UNIDAD 2 Números racionales

Los números enteros que estudiaste en la unidad 1 se crearon por la necesidad de resolver problemas que implican contar en dos sentidos opuestos, como las temperaturas sobre cero y bajo cero o las alturas sobre el nivel del mar y por debajo de ese nivel. En esta nueva unidad ampliarás el conocimiento matemático de los campos numéricos explorando el conjunto de los números racionales que incluye, además de los números enteros, las familias de fracciones equivalentes, tanto positivas como negativas. Vas a emplear los números racionales expresados como una fracción o como una expresión decimal. Como en la unidad anterior, usarás la recta numérica como un recurso para aprender y también para representar e interpretar situaciones reales. Además, aplicarás todos esos conocimientos en la resolución de problemas.

Al final de la unidad, igual que en todas las unidades de este cuaderno, encontrarás algunos desafíos matemáticos que seguramente te van a entretener y pondrán a prueba tu creatividad.

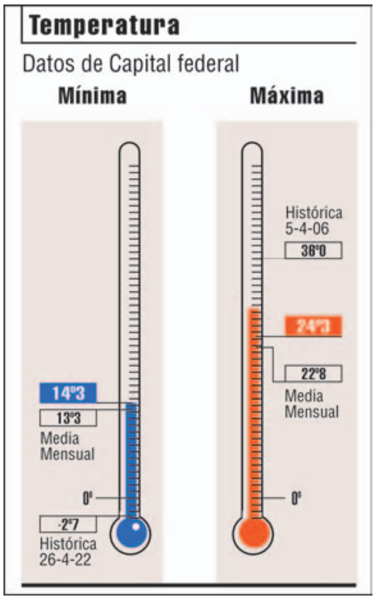
TEMA 1: ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS RACIONALES?

Esta actividad tiene partes que vas a resolver solo y otras en las que sería bueno que trabajes con tus compañeros. Consultá con tu docente para que te ayude a organizar la tarea.

A

1. Fracciones opuestas y equivalentes

En muchas situaciones se presenta la necesidad de contar en dos sentidos opuestos con relación a cantidades que no son enteras sino fraccionarias. A continuación vas a analizar algunas de estas situaciones, y con ellas aparecerá con mayor claridad la necesidad de introducir una nueva clase de números.



a) Si en la escuela o en sus alrededores se han registrado temperaturas negativas, anotá en tu carpeta aquellas que incluyan décimas de grado. Si no fuese así, buscá en la biblioteca algunas referencias sobre temperaturas medias y extremas en diferentes provincias o en otros países, y cuando encuentres ejemplos de temperaturas bajo cero que incluyan décimos de grado, escribilos. Recordá anotar como título: Actividad 1: "Fracciones opuestas y equivalentes".

b) Observen el siguiente mapa de América del Sur y el texto que lo acompaña.

Este mapa muestra alturas y profundidades en América del Sur. Las referencias indican la cantidad de metros sobre o debajo del nivel del mar que corresponde a cada color.

Por ejemplo:

- En la parte superior de la escala de color, **1000** significa más de 1000 metros de altura sobre el nivel del mar y menos de 3000 m.
- En la parte inferior de la escala de color, **2000** significa más de 2000 metros de profundidad bajo el nivel del mar y menos de 4000 m.

En cambio, cuando se escribe un texto, los metros de altura se indican con un signo **+** (positivo) y los metros de profundidad se indican con un signo **–** (negativo).

Observen que, según la unidad, en ocasiones es necesario usar expresiones decimales, como –3,8 km y –1,5 km. Del mismo modo, en algunos lugares, las marcas en los termómetros ambientales descienden por debajo de 0 ºC de temperatura. Esas marcas se registran como temperaturas negativas. Así –2,7 ºC indica 2 grados y 7 décimos de grado bajo 0.

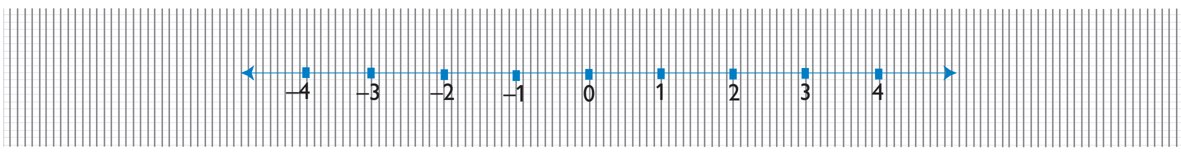
c) Teniendo en cuenta la información anterior y el significado de los signos, localicen las zonas del mapa en las que se encuentran puntos que cumplen con las condiciones descritas en las siguientes referencias:

x: está a una profundidad de –150 m,
y: está a una altura de 495 m,
z: está a una profundidad de –3,8 km,
w: está a –1,5 km de profundidad.

Las temperaturas se pueden representar sobre una recta numérica. Lo primero que podés observar es que algunas temperaturas no se indican con números enteros sino decimales porque el aumento o la disminución de la temperatura no se produce por saltos sino en forma gradual. En efecto: –2,7 ºC o 3,5 ºC son temperaturas con parte entera y parte decimal que corresponden a fracciones con denominador 10: $-\frac{27}{10}$ y $\frac{35}{10}$, respectivamente.

Entre las marcas correspondientes a una diferencia de un grado entero hay que marcar diez partes iguales o sea, diez décimas de grado. Para contarlas hay que fijarse en los espacios entre dos marcas: cada espacio es una décima de grado. Para marcar +3,5 ºC hay que desplazarse desde el punto 0 de origen, 3 enteros hacia la derecha y 5 décimos más en el mismo sentido. Para marcar –2,7 ºC hay que trasladarse desde 0 a 2 grados enteros negativos y 7 décimos más hacia la izquierda.

d) Dibujá en tu carpeta una recta como la siguiente.



1. Hacé una marca con color, sobre la recta que dibujaste, en el punto +3,5 y anotá la temperatura representada.

2. Marcá con color el punto –2,7 y anotá la temperatura representada.

3. Marcá sobre una recta numérica todas las temperaturas que encontraste al principio de la consigna **a** de esta actividad.

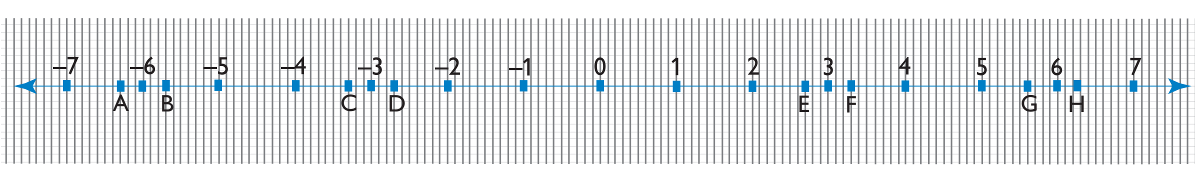
e) En la consigna **b** de esta actividad localizaste en el mapa puntos a los que les corresponden números positivos y negativos. Algunos de ellos no son enteros. Observá en qué unidad de longitud está expresado cada ejemplo.

1. Para unificar las unidades, expresá todos valores en kilómetros aunque tengas que usar números decimales.

2. Dibujá en tu carpeta una recta numérica que abarque desde –4 km hasta +4 km. Ubicá el punto –720 m = –0,72 km y compará con otros compañeros si lo ubicaste bien. Si tienen dificultades consulten con el docente.

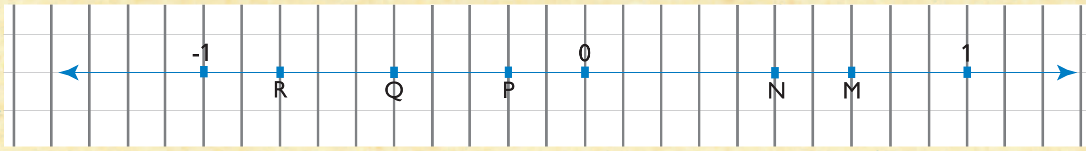
3. Entre dos números enteros, positivos o negativos, es posible señalar sobre la recta numérica fracciones que no sean décimos. Por ejemplo, el pico de una montaña como el Famatina tiene una altura de aproximadamente $6\,\frac{1}{4}$ km o un océano como el Atlántico tiene $-\,3\,\frac{1}{3}$ km de profundidad media.

Observá la recta numérica y decidí cuál de las marcas indica $6\,\frac{1}{4}$ km y cuál indica $3\,\frac{1}{3}$ km .



4. Compará tus resultados con los de otros compañeros. Si no están de acuerdo, consulten con su docente.

La recta numérica de la figura está dibujada sobre papel cuadriculado para poder leer subdivisiones de la unidad que, como ves, abarca diez lados de cuadraditos.



f) Respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

En la recta:

1. ¿Qué fracción representa 1 cm?, ¿y 1 mm?

2. ¿A qué distancia de 0, en cm, está $\frac{1}{2}$?, ¿y $\frac{2}{4}$?

3. ¿Qué longitud en cm tiene $\frac{1}{5}$? ¿y $\frac{4}{20}$?

4. ¿A qué distancia de 0 está $-\frac{3}{4}$? ¿y $-\frac{9}{12}$?

g) Usá tu regla para averiguar qué número fraccionario corresponde a cada uno de los puntos *M, N, P, Q* y *R*. Escribilos en tu carpeta, expresalos con más de una fracción, usando fracciones equivalentes.

Para corroborar tu trabajo podés consultar la información proporcionada en la actividad que sigue. Revisala junto con el docente para ir comprobando qué es lo que ya sabés y qué es lo nuevo que tenés que aprender.

A 2. ¿Cómo darse cuenta cuando dos fracciones son equivalentes?

Para decidir si dos fracciones son equivalentes se puede hacer uso de la siguiente regla: Multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número se obtienen fracciones equivalentes.

a) Leé el siguiente texto.

1. A veces, el numerador y el denominador de una de las fracciones puede obtenerse multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de la otra por un mismo número.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$, entonces $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$.

$\frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5}$; entonces $\frac{6}{15}$ es equivalente a $\frac{2}{5}$.

2. En todos los pares de fracciones puede explorarse la equivalencia haciendo las siguientes operaciones:
• multiplicar los denominadores entre sí para obtener un denominador común;
• multiplicar cada numerador por el mismo número que se usó para multiplicar su denominador;
• comparar los resultados; si se obtiene la misma fracción, las fracciones originales son equivalentes.
Por ejemplo, explorar $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{15}$.

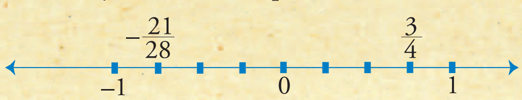
Producto de los denominadores 12 y 15 = 180.

$\frac{8 \times 15}{12 \times 15} = \frac{120}{180}$ y $\frac{10 \times 12}{15 \times 12} = \frac{120}{180}$

Entonces $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{10}{15}$ y su expresión decimal es 0,666…

3. A toda una familia de fracciones equivalentes le corresponde una única expresión decimal, como muestra este ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{21}{28} = 0{,}75$.

4. Dos fracciones de distinto signo, por ejemplo $\frac{3}{4}$ y $-\frac{21}{28}$, no pueden ser equivalentes; una estará a la derecha del cero y la otra a la izquierda:



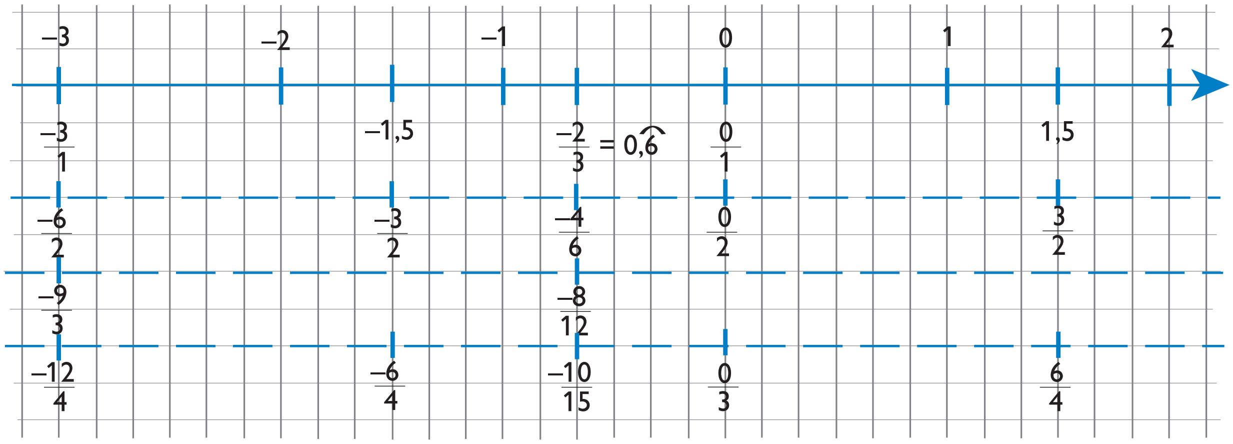
• *Una fracción indica el cociente entre dos números enteros.*
• *El denominador de una fracción no puede ser cero.*

Después de resolver estas actividades habrás visto que, además de los naturales y los enteros, existe otro tipo de números a los que llamamos **números racionales**.

Estos números indican un conjunto de fracciones equivalentes y se representan sobre la recta numérica de tal modo que a un mismo punto le corresponden infinitas fracciones pero un solo número racional.

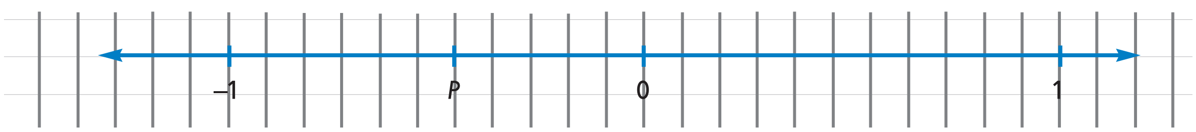
Por ejemplo: 5 pertenece al conjunto de los números naturales y por eso sirve para contar. En el mismo punto representamos el +5 que pertenece al conjunto de los enteros; es decir, está orientado en un cierto sentido con respecto a los demás números. La expresión $+\frac{10}{2}$ también se representa en el mismo punto que el natural 5 y es un número racional; está orientado y le corresponde el mismo punto que al entero +5 ya que es equivalente a una colección de fracciones ($\frac{10}{2}$; $\frac{20}{4}$, ...) cuya expresión más simple es 5.

De igual forma, –2 es entero, y en consecuencia, como número racional, equivalente a la familia de fracciones, $-\frac{4}{2} = -\frac{8}{4} = \ldots$



*Un **número racional** representa toda la clase de fracciones equivalentes a una dada. Habrás visto que a dos puntos simétricos respecto de 0 les corresponden dos números racionales que llamamos **opuestos**.*

b) Dibujá una recta numérica como esta y marcá, además del 0 y del punto *P*, el punto simétrico de *P* con respecto a 0. Llamálo *P*'.



1. ¿Qué número racional corresponde a *P*? ¿y a *P*'?

2. Indicá los números racionales *P* y *P*' con una serie de fracciones equivalentes.

3. Escribí alguna expresión decimal exacta o aproximada que corresponda a *P* y otra, que corresponda a *P*´.

4. Comentá con tu docente tus respuestas.

En este primer tema viste de qué se tratan los números racionales trabajando con conjuntos de fracciones equivalentes y también qué son los números opuestos usando la recta numérica. En las próximas dos actividades vas a estudiar algunas características de los números racionales, a partir de tener presentes las características que ya conocés de los números enteros. Comenzarás en el próximo tema a decidir cuándo un número racional es mayor, menor o igual que otro.

Como estás más o menos en la mitad de esta unidad, consultá con tu docente cómo usar el tiempo para la tarea que te queda por resolver.

TEMA 2: CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

A

3. El orden en los números racionales

Como ya sabés, el conjunto de los números enteros es un conjunto ordenado. Este nuevo conjunto que acabás de explorar, el de los racionales, ¿también estará ordenado como el de los enteros?

a) Anotá en tu carpeta cuál es la mayor temperatura registrada y cuál es la menor de las encontradas en la consigna **a** de la actividad **1**.

Temperatura mayor. ....; ¿dónde se registró?.........................

Temperatura menor. ....; ¿dónde se registró?.........................

b) En una representación de las temperaturas sobre la recta numérica, si nos trasladamos de izquierda a derecha, ¿las temperaturas aumentan o disminuyen? Respondé en tu carpeta y explicá por qué.

c) Copiá los siguientes pares de números y escribí el signo que corresponde. (Recordá que "<" se lee "es menor que", ">" se lee "es mayor que".)

3,5 °C .... –6 °C   –2,7 °C .... 0 °C

1,5 °C .... 0,5 °C   –0,5 °C .... -1.5

d) En el ejemplo de la consigna **a** de la actividad **1** se pueden ordenar los puntos geográficos desde el que está a mayor profundidad hasta el que está a más altura. Su representación se puede hacer en una recta numérica. Construí una que te ayude a decidir si las siguientes desigualdades son falsas o verdaderas.

1. Escribilas en tu carpeta poniendo en el recuadro F (falso) o V (verdadero) según corresponda.

–1,5 km > 0,495 km ☐   0,495 km < 0 km ☐

1,5 km < –3,8 km ☐   –3,8 km > –0,150 km ☐

La representación en la recta numérica muestra que todos los números racionales están ordenados. Podemos concluir que:

> *El conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado.*

A

4. Ordenando racionales

a) Aplicá lo que has aprendido resolviendo en tu carpeta los siguientes ejercicios. Copiá y completá con <, > o = según corresponda.

$\frac{1}{5}$ ………… 0,2 $\frac{30}{7}$ ………… 4

$\frac{3}{4}$ ………… $\frac{1}{5}$ $\frac{9}{3}$ ………… –1,5

b) Escribí las siguientes expresiones completando cada afirmación con un número racional de modo que resulte verdadera.

–7, 1 < …………   ………… < 0

$\frac{4}{3}$ > …………   ………… < 0,5

–5 = …………   ………… = 1

1. ¿Cuántos números racionales podés elegir en cada caso? (Recordá que dos fracciones equivalentes de distinta escritura indican el mismo número racional.) Respondé caso por caso.

En los temas **1** y **2** de esta unidad conociste el conjunto de los números racionales y también cómo está ordenado. En el tema siguiente verás cómo se considera el valor absoluto de los números racionales, y luego, aplicando esta noción, aprenderás a resolver operaciones de suma y resta entre ellos.

TEMA 3: VALOR ABSOLUTO Y OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

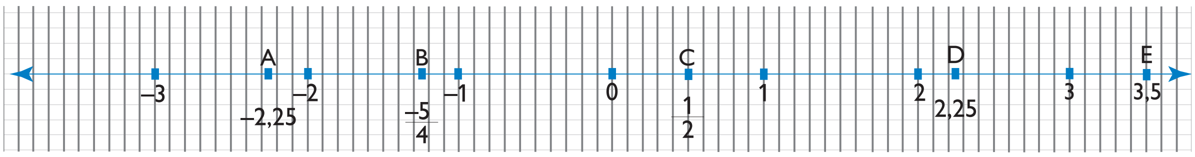
A

5. ¿Cómo saber el valor absoluto de un número racional?

Una noción importante respecto de los números racionales es la de valor absoluto. En la unidad **1** trabajaste con el valor absoluto de los números enteros como una forma que indica la distancia entre un número y el 0 sobre la recta numérica. Hablar de distancia es hablar de una medida de longitud que es siempre positiva.

En la unidad anterior aprendiste a distinguir la función del valor absoluto de los números enteros de su correspondiente signo. En esta oportunidad verás cómo funciona esto en el campo de los números racionales.

a) Observá la figura y respondé en tu carpeta: ¿cuál es la distancia al punto 0 de cada uno de los siguientes puntos: *A, B, C, D, E?*



Para representar simbólicamente el valor absoluto de x se usa $|x|$.
Por ejemplo: valor absoluto de 3 se anota $|3|$ y, como su valor es 3, se escribe $|3| = 3$; valor absoluto de –3 se anota $|-3|$ y, como su valor es 3 se escribe $|-3| = 3$.

A 6. Sumar y restar números racionales

En la unidad **1** aprendiste a sumar y restar números enteros. Ahora podrás resolver estas operaciones con números racionales. En el caso particular de la resta, recordá que se considera como la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo.

a) Copiá en tu carpeta un cuadro como el que sigue y completalo.

a	b	a + b	a – b	–b	a + (–b)
–2	5				
2	–5				
–2	–5				
5	–2				
–5	–2				
–2	–5				
3,4	1,8				
–3,4	1,8				
3,4	–1,8				
–3,4	$-\frac{1}{8}$				
0	$-\frac{1}{3}$				
0	$-\frac{1}{3}$				
$-\frac{1}{3}$	0				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$				

1. Fijate que **a** y **b** tienen los valores indicados en las primeras columnas. Para completar la última fila elegí vos un valor.

b) Observá el cuadro y respondé en tu carpeta:

1. ¿Qué operación da siempre el mismo resultado que **a** – **b**?

2. ¿Cuál es el resultado de sumar 0 a un número racional?

3. ¿Cuál es el resultado de una resta en la que el minuendo es 0?

4. ¿Cuál es el resultado de una resta en la que el sustraendo es 0?

c) Buscá los casos del cuadro en los que los dos números racionales **a** y **b** cumplan con la condición enunciada:

- tienen distinto signo,
- el valor absoluto del positivo es mayor que el valor absoluto del negativo.

1. Anotalas en un cuadro como el que sigue en tu carpeta; si quedan filas en blanco completalas inventando otros ejemplos que cumplan las condiciones indicadas.

a	|a|	Sg a	b	|b|	Sg b	a + b	|a + b|	Sg (a + b)

2. ¿Cuál es el signo de la suma?

3. ¿Qué relación hay entre los valores absolutos de la suma y los de los sumandos?

d) Buscá los casos del primer cuadro en el que los dos números racionales cumplan con la condición enunciada:

- tienen distinto signo,
- el valor absoluto del positivo es menor que el valor absoluto del negativo.

e) Construí una tabla como la anterior y respondé las mismas preguntas de los puntos **2** y **3** de la consigna **c**.

f) Observá todos los casos del cuadro en que los dos números tienen signo positivo y analizá qué signo tiene la suma y cómo se relaciona el valor absoluto de la suma con los valores absolutos de los sumandos. Anotá tus observaciones en la carpeta.

g) Hacé lo mismo con todos los casos del cuadro que construiste en los que los dos números tienen signo negativo.

h) Compará tus anotaciones con las informaciones que siguen y conversá con tu docente sobre lo que observes.

Para restar dos números racionales a – b se puede hacer la suma: a + opuesto de b.

En símbolos a – b = a + (–b).

Por ejemplo –3,4 – 1,8 = –3,4 + (–1,8) = –5,2.

3,4 – (–1,8) = 3,4 + 1,8 = 5,2.

Así, la resta es la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo y resultan válidas las propiedades de la suma.

Hasta aquí estuviste explorando los procedimientos para resolver operaciones de adición y sustracción de números racionales. A continuación encontrarás algunas conclusiones sobre los resultados de las operaciones que hiciste. Volvé a mirarlas y pensá en los ejemplos a medida que vayas leyendo las conclusiones, para que te queden más claras cada una de ellas.

Conclusiones sobre los resultados de la suma de números racionales:

• Caso de **dos números positivos**: el resultado es positivo y el valor absoluto de la suma es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Ejemplo: 3,4 + 1,8 = 5,2 y |3,4 + 1,8| = |3,4| + |1,8|.

• Caso de **dos números negativos**: el resultado es **negativo** y el valor absoluto de la suma es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Ejemplo: –3 + –5 = –8 y |–3 + –5| = |–3| + |–5|.

• Caso de **dos números de distinto signo** y tales que el **valor absoluto del positivo es mayor que el del negativo**: el resultado es **positivo** y el valor absoluto de la suma es la diferencia del valor absoluto del positivo menos el valor absoluto del negativo.

Ejemplo: –3 + 5 = 2 y |–3 + 5| = |5| – |–3|.

• Caso de **dos números de distinto signo** y tales que el **valor absoluto del positivo es menor que el del negativo**: el resultado es **negativo** y el valor absoluto de la suma es la diferencia del valor absoluto del negativo menos el valor absoluto del positivo.

Ejemplo: –3,4 + 1,8 = –1,6 y |–3,4 + 1,8| = |–3,4| – |1,8|.

Para finalizar

A partir de la revisión de las características del conjunto de los enteros que viste en la unidad anterior, en esta unidad ampliaste tu conocimiento acerca de los campos numéricos estudiando los números racionales. Seguramente, la representación de los números racionales sobre la recta numérica te ha facilitado visualizar que a un número racional le corresponde una colección de fracciones equivalentes que se ubican en un único punto de la recta. Cuando se trabaja sobre la recta numérica también las relaciones de orden entre los números de este conjunto se ven facilitadas porque los racionales negativos se ubican a la izquierda del cero y los positivos, a la derecha. La distancia de un número racional al punto cero es su valor absoluto y por tratarse de una distancia es siempre positivo.

En esta unidad analizaste con mayor detenimiento las operaciones de adición y sustracción entre los números racionales.

En la unidad siguiente trabajarás sobre las operaciones de multiplicación, potenciación y radicación.

Como al finalizar cada unidad de trabajo, aquí van algunas situaciones interesantes para que las resuelvas como un "desafío matemático". Conversá con tu docente acerca de la conveniencia de resolver todos o algunos de los siguientes desafíos matemáticos en tu casa o en la escuela.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El número desconocido

Si A 0 3 C es un número de cuatro cifras y sabemos que es múltiplo de 6 pero no de 18, determiná los posibles valores de ese número. ¿Será ese número múltiplo de 9? ¿Y de 3? Justificá tus respuestas.

2. La herencia del campesino

Un campesino tenía tres hijos, y toda su fortuna la constituían 11 ovejas. Un día llamó a sus tres hijos para repartir esos animales. Al mayor le dijo que le daba la mitad de las ovejas; al segundo, que le daba la cuarta parte del rebaño, y al menor, sólo la sexta parte. Los hijos extrañados vieron que no se podía cumplir con el pedido de su padre. Fue entonces que un vecino añadió una oveja para que en total fueran 12 y así pudiera repartirlas.
¿Podés indicar qué sucedió y cuántas ovejas recibió cada uno?

3. Una relación matemática

En vinculación con el problema anterior te informamos que hay una relación matemática que dice que todo número es igual a la suma de su mitad más su tercera y su sexta partes. Elegí un número y comprobá con él si esta relación se verifica. Luego probá si esa relación te sirve para conocer la cantidad de ovejas que le tocó a cada uno de los hijos del campesino.

4. Los hermanos de Marcelo

Cuando a Marcelo le preguntaron cuántos hermanos tenía, respondió de un modo bastante raro: “No tengo muchos, un cuarto de esa cantidad es tres cuartos de hermano”. ¿Podés descubrir cuántos hermanos tiene Marcelo?