

UNIDAD 8

Ángulos. Posiciones relativas

En esta unidad trabajarás con ángulos, es decir, con elementos geométricos que ya conocés. Verás las diferentes posiciones que pueden tomar las rectas que los forman y las relaciones métricas que existen entre ellos.

Realizarás construcciones geométricas que te permitan descubrir esas relaciones como también resolver problemas apoyándote en los conocimientos que ya poseés. Tené presente que primero hay que pensar cómo se pueden resolver los problemas y luego comprobar si lo que habías pensado es correcto.



Una vez resuelta cada actividad, reunite con tus compañeros para discutir las posibles soluciones que cada uno proponga y las conclusiones presentadas. Ello les permitirá comparar, revisar, corregir y aclarar lo que piensa cada uno. Los temas que se desarrollarán son: ángulos formados por dos rectas que se cortan, ángulos entre dos rectas cortadas por una transversal, propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Comenzarás viendo cuáles son las posiciones que pueden tomar las rectas incluidas en un plano y los símbolos que se usan para indicarlas.



1. Rectas en el plano

Como sabrás, el hombre en muchas ocasiones necesita representar los lugares en que vive o lo que necesita construir. En el primer caso, esa representación la hace mediante un plano, ya sea de su vivienda, una ciudad o un pueblo, o bien de un mapa para extensiones más amplias como provincias o países.

En el *Cuaderno de estudio 1* estudiaste escalas y su aplicación en mapas y planos; eso te ayudará a interpretar el plano que se presenta en la página siguiente. Observalo y verás que las calles y las avenidas se presentan como segmentos de recta.

a) Buscá en el plano que aparece en la página siguiente, dos calles o avenidas paralelas y dos calles o avenidas que se corten. Dibujalas en tu carpeta,

- 1.** Nombrá con a y b las rectas paralelas, con c y d las que se cortan y que desde ahora llamarás **rectas secantes**.
- 2.** Expresá simbólicamente $a \parallel b$ (a es paralela a b), $c \perp d$ (c es secante con d). Las rectas secantes se cortan en un punto; nombrá el punto con una letra mayúscula.



d) Leé esta información y comentalá con tus compañeros.

“Cuando dos rectas secantes determinan cuatro ángulos congruentes, dichas rectas son **perpendiculares**. El símbolo usado para indicar que **a** es perpendicular a **b** es \perp .”

Habrás visto que los cuatro ángulos congruentes tienen una amplitud de 90° , es decir, son rectos. Como los lados de estos ángulos están incluidos en rectas perpendiculares es posible concluir que: la condición suficiente para que dos rectas sean **perpendiculares** es que incluyan los lados de un ángulo recto.

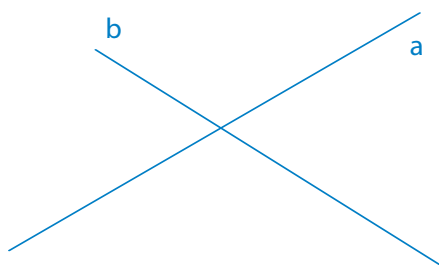


2. Ángulos formados por dos rectas secantes

En esta actividad continuarás estudiando las rectas. Ya viste que dos rectas del plano pueden ser paralelas o secantes y que las rectas perpendiculares son un caso particular de las rectas secantes.

a) En tu carpeta escribí como título “Actividad 2: Ángulos formados por dos rectas secantes” y dibujá dos rectas secantes no perpendiculares. Nombralas con letras minúsculas, y con una letra mayúscula, el punto en que ellas se cortan.

1. Estas rectas determinan varios ángulos. ¿Cuántos son? Para ayudarte usá lápices de colores.
2. Entre ellos habrás encontrado pares de ángulos que tienen un lado común y en los que los otros dos son semirrectas opuestas. A estos ángulos se los llama **adyacentes**.
3. Copiá en tu carpeta la siguiente figura. Observala y señalá un par de ángulos adyacentes.



4. Nombralos con letras griegas y sumalos gráficamente. ¿Qué tipo de ángulo has obtenido como suma? Expresá en símbolos la suma que realizaste.
5. Hacé lo mismo con otro par de ángulos adyacentes y escribí en tu carpeta la conclusión a la que llegaste. Comentalá con tus compañeros y tu docente.

b) Leé esta información y luego respondé las consignas en tu carpeta.

- Dos ángulos son **suplementarios** cuando su suma es un **ángulo llano**.
- Dos ángulos son **complementarios** cuando su suma es un **ángulo recto**.



UNIDAD 8

1. De acuerdo con las afirmaciones anteriores, ¿qué propiedad tienen los ángulos adyacentes?
2. Como la amplitud de un ángulo llano es de 180° , si la suma de las amplitudes de dos ángulos es 180° , uno de ellos es el **suplemento** del otro. Elegí un ángulo de la figura e indicá cuál es su suplemento.
3. Pensá y escribí en tu carpeta: ¿cuándo un ángulo es el **complemento** de otro? Compará tu respuesta con la de tus compañeros.
4. Respondé las siguientes preguntas y justificá tus respuestas.
 - Si la amplitud de α es 45° , ¿cuál es la de su suplemento?, ¿y la de su complemento?
 - Si la amplitud de β es 120° , ¿cuál es la de su suplemento?
 - Si el ángulo es nulo, ¿cuál es su suplemento? ¿Y su complemento?
 - ¿Cuándo dos ángulos suplementarios son congruentes?

Hasta aquí has trabajado con ángulos en tu carpeta, a partir de las representaciones que dibujaste. Las actividades que siguen te permitirán analizar otros ángulos a partir de construirlos usando varillas.



3. Trabajando con varillas

Para realizar esta actividad vas a usar dos varillas o sorbetes.

- a) Ubicá una varilla sobre otra, hacelas girar y observá los ángulos que ellas forman. Anotá en tu carpeta las diferentes posiciones que le podés dar a tus varillas y nombrá qué tipo de ángulos se formaron en cada caso. Elegí una de las posiciones y en ella dos ángulos que cumplan con estas condiciones:

Tienen el mismo vértice y los lados de uno de ellos son las semirrectas opuestas de los lados del otro.

1. Dibujá los ángulos en esa posición en la carpeta y marcalos utilizando letras griegas.



Los ángulos que cumplen con la condición de tener el mismo vértice y de que los lados de uno son las semirrectas opuestas de los lados del otro se llaman **ángulos opuestos por el vértice**.

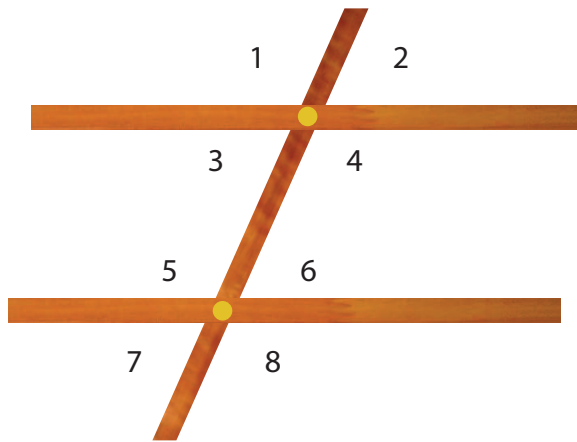
- b) Retomá las varillas y formá otros pares de ángulos opuestos por el vértice.
1. Dibujalos en tu carpeta y comparalos usando papel de calcar o bien midiendo su amplitud con un transportador.
 2. Escribí tu conclusión y comparala con la de tus compañeros. Comenten este trabajo con el docente.

Hasta aquí has visto ángulos formados por dos rectas que se cortan, a través de representaciones gráficas y de la construcción con dos varillas. Ahora trabajarás con tres varillas para estudiar nuevos pares de ángulos.



4. Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante

- a) Tomá tres varillas o sorbetes del mismo tipo de los que usaste en la actividad anterior. Ubicá dos, representando rectas paralelas. Con la tercera, probá diferentes posiciones de modo que en todos los casos la posición sea secante respecto de las otras dos.
- b) Observá en las diferentes posiciones: ¿cuántos ángulos se forman? Comparalos por pares.
- c) Seguramente, en algunas de las posiciones quedó determinada una situación como la siguiente. Observala y leé la información que aparece a continuación.



Son:

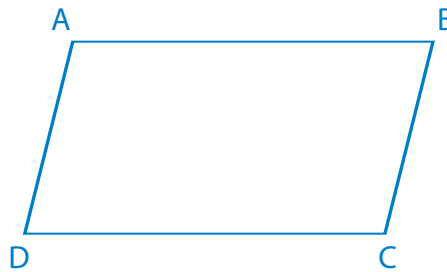
Ángulos correspondientes $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ y } \hat{5} \\ \hat{2} \text{ y } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ y } \hat{7} \\ \hat{4} \text{ y } \hat{8} \end{array} \right.$

Ángulos alternos externos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ y } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ y } \hat{7} \end{array} \right.$

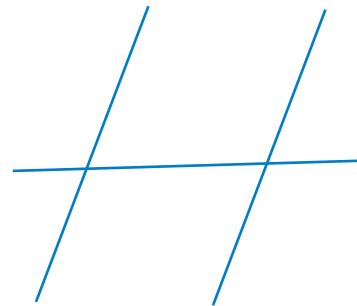
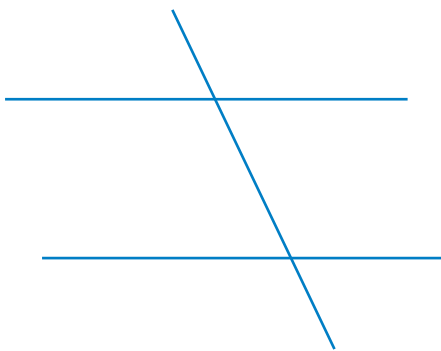
Ángulos alternos internos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{3} \text{ y } \hat{6} \\ \hat{4} \text{ y } \hat{5} \end{array} \right.$


UNIDAD 8

1. Observá cuáles son los pares de ángulos formados por las varillas y nombrados en la clasificación anterior.
 2. En tu carpeta, dibujá rectas en la posición en las que aparecen dibujadas y señalá los pares de ángulos correspondientes con un mismo color.
 3. Hacé lo mismo con los ángulos alternos internos y alternos externos.
 4. Compará, ahora, los pares de ángulos nombrados y escribí en tu carpeta las conclusiones. Compartilas con tus compañeros y mostráselas a tu docente.
- d) Dibujá en tu carpeta un paralelogramo como el siguiente.



1. El lado \overline{AB} es paralelo al \overline{CD} . Tomá el lado \overline{BC} como la secante y, de acuerdo con lo que ya viste, indicá, si los hubiera, pares de ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos colocándoles las letras que quieras.
 2. Marcá con un color los ángulos interiores \hat{A} y \hat{D} .
 3. ¿Qué relación existe entre estos ángulos? Escribila en tu carpeta y explicá cómo hiciste para encontrarla. Estos ángulos se llaman **conjugados internos**.
Buscá en el paralelogramo otro par de ángulos conjugados internos y marcalos con otro color.
- e) En tu representación de las dos rectas paralelas cortadas por una transversal, señalá un par de ángulos conjugados internos como los que viste en el paralelogramo $ABCD$.
1. ¿Habrá ángulos conjugados externos? Marcá los pares de ángulos que a tu criterio sean conjugados externos y explicá por qué así lo creés. Compará tu respuesta con la de tus compañeros.





5. Para revisar lo aprendido



a) Como finalización de esta unidad reúne con tus compañeros y completá este cuadro con las observaciones que registraste en tu carpeta.

Ángulos formados por dos rectas secantes	Propiedades	En símbolos
Opuestos por el vértice		
Adyacentes		

Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante	Propiedades	En símbolos
Correspondientes		
Alternos (internos o externos)		
Conjugados (internos o externos)		



Las diferentes actividades que realizaste te han llevado a observar que los ángulos pueden referirse a las posiciones particulares de las rectas que los forman.

Estos ángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta. Las propiedades son muy importantes y te permitirán encontrar otras relaciones a medida que avances en el estudio de la Geometría, como también resolver diferentes problemas.



6. A modo de síntesis

Para que te queden claros los conceptos realizá la siguiente actividad.

a) Dibujá pares de rectas como las de las figuras 1 y 2.



Figura 1

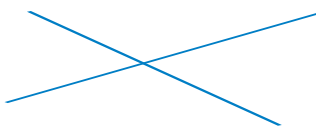


Figura 2



UNIDAD 8

1. Compará los ángulos que se han formado en cada figura y marcá con un color los ángulos congruentes.
 2. Elegí pares de ángulos que están en un mismo semiplano respecto de cada recta. ¿Cuánto suman esos pares de ángulos?
 3. Si se movieran las rectas, ¿qué pasaría con los ángulos que antes eran congruentes? ¿Y con los ángulos que antes sumaban 180° ? Comprabalo dibujando las rectas.
 4. Explicá por qué la relación entre los ángulos se mantiene, aunque las rectas se muevan y por consiguiente cambien las amplitudes de los ángulos.
- b) Dibujá dos ángulos adyacentes y las bisectrices de cada uno. ¿Qué propiedad tienen esas bisectrices? Enuncia.
- c) ¿Qué propiedad tienen las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice?

Para finalizar

Las diferentes actividades que realizaste te han llevado a observar que los ángulos se pueden referir a las posiciones particulares de las rectas que los forman.

Es de interés especial el análisis de las relaciones que vinculan los ocho ángulos que se forman cuando se trata de una recta secante a dos rectas paralelas. En tal caso, cada uno de esos ángulos guarda una relación particular con los otros de modo que:

- es **adyacente** de otros dos;
- es el **opuesto por el vértice** con relación a otro ángulo;
- es el **correspondiente** a otro ángulo formado por la recta secante con la otra recta paralela;
- es **alterno interno o externo** de otro de los ángulos, según su posición.

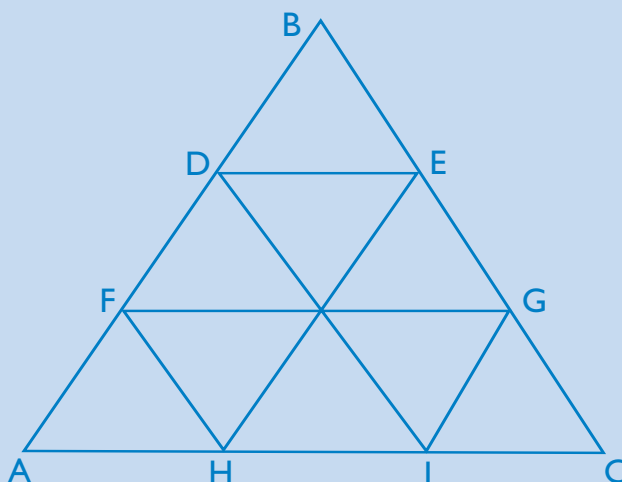
La conclusión más importante es que en virtud de la congruencia entre estos pares de ángulos, o bien de su condición de suplementarios, es suficiente conocer la medida de uno de los ángulos que se forman para poder determinar la medida de todos los otros.

Estos ángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta. Los vínculos que pudiste establecer entre los pares de ángulos según su posición te permitirán encontrar otras relaciones a medida que avances en el estudio de la Geometría. La comprobación de estas relaciones métricas te permitirá la justificación de conjeturas para avanzar, de ahora en más, en el camino de la demostración en Matemática.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. A mirar bien

En este triángulo ABC hay más triángulos y también cuadriláteros. Escribí el nombre correspondiente a cada uno sabiendo que $AC \parallel FG \parallel DE$; $AB \parallel EH \parallel IG$; $BC \parallel DI \parallel FH$.

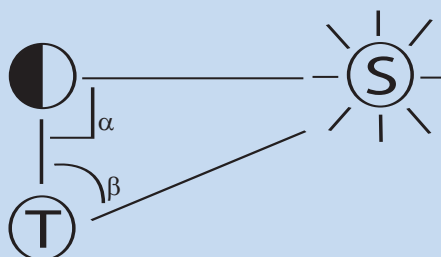


a) Marcá con un color todos los ángulos correspondientes con el ángulo A y señalá las paralelas y la secante que has elegido.

2. Los ángulos en la Antigüedad

Desde la Antigüedad, los hombres observan el cielo y los cuerpos que en él aparecen. Uno de esos hombres fue el sabio Aristarco de Samos, llamado así por haber nacido en ese lugar de Grecia tres siglos antes de Cristo.

Él estableció que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo rectángulo en el momento del cuarto creciente o cuarto menguante. Calculó que β , el ángulo opuesto al cateto mayor, era de 87° , y de esta forma pudo concluir que la distancia Tierra - Sol es mayor que la distancia Tierra - Luna.



Este descubrimiento le llevó a decir que la Tierra giraba alrededor del Sol. Esta idea fue muy criticada por entonces porque no se podía pensar que la Tierra se moviera ya que estaba en contradicción con el sentido común. ¿Podés decir cuál es la propiedad geométrica por la cual Aristarco pudo llegar a esa conclusión?



UNIDAD 8

3. Para seguir pensando

- a) Si dos ángulos tienen el mismo complemento, ¿qué podés decir de esos ángulos? Justificá tu respuesta y da un ejemplo.
- b) Si dos ángulos tienen el mismo suplemento, ¿qué podés decir de esos ángulos? Justificá tu respuesta y da un ejemplo.
- c) Registrá las respuestas en tu carpeta.

4. El tablero de ajedrez

Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez (8 casillas de ancho y 8 de largo) tenía 294 cuadrados. ¿Podés explicar si es cierta esta afirmación?

