

UNIDAD 15

Funciones

Es frecuente leer o escuchar expresiones como “el precio de un producto está en función de la demanda” o “la cantidad necesaria de forraje está en función del número de animales que hay que alimentar”. En cada una de estas expresiones se hace referencia a que una variable depende de la otra.

Detrás de estas expresiones tan comunes está presente un significado matemático que estudiarás en esta unidad. Verás qué condiciones deben cumplirse entre dos variables para que la relación entre ellas pueda ser considerada función.

En esta unidad revisarás los conocimientos que tenés acerca de correspondencias y su representación en coordenadas cartesianas para llegar a la definición de funciones.

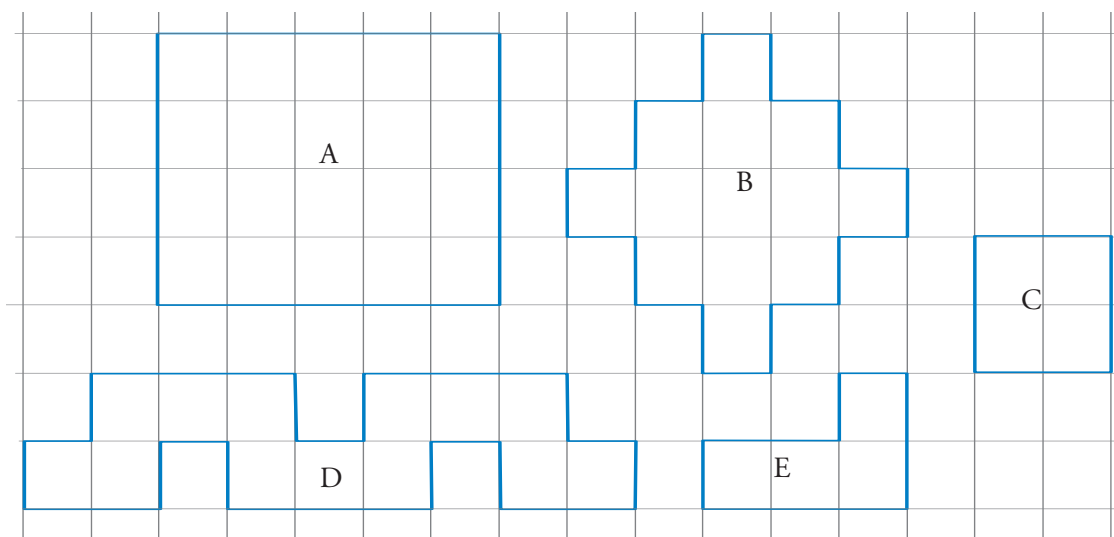


En las actividades de esta unidad vas a trabajar con figuras geométricas conocidas para analizar las características de algunas correspondencias y aprender a representarlas en un gráfico. En ellas deberás calcular perímetros y áreas de figuras que ya estudiaste en las unidades de Geometría: triángulos, cuadriláteros, polígonos en general. Anotá en tu carpeta antes de comenzar las fórmulas de los cálculos que necesitar realizar. También vas a poner en juego tu conocimiento sobre proporcionalidad directa e inversa y su representación en gráficos cartesianos. Si te hace falta, consultá las unidades de Geometría del Cuaderno de estudio 1, o buscá en los libros de Matemática de la biblioteca.



1. Correspondencias entre medidas de figuras

En esta actividad te mostramos las figuras A, B, C, D y E dibujadas sobre un papel cuadrículado con cuadrados de 1 cm^2 , o sea de 1 cm de lado.



UNIDAD 15

a) ¿Cuál es el área y cuál el perímetro de cada figura? Completá con los resultados una tabla como la siguiente.

	Área en cm ²	Perímetro en cm
A		
B		
C		
D		
E		

b) Imaginá que las mismas figuras se hubieran hecho sobre un papel tramado con cuadrados de 2 cm de lado. Dibujá esas nuevas figuras. ¿Creés que el área y el perímetro resultan el doble de los que figuran en el cuadro de la consigna a? Anotá en tu carpeta qué te parece y comentáselo a tus compañeros.

c) Calculá las áreas en cm² y los perímetros en cm de las figuras que dibujaste en la consigna b. Con los resultados de los cálculos construí una tabla como la anterior y comprobá si tu predicción resultó cierta.

d) Averiguá ahora cómo varían el área y el perímetro de las figuras si se las dibuja en papel tramado con cuadrados de 3 cm de lado, y luego, de 4 cm de lado. Hacé los cálculos y anotá los resultados en una tabla. Compartí tus conclusiones con las de tus compañeros.



Consultá con tu docente cómo organizar la realización del siguiente punto, si no es posible trabajar con otros compañeros.



e) Reunite con otros compañeros y distribuyan las figuras A, B, C, D y E de la página anterior. Cada uno deberá completar dos tablas como las siguientes para cada una de las figuras que le toque.

Lado del cuadrado de la trama en cm	Área de la figura en cm ²
1	
2	
3	
4	

Lado del cuadrado de la trama en cm	Perímetro de la figura en cm
1	
2	
3	
4	



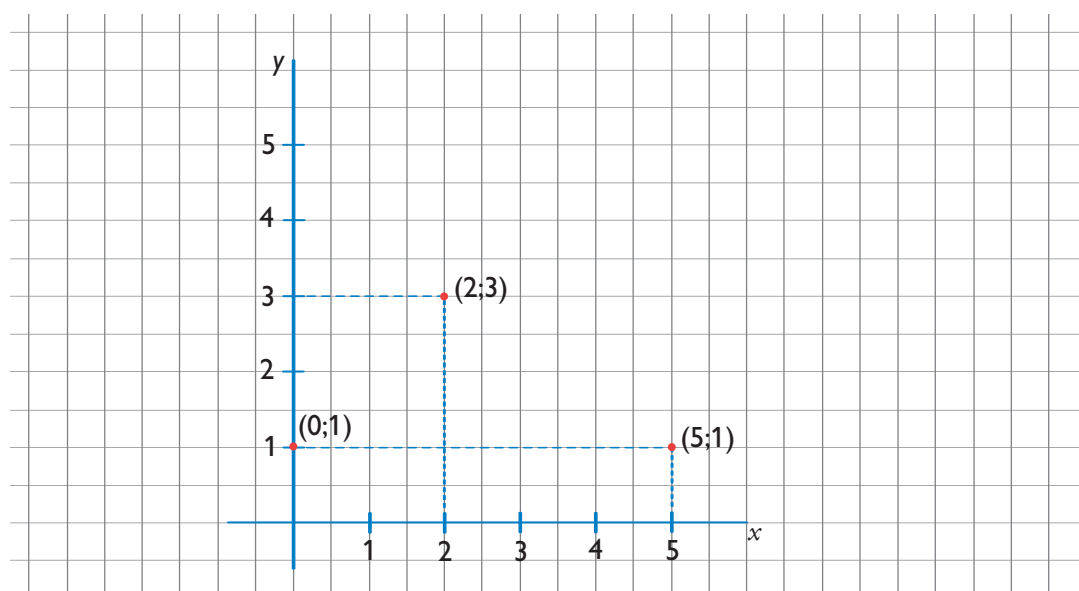
Como recordarás, los datos reunidos en tablas como estas también pueden representarse mediante **gráficos cartesianos**. Seguramente ya tuviste oportunidad de observar que estos gráficos se construyen de la siguiente manera.

1. Se trazan dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto considerado 0 u origen. El eje vertical se denomina **y** o **eje de ordenadas**, y el horizontal es el **x** o **eje de abscisas**.

2. Sobre ellos se marcan graduaciones con valores numéricos ordenados de manera que aumentan hacia la derecha en **x** y hacia arriba en **y**, partiendo del punto 0. Así se pueden encontrar puntos en el plano por la asociación de un par ordenado de puntos, como los pares que surgen de las tablas anteriores.

• Recordá que los números de la primera columna en la tabla son las abscisas y se representan sobre el eje **x**. Los de la segunda son las ordenadas y se representan sobre el eje **y**.

f) Tomá los datos de cada tabla que completaste en el punto anterior y representá los puntos correspondientes en un gráfico cartesiano. Recordá hacerlo sobre papel cuadrulado; podés orientarte por la siguiente figura.



g) Reúnan todos los gráficos que hicieron a partir de las cinco figuras. Sepárenlos en dos grupos: los que tienen puntos que pertenecen a una línea recta y los que tienen puntos que pertenecen a una misma línea curva.

1. Observen los gráficos y respondan las preguntas.

¿Pueden asegurar que los gráficos de algún grupo representan correspondencias directamente proporcionales? ¿E inversamente proporcionales? ¿Y no proporcionales? Justifiquen las respuestas.

2. Escriban en sus carpetas cómo varían las áreas y los perímetros de las figuras cuando se duplica, triplica y cuadruplica la longitud del lado del cuadrado de la trama sobre la que se dibujan las figuras.

En la actividad siguiente vas a analizar las producciones que acabás de realizar y a reconocer dos elementos que te servirán para identificar tipos de correspondencias: las imágenes y el dominio.


 UNIDAD 15


 A

2. Imágenes y dominio de una correspondencia

En varias oportunidades has usado las palabras “correspondencia” y “corresponde”.

Toda tabla que asocie valores de una cierta clase a valores de otra clase o de la misma, establece dos correspondencias: una que se lee de izquierda a derecha y otra que se lee en sentido contrario.

En la tabla de la actividad **a** de la página 174, la correspondencia 1, de izquierda a derecha, asocia los perímetros a las áreas, y la correspondencia 2, inversa, de derecha a izquierda, asocia las áreas a los perímetros. Ambas correspondencias también se pueden mostrar mediante pares ordenados de números y, a su vez, esos pares se pueden representar en gráficos cartesianos.

- a)** Elegí una de esas correspondencias y expresá con palabras qué pares de elementos se corresponden.
- b)** Escribilos como pares ordenados de la forma $(x; y)$. Por ejemplo, en la figura **a** el par $(x; y)$ sería $(20;24)$.



Cuando un valor de y corresponde a un valor de x , se dice que ese valor de y es una **imagen** del valor de x .

Por ejemplo, en la correspondencia 1 (en símbolos $C1$), los valores 20 y 28 son imágenes de 13; 20 es imagen de 24.

El conjunto de las imágenes de $C1$ se escribe, en símbolos, $I_{C1} = \{ 20, 28, 10, 8 \}$

- c)** ¿Cuál es la imagen de 24 en la correspondencia 1?
- ¿De qué valores es imagen 4 en la correspondencia 2?
- d)** Escribí todos los pares de la correspondencia 2 entre los perímetros y las áreas de las figuras y respondé las preguntas.
1. ¿Cuántas imágenes tiene 8 en esa correspondencia?
 2. ¿Cuántas imágenes tiene 20?
 3. Representá la correspondencia 2 en un gráfico cartesiano y observá cómo se ubican los puntos que representan dos áreas correspondientes a un mismo perímetro.



Se llama **dominio** de una correspondencia al conjunto de valores que toma la variable x .
 Por ejemplo: cada correspondencia de la consigna **a** tiene un dominio que se puede enunciar explícitamente: el dominio de la correspondencia 1 es el conjunto formado por 4, 13, 24.
 En símbolos: $D_{C1} = \{4, 13, 24\}$

e) Escribí en símbolos el dominio de la correspondencia 2.

f) Elegí dos de las tablas que construiste el punto **a** de la actividad **1**, indicá el dominio de cada una y escribí como pares ordenados los pares de valores que se corresponden.

Como viste, existen diferentes tipos de correspondencias. En la siguiente actividad vas a usar estos dos elementos: dominio e imagen para caracterizar un tipo especial de correspondencias: las **funciones**.



3. ¿Qué correspondencias son funciones?

a) Copiá en tu carpeta las tablas de estas cuatro correspondencias y escribí el dominio y el conjunto de imágenes de cada una.

A		B		C		D	
x	y	x	y	x	y	x	y
1	4	6	40	6	8	1	2
3	6	8	30	7	8	2	3
5	8	8	20	8	8	3	5
6	9	10	10	9	8	4	2

b) Observá las tablas en cada correspondencia y respondé: ¿hay algún elemento del dominio con más de una imagen? Si es así, decí cuál es. ¿Hay algún elemento que es imagen de varios elementos del dominio? Si lo hubiera, indicá cuál es.

c) Revisá las correspondencias 1 y 2 de la actividad anterior.

1. ¿Hay alguna en la que se puede afirmar que “a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen”? Si es así, decí cuál es la correspondencia.
2. Si alguna de esas correspondencias no cumple la afirmación, decí en qué falla.



UNIDAD 15

d) Buscá en tu carpeta las representaciones en coordenadas cartesianas de las correspondencias de la actividad 1 y observá cómo se puede reconocer en un gráfico de correspondencias cada una de las siguientes propiedades:

1. A cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen.
2. A algún elemento del dominio le corresponde más de una imagen.

e) Escribí tus observaciones y leé la siguiente definición de función.



Una correspondencia es una **función** si el dominio es un conjunto formado por determinados elementos y cada elemento del dominio tiene una y solo una imagen.

f) Hacé una lista de las correspondencias que viste en esta unidad y escribí a su lado **SÍ** o **NO**, según sean funciones o no. Justificá las respuestas.

En Matemática, las funciones que más interesan son aquellas que a cada número de un conjunto numérico le hacen corresponder otro número. Por ejemplo la función “doble de”, le hace corresponder a cada número natural otro número también natural. Las funciones numéricas pueden expresarse mediante fórmulas y esto es lo que verás en la siguiente actividad.



En la siguiente actividad vas a tener que construir polígonos. Si no te acordás cómo se hace, consultá con tu docente. Decidí con él si vas a revisar las unidades de Geometría o buscar el procedimiento en un libro de Matemática.



4. Funciones definidas por fórmulas

a) Recordá que un polígono es regular cuando todos sus lados y sus ángulos son congruentes. Por ejemplo, los triángulos equiláteros y los cuadrados son polígonos regulares. Dibujá en tu carpeta polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 8 lados, y luego realizá lo que indican las consignas.

1. Imaginá que cada lado de esos polígonos mide 2 cm y completá la tabla siguiente.

Número de lados del polígono	Perímetro
3	
4	
5	
6	
8	

2. Explicá con tus palabras cómo le dirías a un compañero qué cálculos tiene que hacer para averiguar el perímetro de cualquiera de estos polígonos regulares de 2 cm de lado. Escribilo en tu carpeta.

3. Expresá esas instrucciones en lenguaje simbólico mediante una fórmula. Usá la letra p para el perímetro, y n para indicar “número de lados del polígono”. Recordá que una **fórmula** es una igualdad escrita en lenguaje simbólico como una expresión de relación entre variables.

b) Completá una tabla como la siguiente para comprobar que la fórmula que escribiste en el punto anterior se verifica para cualquier polígono regular de 2 cm de lado. Revisá tus respuestas a las preguntas anteriores y, si es necesario, modificalas.

Número de lados del polígono	Perímetro en cm	Cálculos
3	6	$2 \cdot 3$
4	8	
5	10	
6		
7		
8		
10		
15		
20		
n		

1. ¿Esta correspondencia entre el perímetro de un polígono y el número de sus lados es una función? ¿Por qué?

c) Leé esta información acerca de algunas ideas sobre las que estuviste trabajando y comprobá si la fórmula se verifica para el caso anterior de los polígonos.

En esta familia de polígonos regulares de lado 2 cm podemos afirmar que el perímetro es función del número de lados. Como la cantidad de lados de una figura es un número natural mayor o igual que 3, el dominio de esta función es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 3.

Las imágenes se obtienen multiplicando los valores del dominio por 2; ellas también son números naturales.

En este caso podemos indicar esta función con una fórmula : $p = n \cdot 2 = 2n$

d) En el ejemplo anterior, la longitud elegida para el lado de los polígonos ha sido 2 cm; ¿qué ocurre si la medida de los lados de los polígonos es 4,5 cm?

1. Analizá la función, con dominio en el conjunto de los naturales, que relaciona el número de lados de un polígono regular con su perímetro.

2. Anotá la fórmula e indicá si sus imágenes son siempre números naturales.

3. Construí una tabla en la que aparezca, en la columna de la izquierda, el número de lados de los polígonos, y en la derecha, el perímetro, expresado en cm.

4. Representá gráficamente la función en un sistema de ejes coordenados y observá la posición de los puntos obtenidos. Escribí tu conclusión.



UNIDAD 15

En la actividad final de esta unidad vas a aplicar a otros casos de correspondencias lo que estudiaste sobre las características de las funciones. Te va a servir para revisar los elementos de las funciones y la manera simbólica de representarlas, y vas a comprobar que podés identificarlas con lo que sabés sobre ellas.



5. Algo más sobre funciones



a) Si es posible, trabajá con uno o más compañeros, y con la ayuda de tu docente busquen ejemplos de correspondencias de proporcionalidad directa e inversa. Por ejemplo, el número de kilogramos de un producto y el precio al que se vende (manteniendo el mismo precio unitario), el número de latas de pintura que hay que comprar para cubrir una misma superficie y la cantidad de litros que tiene cada lata. También pueden encontrar numerosos ejemplos revisando las unidades anteriores. A continuación, realizá lo siguiente.

1. Escribí en tu carpeta cada una de las correspondencias que pensaste.

- Hacé tablas dando valores a la variable independiente y calculá los valores que le corresponden como imágenes.
- Determiná si son funciones o no. Justificá tus respuestas.
- En el caso en que lo sean, indicá el dominio y el conjunto imagen.
- Representá en un gráfico cartesiano cada función y explicá qué particularidades tienen esas gráficas.
- Indicá con palabras y símbolos, es decir, mediante una fórmula, las funciones encontradas.

2. La correspondencia que a cada número racional le hace corresponder su opuesto ¿es función con dominio en el conjunto de los números racionales? ¿Por qué?

3. Observá las siguientes fórmulas:

- $y = x + 1$
- $y = 2x - 1$
- $y = 4x + 4$

Cada una de estas fórmulas establece una correspondencia entre valores enteros; ¿son funciones? Si lo son, ¿cuál es el dominio? Representá las correspondencias en gráficos cartesianos.

b) Escribí tus conclusiones y compartilas con los demás compañeros.

Para finalizar

En esta unidad viste que hay correspondencias que son funciones siempre que cumplan con ciertas condiciones. Las funciones se expresan mediante fórmulas que indican la relación que hay entre las variables, según el dominio elegido. Estas funciones las encontrarás no sólo en la vida cotidiana sino también en otras ciencias como, por ejemplo, Física o Economía.

El método cartesiano que te facilitó el análisis de las variaciones entre cantidades fue ideado en el siglo XVIII por René Descartes. Sus ideas vincularon por primera vez la Geometría con fórmulas y ecuaciones, dando inicio a una época muy importante para el desarrollo de la Matemática. Desde entonces, para resolver un problema geométrico es posible analizar gráficos cartesianos y aplicar fórmulas. Si la respuesta es numérica, se la puede interpretar gráficamente, y si la solución se obtuvo a partir de un gráfico, la respuesta se puede expresar numéricamente.

Entre los problemas que se pueden resolver de este modo están los que se plantean usando este tipo especial de correspondencias que son las funciones.

Como siempre, aquí encontrarás problemas matemáticos interesantes. Esta vez, entre ellos fabricarás la famosa cinta de Moebius y harás una comprobación sorprendente, que aún sigue apasionando a matemáticos y físicos.

UNIDAD 15

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

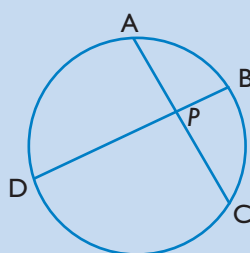
1. Proporcionalidad en la circunferencia

Si dos cuerdas de una circunferencia se interceptan en un punto P , el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

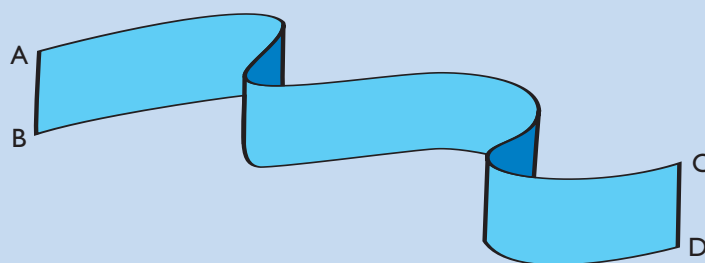
¿Esa afirmación es siempre cierta? Justificá tu respuesta.

Escribí la relación en forma de proporción.

**2. La cinta de Moebius**

Para construir esta cinta necesitarás una tira de papel de aproximadamente 7 cm por 30 cm. Lo importante es que la cinta que elijas sea un rectángulo largo y angosto.

Pintá las caras de la cinta con dos colores diferentes. Llamá con A, B, C y D las esquinas de la cinta, como se ve en la figura.



Uní los extremos de la cinta de manera que la esquina A quede unida a la esquina D y la esquina B, a la C. Para lograr esto, antes de unir los extremos deberás darle media vuelta a la cinta.



Con un color trazá un camino que vaya por el centro de la cinta.

Una cinta común tiene claramente dos caras y dos orillas. ¿Qué pasa con la de Moebius? Recorré lentamente el borde y verás que, sin levantar el dedo, podés recorrerla toda de una sola vez. ¿Qué te sorprende? En efecto, la cinta de Moebius tiene una sola cara y una sola orilla.

Ahora recortala siguiendo el camino que dibujaste. ¿Qué ocurre? Así es, has obtenido otra parecida a la que tenías, pero más larga.

Cortá la cinta por el centro, todo a lo largo. ¿Qué crees que sucederá? ¿Obtendrás una cinta parecida pero más larga? No, lo que ocurre no es lo que esperabas.

Intentalo otra vez: construí muchas cintas de Moebius y recortalas varias veces por su línea central. ¿Qué sucedió? ¿Cómo podrías explicarlo?

Un poco de historia

August Möbius o Moebius, nació en Alemania, en 1790 y murió en 1868.

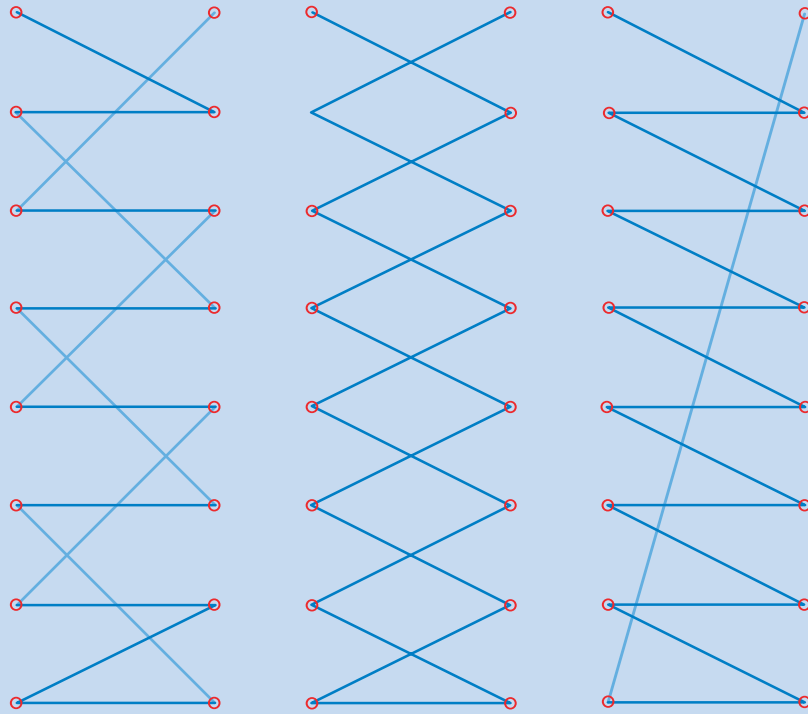
En 1816 comenzó a formar parte del cuerpo de profesores de la Universidad de Leipzig y a partir de entonces se fue convirtiendo en un importante matemático. Su nombre quedó ligado a varios objetos matemáticos de distinta especie, como la cinta de Möbius y la función de Möbius. Al igual que la mayoría de los científicos de su época, no se dedicó únicamente a la investigación en Matemática. Fue miembro del observatorio de Leipzig y a él se le encargó su remodelación, que duró de 1818 a 1821.

Tuvo un profundo interés por la topología, área de la Matemática en la que fue pionero y a la que dedicó muchos años. Particularmente hizo estudios muy serios sobre las propiedades de las superficies de una sola cara, que incluyen la famosa “cinta de Möbius”, descubierta por él en 1858.

UNIDAD 15

3. Los cordones de los zapatos

Existen múltiples maneras de anudarse los cordones de los zapatos. Entre estas podemos diferenciar tres: la manera europea, la manera americana y la manera en que los suelen anudar en las zapaterías.



¿Sabrías decir cuál de estas requiere los cordones más largos? ¿Te atreverías a conjeturar cuál, de entre todas las maneras posibles de anudarse los cordones, es la que necesita los cordones menos largos?