primera actividad analizarás las condiciones para que dos figuras sean consideradas semejantes.

TEMA 2: LA SEMEJANZA

A 4. Figuras semejantes

a) Observá los triángulos *ABC* y *A''B'C'*. Para obtener el segundo a partir del primero, se le aplicó al triángulo *ABC* una homotecia de centro *C* y razón 2 y se obtuvo *A'B'C*, y a esa imagen *A'B'C* se la rotó 90° en sentido horario con centro en *B'*.



Para expresar simbólicamente que al triángulo *ABC* se le ha aplicado primero la homotecia y luego una rotación se escribe:

$$R_{(B';\,90°)}\,°H_{(C;\,2)}\,\widehat{ABC} = \widehat{A"B'C'}.$$

Si leés la fórmula de izquierda a derecha, parece que las transformaciones están al revés del orden en que fueron hechas. Esto es así porque el símbolo de la operación que primero se aplica, se escribe en la fórmula siempre a la izquierda de la figura y junto a ella. En este caso se le aplicó al triángulo *ABC* una homotecia de centro *C* y razón 2, es decir: $H_{(C;2)}$ *ABC*. La segunda operación en la que a esa imagen *A'B'C* se la rotó 90º en sentido horario con centro en *B'*, se aplica al resultado de $H_{(C;2)}$ *ABC*, por eso queda escrita más a la izquierda:

$R_{(B';\,90°)}\,°H_{(C;\,2)}\,\widehat{ABC}$.

Las siguientes tablas expresan la transformación resultante; una muestra la correspondencia entre los ángulos y la otra, entre los lados.

ABC	A'B'C
A	A'
B	B'
C	C'

Ángulos

ABC	A'B'C
AB	A' B'
BC	B' C'
CA	C' A'

Lados

b) En el mismo orden, las siguientes tablas muestran las medidas de los ángulos, en grados, y las medidas de los lados, en centímetros. Respondé en tu carpeta si la relación entre las medidas de los lados de ABC y A"B'C' es directamente proporcional y por qué.

ABC	A'B'C
80°	80°
65°	65°
35°	35°

Ángulos

ABC	A'B'C
2,15	4,3
1,2	2,4
2	4

Lados

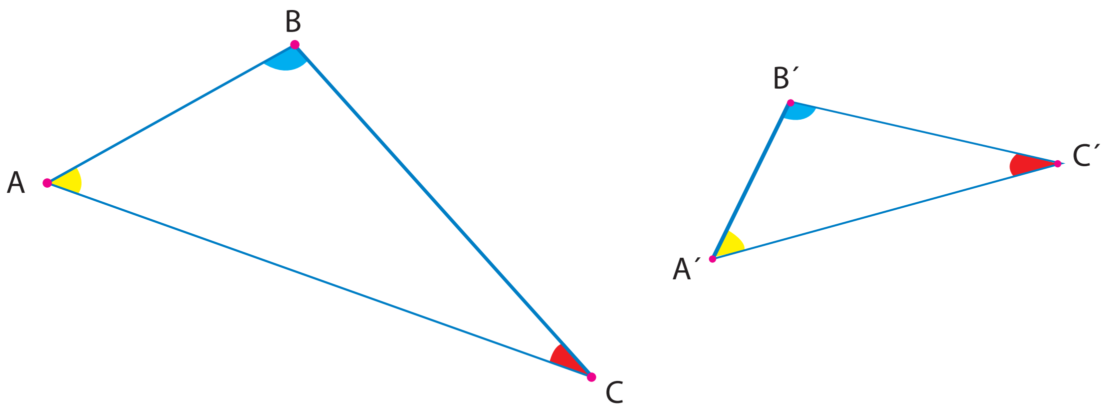
Dos figuras son **semejantes** si cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:
- sus ángulos correspondientes son iguales;
- sus lados correspondientes tienen medidas que se vinculan por una función directamente proporcional.

Dicho de otro modo, dos figuras son semejantes si una se puede obtener a partir de la otra por aplicación sucesiva de una homotecia y alguna de las trasformaciones isométricas; o sea, traslaciones, giros o simetrías.

En el ejemplo anterior, la igualdad de los ángulos es evidente y la proporcionalidad de los lados correspondientes se observa en la igualdad de los cocientes $\frac{4,3}{2,15}$; $\frac{2,4}{1,2}$; $\frac{4}{2}$.

Si realizás los cálculos, verás que en todos los casos el cociente es 2; entonces, la razón de semejanza de *A"B'C'* con respecto a *ABC* es 2.

c) Considerá los triángulos, *ABC* y A´B´C´ que aparecen a continuación para resolver las siguientes consignas en tu carpeta.



1. Realizá todas las mediciones necesarias para verificar que se trata de dos triángulos semejantes.

2. Elaborá las tablas de medidas de los ángulos y de los lados correspondientes.

3. Hallá la razón de semejanza.

4. Indicá qué triángulo tomaste como original y cuál, como imagen.

En las siguientes actividades seguirás trabajando sobre transformaciones y figuras semejantes. Acordá con tu docente cuándo resolverlas.

A 5. Análisis de figuras semejantes

a) La siguiente tabla muestra las medidas de los lados de dos triángulos semejantes; el triángulo *MNP* es la imagen del triángulo *RST*:

$\overset{\triangle}{RST}$	$\overset{\triangle}{MNP}$
RS = 3	MN = 4,5
ST = 2	NP = 3
TR = 2,5	PM = 3,75

Copiá la tabla en tu carpeta y respondé.

1. ¿Cuáles son los pares de lados correspondientes?

2. ¿Qué medida tienen los lados de la figura considerada como original?

3. ¿Cuál es la razón de semejanza?

4. La figura imagen ¿se agrandó o se achicó con respecto a la original?

b) Hacé lo mismo que en **a** considerando la siguiente tabla en la que $\overset{\triangle}{RST}$ es la imagen de $\overset{\triangle}{MNP}$.

$\overset{\triangle}{MNP}$	$\overset{\triangle}{RST}$
MN = 6	RS = 3
NP = 4	ST = 2
PM = 4,5	TR = 2,25

c) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las situaciones planteadas en **a** y **b**?

d) La siguiente tabla está incompleta. Para que puedas hallar las medidas de los lados BC y PM tené en cuenta que el triángulo ABC es la imagen del triángulo MNP por una semejanza. Hacé lo siguiente:

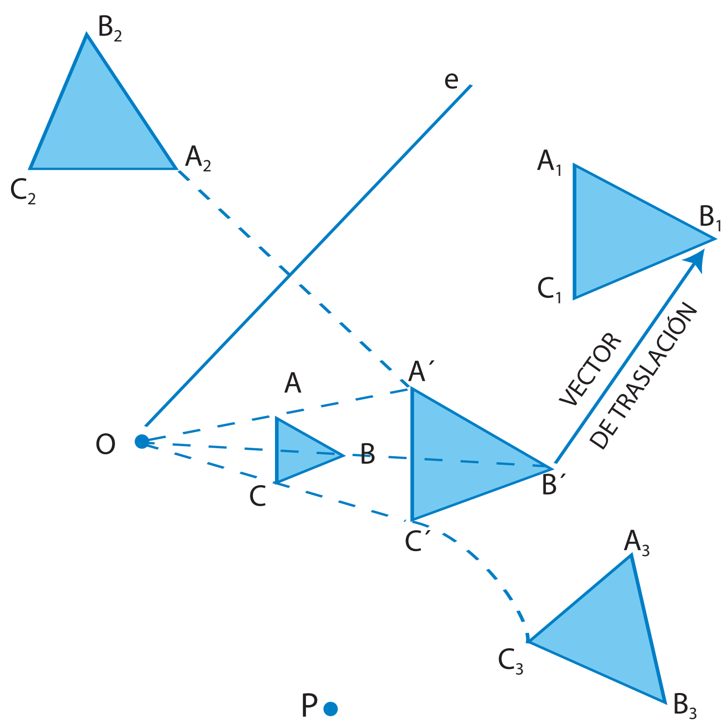
1. Copiá la tabla en tu carpeta.

2. Encontrá las medidas que faltan para completarla. Seguramente, podrás usar lo que ya aprendiste sobre razones y proporciones.

3. Explicá paso a paso cómo lo hacés.

$\overset{\triangle}{MNP}$	$\overset{\triangle}{ABC}$
MN = 3	AB = 12
NP = 2	BC =
PM =	CA = 16

e) Observá el siguiente dibujo.



La expresión: $R_{(P;-50°)} \circ H_{(O;\,2)}\ ABC = A_3B_3C_3$, significa que al triángulo ABC se le ha aplicado sucesivamente primero una homotecia de centro O y razón 2 y luego un giro de *centro* P y ángulo –50° y que el resultado de aplicar esas operaciones, en ese orden, es el triángulo $A_3B_3C_3$.

1. Copiá en tu carpeta la expresión anterior que representa todas las transformaciones.

2. Completá las siguientes expresiones y explicá con tus palabras el significado de cada una:

T $(\overrightarrow{B'B_1}) \circ H_{(O;\,2)}\ ABC =$

S (e) $\circ H_{(O;\,2)}\ ABC =$

3. Nombrá todos los triángulos que son semejantes.

Con la siguiente actividad tendrás la oportunidad de revisar los contenidos de esta unidad y también podrás considerar cuánto sabés sobre estas nuevas transformaciones, sus características, cómo aplicarlas a distintas figuras y cómo expresarlas simbólicamente. Revisá los dos temas de esta unidad y, si no lo hiciste antes, copiá en tu carpeta las definiciones o explicaciones más importantes y los "Para recordar". Prestá especial atención a la expresión simbólica de las transformaciones y asegurate de entender cómo se formula y cómo se lee. Practicalo con las figuras de las actividades.

A

6. Homotecias, semejanzas y símbolos

a) Completá el siguiente cuadro acerca de un rombo *VXYZ* al que se le han aplicado homotecias de distintas razones. Tené en cuenta que un rombo es un paralelogramo con sus lados iguales.

Medida del lado XY	Medida del lado X'Y'	Razón de la homotecia
3 cm	12 cm	
	6 cm	1,5
	2 cm	4

b) En una hoja en blanco dibujá un rectángulo *MNPQ*, de 4 cm por 2 cm. Hallá su imagen según una homotecia de centro *O* (*O* es un punto cualquiera exterior al rectángulo) y razón –2.

En este caso, la razón es un número entero negativo, ¡hay que tener cuidado!

Cuando busques la imagen de *M*, por ejemplo, en vez de hacerlo sobre la semirrecta *OM*, debés hallarla sobre la semirrecta opuesta de *OM*. En ese caso, el centro *O* de la homotecia queda entre la figura original y su imagen.

En cambio, si la razón de la homotecia es positiva, las dos figuras, la original y su imagen, quedan "del mismo lado" respecto del centro de la homotecia.

c) Decidí si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explicá cómo lo justificás.

1. Todos los rectángulos son semejantes entre sí.

2. Todos los cuadrados son semejantes.

3. Dos rombos iguales son semejantes.

4. Si dos triángulos isósceles tienen los ángulos opuestos a la base respectivamente congruentes son semejantes.

Para finalizar

A lo largo de esta unidad aprendiste que una figura y su imagen homotética siempre cumplen con las siguientes condiciones:

- **sus lados respectivos son paralelos;**
- **las longitudes de los lados son respectivamente proporcionales;**
- **sus ángulos respectivos son iguales entre sí;**
- **su forma es la misma.**

Y también que si dos figuras son semejantes:

- **sus ángulos correspondientes son iguales;**
- **sus lados correspondientes son proporcionales, es decir tienen medidas que se vinculan por una función directamente proporcional;**
- **pueden estar ubicadas en cualquier localización del plano.**

A continuación, como siempre, algunos problemas interesantes para que resuelvas solo. En este caso, sobre temas de Geometría y una incursión al mundo maravilloso de Gulliver.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las esferas

Una caja cúbica de 8 cm de arista contiene una esfera de 8 cm de diámetro. Otra caja cúbica, también de arista de 8 cm, contiene 512 esferitas de 1 cm de diámetro. Todas las esferas son macizas y del mismo material. ¿Qué caja pesará más?

2. Triángulos

¿Puede un triángulo isósceles ser semejante a un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

3. Gulliver y la semejanza (*)

Las historias de Gulliver y sus viajes al país de los enanos (Liliput) y al de los gigantes (Brobdingnag) son muy conocidas. Según cuenta su autor, Jonathan Swift, en el fantástico Liliput las dimensiones largo, ancho y alto de todas las cosas, animales, plantas y personas, eran 12 veces menores que las nuestras, mientras que en Brobdingnag todas las dimensiones eran 12 veces mayores.

En un pasaje de la obra, Gulliver cuenta cómo los liliputienses prepararon la cama para su gigantesco huésped:

> "600 colchones con dimensiones liliputienses fueron traídos en carretas a mi casa. De 150 colchones cosidos entre sí, salió uno en el que cabía libremente a lo largo y a lo ancho. Pusieron uno encima de otro 4 colchones como este, pero aún así, ese lecho era tan duro para mí como una piedra".

a) ¿Cuántas capas debían poner para lograr un colchón normal para Gulliver?

En otro momento del viaje, el autor explica que, para alimentar a Gulliver, "le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficiente para alimentar a 1728 súbditos de Liliput".

b) Si un cocinero puede preparar comida para unos 10 liliputienses, ¿cuántos cocineros harán falta para alimentar a Gulliver?

Las cosas cambian al llegar a Brobdingnag, donde el pobre Gulliver se queja de un travieso escolar que "me tiró una avellana a la cabeza y por poco me da, y la había lanzado con tal fuerza que me hubiera descalabrado inevitablemente, porque la avellana era poco menor que una calabaza nuestra".

c) ¿Cuánto pesará una avellana en Brobdingnag?

d) Si el diámetro de una avellana es aproximadamente de 1,5 cm, ¿cuál es el diámetro de una en el país de los gigantes?

(*) Camus, N. y Massara, L., *Matemática* 3, Buenos Aires, Aique.

4. Cercando terrenos

En la colonización de un pueblo se utilizó el siguiente procedimiento para la distribución de tierras: todos los colonos podían quedarse con el terreno que fueran capaces de alambrar con 3.000 m de alambrado.

¿Cuál es el mayor terreno que se puede cercar si todas las parcelas tienen que tener forma rectangular?

Algunas personas buscaron terrenos al lado de los ríos. No sólo se aseguraban la provisión de agua sino que ahorraban uno de los lados del terreno a cercar. ¿Cuál es ahora la respuesta?

5. Tornillos, tuercas y clavos

Hay tres cajas: una contiene tornillos, otra tuercas y la otra clavos. El que ha puesto las etiquetas de lo que contienen se ha confundido y no acertó con ninguna. Abriendo una sola caja y sacando una sola pieza, ¿cómo se puede conseguir poner a cada caja su etiqueta correcta?

6. Prendas y botones

María dice que si pone dos botones a cada prenda le faltan dos botones y si pone uno a cada una, le sobra un botón. ¿Cuántas prendas y cuántos botones tiene María? ¿La respuesta es única? ¿Por qué?

7. Sudoku

Es un juego de ingenio japonés, muy popular en el resto del mundo, y con bastantes adeptos aquí. Es fácil de entender y de jugar, y sólo requiere un poco de lógica.

Hay un cuadro de 9 por 9, dividido en 9 cuadros de 3 por 3. La clave está en completar los casilleros con números del 1 al 9, sin repetirlos ni en la hilera, ni en la fila, ni en la cuadrícula menor.