Unidad 14 Álgebra (II). Ecuaciones de primer grado e identidades

En la unidad 13 comenzaste tu estudio del Álgebra a través de considerar qué es una variable y qué, una incógnita. También tuviste oportunidad de reconocer ecuaciones e inecuaciones –igualdades y desigualdades algebraicas–. Viste también que son herramientas especialmente útiles en la resolución de problemas en los que se puede aplicar una fórmula general a situaciones particulares, como en muchos cálculos geométricos que ya conocés, por ejemplo cálculos de perímetros y áreas.

En esta unidad continuarás ampliando tus conocimientos sobre temas de Álgebra trabajando con ecuaciones y unas igualdades muy especiales que se cumplen para cualquier valor de las variables y por eso se las denomina identidades.

TEMA 1: ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En las actividades de este tema abordarás algunos problemas que se pueden expresar simbólicamente mediante ecuaciones que contienen una sola incógnita. Si esa incógnita tiene exponente 1, como en las ecuaciones que vas a resolver en esta parte de la unidad, se dice que la ecuación es de primer grado.

A 1. Cálculos mágicos

a) A continuación vas a leer una situación que describe un juego realizado en un aula entre los alumnos y su maestro. Está presentada en dos etapas. Resolvé las consignas de cada etapa, y así podrás desarrollar el juego en tu aula. Probálo con algún compañero de otro año. Acordá con tus compañeros de año para que todos puedan probar el juego con diferentes personas.

1. Aníbal le propuso a otro compañero que piense un número menor que 50 y lo escriba en un papelito sin mostrárselo a él porque lo iba a adivinar. Le dio las siguientes órdenes para que hiciera cálculos mentales sin decir los resultados hasta que él se lo indicara:

- Sumale 10.
- Multiplicá por 3.
- Restá 6.
- Dividí por 3.
- Restá 6.
- Ahora decime, ¿qué número te dio?

Aníbal le restó 2 a ese número y, en efecto, acertó.

2. El maestro pidió a los chicos que explicaran el truco, y Aurora lo hizo por escrito, escribiendo ecuaciones:

Pensá un número	x
Sumále 10	$x + 10$
Multiplicá por 3	$3 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x + 30$
Restá 6	$3 \cdot x + 30 - 6 = 3 \cdot x + 24$
Dividí por 3	$\frac{3x+24}{3} = x + 8$
Restá 6	$x + 8 - 6 = x + 2$
¿qué número te dio?	42
Si $x + 2$ es 42, entonces $x = 42 - 2$ y el número escrito es 40.	

• Copiá en tu carpeta la explicación de Aurora, analizála y respondé, ¿es correcta?, ¿por qué?

b) En el siguiente cuadro encontrarás una síntesis de los pasos seguidos para llegar a la solución de las ecuaciones con una sola incógnita, como las que escribió Aurora en su explicación del truco. A medida que vayas leyendo los pasos, marcálos en la explicación que copiaste.

• • • La incógnita

Se comienza por designar el número buscado con una letra que puede ser *x, y, z* o la que uno quiera elegir. Esa letra es la incógnita del problema.

• • • La ecuación

Para plantear la ecuación hay que escribir una igualdad en la que esté comprendida la incógnita.

• • • La resolución

Para resolver la ecuación se la va transformando en ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas, hasta encontrar el valor (o los valores) de la incógnita. A este proceso se lo llama "despejar" la incógnita. Las soluciones de la ecuación son los valores de la incógnita.

• • • La verificación

En la ecuación planteada, se reemplaza la incógnita por el valor hallado.
Si se cumple la igualdad, la solución de la ecuación es la respuesta del problema.

1. Si tenés algún compañero con el que puedas trabajar, repitan el truco entre ustedes eligiendo otros números para las instrucciones y escriban en ecuaciones el procedimiento para llegar a la solución.

2. Preguntale a tu docente acerca de los textos que presentan problemas para resolver mediante ecuaciones con una sola incógnita. Seleccioná una situación y resolvela siguiendo los pasos propuestos. Mostrale al docente tu trabajo.

A 2. Del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico

En la actividad anterior viste el planteo de una situación en la que se necesita descubrir algo, y se expresa con los símbolos propios del lenguaje algebraico. No tenés que olvidar que al escribir una expresión simbólica hay que indicar qué es lo que significa cada letra: por ejemplo si la expresión "el triple de la cantidad de lápices que tengo en mi cartuchera" se simboliza por $3x$, el número de lápices es x.

a) Copiá las siguientes expresiones del lenguaje coloquial y traducílas al lenguaje algebraico.

1. El doble de un número m.

2. Un número a, más su doble.

3. El número d menos su mitad aumentada en 3,5.

4. El triple de un número x más 4.

5. El número anterior al número natural r.

6. El número siguiente al número natural r.

7. La suma de tres números naturales consecutivos.

8. La mitad de a más el doble de t.

9. El doble del resultado de sumar 3 al número s.

b) Los siguientes listados están desordenados. Copialos haciendo corresponder a cada expresión simbólica su enunciado verbal.

$(x + y)\,(x - y)$	El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.
$(x + y)^3$	El triple de la suma de 3 números.
$x + 15 = 2x$	El cuadrado de una suma.
$4x - 3$	La suma de dos números por su diferencia.
$3\,(x + y + z)$	El área de un cuadrado es el cuadrado del lado.
$(a + b)^2$	La suma de dos números cuadrados.
$\text{Área} = x^2$	El cuádruple de un número menos 3.
$a^2 + b^2$	El cubo de la suma de dos números.
$\text{Área} = \frac{1}{2}\, b \cdot h$	La edad actual de un persona que dentro de 15 años tendrá el doble.

A 3. ¿Todas las expresiones algebraicas son ecuaciones?

a) Muchas veces trabajás con enunciados o con igualdades en las que intervienen letras, pero eso no es suficiente para que sean ecuaciones. Copiá las siguientes expresiones o enunciados, analizálos y decidí cuáles son ecuaciones. Explicá por qué. Para hacerlo transformá primero los enunciados en expresiones algebraicas.

- $2\,(3x + 4y)$.
- $5\,(3b - 2) = 7(b + 2)$.
- La suma de un número con su mitad es 15.
- $12a + 15a - r$.
- Un número y su cuarta parte.
- Tengo 87 pesos y los gasto todos menos 17. ¿Cuántos me quedan?
- La base de un rectángulo es 5 cm mayor que su altura y su perímetro es 36 cm.
- Un bolígrafo cuesta 2 pesos más que un lápiz.
- $x = \frac{13}{18}$.
- $13 + 7 = 20$.
- $2\,(z - 1) = 0$.
- $a + b = b + a$.

b) ¿Qué podés decir acerca de las expresiones anteriores que no son ecuaciones?

A 4. Despejar la incógnita

En la actividad **6** de la unidad **13** aplicaste diferentes estrategias para transformar una ecuación en expresiones equivalentes cada vez más sencillas.

Cuando se trata de encontrar el valor de la incógnita *x*, hay que despejarla cuidando que los dos miembros de la igualdad no se desequilibren y sigan siendo efectivamente iguales. Para asegurar ese equilibrio es necesario proceder paso a paso, aplicando a ambos miembros de la igualdad las mismas transformaciones, como verás a continuación.

En esta oportunidad aplicarás dos procedimientos que ya usaste muchas veces para despejar la incógnita:

1. La reducción de términos, es decir hacer las sumas y restas en las que figura la incógnita.
2. La transposición de algún término o factor de un miembro a otro de una igualdad, como consecuencia de hacer una misma operación en los dos miembros de la igualdad.

Al operar con ecuaciones tené en cuenta que si escribís, por ejemplo, $30 + x = 35$ no estás tratando de sumar la *x* al 30, sino de encontrar cuándo esa suma, $30 + x$, toma el valor 35.

a) Trabajá en tu carpeta. Hallá el valor de *x* en las siguientes ecuaciones efectuando primero, si fuera posible, las sumas y restas indicadas. Recordá que cuando hay paréntesis primero se deben efectuar las operaciones que permitan quitarlos.

1. $7x - 3x = 5 + x + 4$

2. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x$

b) Para resolver una ecuación disponés de distintas opciones. Después de haber resuelto las ecuaciones planteadas en a), leé las siguiente síntesis del “paso a paso” de posibles registros de diferentes procedimientos de resolución y comparálos con los procedimientos que usaste. Si podés trabajar con un compañero hagan juntos esta comparación y corrijan lo que sea necesario.

1. Para resolver la ecuación $7x - 3x = 5 + x + 4$

Reducir términos al efectuar la resta y la suma	$7x - 3x = 4x$
$7x - 3x = 5 + x + 4$ equivale a	$4x = x + 9$
Transponer x por la operación inversa de la suma restando x en ambos miembros	$4x - x = x + 9 - x$
$4x = x + 9$ equivale a	$3x = 9$
Transponer x por la operación inversa de la multiplicación dividiendo ambos miembros por 3	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$
$3x = 9$ equivale a	$x = 3$

2. Para resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x$

Quitar paréntesis distribuyendo el factor $\frac{1}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2x$
Quitar denominadores multiplicando los dos miembros de la igualdad por el mismo múltiplo común de los denominadores:	$4\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) = 4 \times 2x$
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2x$ equivale a	$2x + x - 2 = 8x$
Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro miembro mediante la aplicación en ambos miembros de las operaciones inversas correspondientes	$2x - 8x + x - 2 + 2 = 8x - 8x + 2$
Realizar las operaciones y hallar el valor de *x*	$-5x = 2$ $\frac{-5x}{-5} = \frac{2}{-5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$

UNIDAD 14

Hasta aquí trabajaste fundamentalmente con ecuaciones de primer grado con una incógnita. Pero no todas las situaciones algebraicas se resuelven planteando el uso exclusivo de la incógnita x con el exponente 1. En el tema siguiente trabajarás con otros casos en los que se emplean otras potencias y más de una letra como variable.

TEMA 2: IDENTIDADES ALGEBRAICAS

A medida que realices las actividades de este tema descubrirás fórmulas algebraicas en las que se emplean letras para designar pares de números que cumplen la igualdad. En particular, las igualdades que se cumplen para cualquier par de números se llaman identidades.

A 5. Los cuadrados de lados *a, b* y *a + b*

El desarrollo de esta actividad te permitirá encontrar una relación matemática de gran importancia en la que las letras a y b representan algebraicamente las medidas de los lados de dos cuadrados.

a) Tomá, por ejemplo, 2 cm como valor de a y 5 cm como valor de b, dibujá y recortá:

1. un cuadrado de lado a.

2. un cuadrado de lado b.

3. un cuadrado de lado $a + b$.

b) Escribí sobre cada uno la medida de su respectiva área.

Seguramente habrás escrito: a^2 en el cuadrado de lado a, b^2 en el cuadrado de lado b y $(a + b)^2$ en el cuadrado de lado $a + b$.

c) Ubicá los cuadrados de lado a y de lado b dentro del cuadrado de lado $a + b$, de manera que un vértice de a^2 coincida con un vértice de $(a+ b)^2$ y un vértice de b^2 coincida con el vértice opuesto de $(a + b)^2$. Observá que los dos cuadrados más chicos solo tienen un vértice en común. Pegalos en tu carpeta en esa posición.

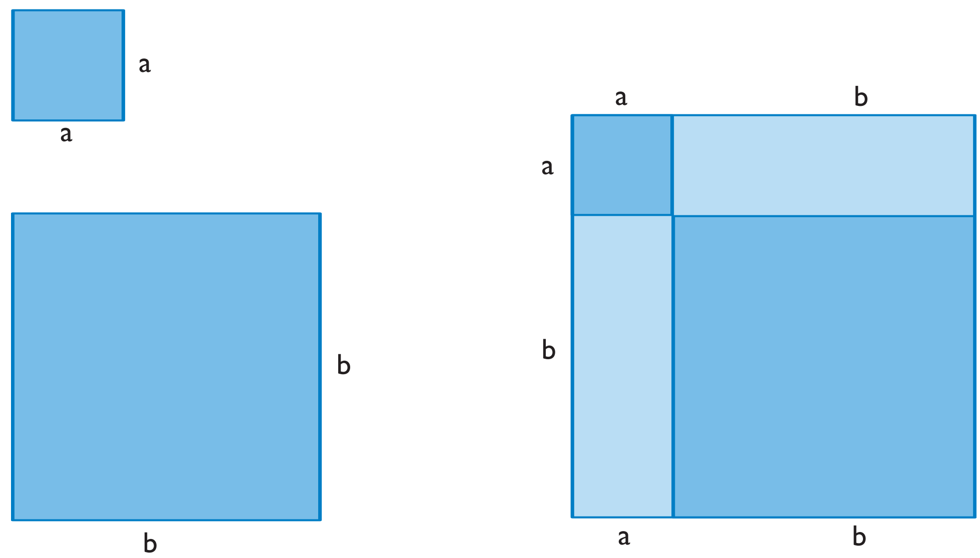
d) El cuadrado de lado $a + b$ está formado por cuatro figuras. Respondé usando las letras a y b para describirlas, ¿cuáles son cada una de esas figuras? Dibujalas y escribí sus nombres.

e) Expresá el área del cuadrado de lado $(a + b)$ de dos modos diferentes:

1. Mediante un cálculo numérico.

2. De modo geométrico, usando letras para nombrar las figuras.

• Como respuesta a la consigna **c** habrás hecho dibujos similares a estos.



• Como cálculo numérico habrás escrito alguna expresión equivalente a las siguientes:

$(2 + 5)^2 = 2^2 + 2(2 \times 5) + 5^2 = 4 + 20 + 25 = 49.$

f) Repetí la experiencia con otros pares de números.

Como experiencia geométrica que confirma los resultados aritméticos pudiste encontrar la fórmula que permite generalizar el procedimiento a cualquier par de números.

El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de tres términos: el cuadrado del primero, el doble del producto entre el primero y el segundo y el cuadrado del segundo.
En símbolos: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

A 6. El cuadrado de la diferencia

a) En esta actividad volverás a trabajar con dos números *a* y *b*, como medidas de los lados de dos cuadrados. Tomá, por ejemplo, $a = 5$ cm y $b = 2$ cm . Dibujá y recortá.

1. Un cuadrado de lado *a*.

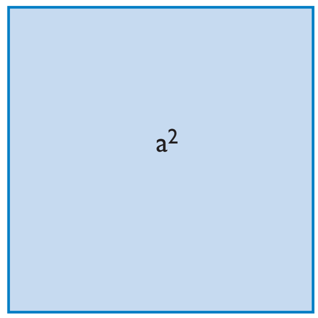
2. Un cuadrado de lado *b*.

3. Un cuadrado de lado $a - b$.

b) Escribí sobre cada uno la medida de su respectiva área y ubicá dentro del cuadrado de lado *a*, el cuadrado de lado *b* de modo que uno de los vértices de ambos coincida. Dibujálos en tu carpeta en esa posición.

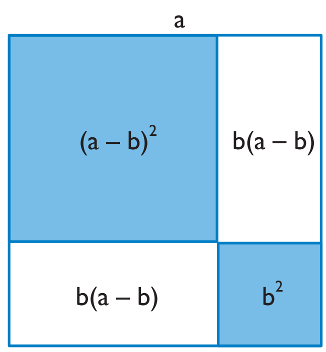
Seguramente habrás escrito: a^2 en el cuadrado de lado a, b^2 en el cuadrado de lado b y $(a - b)^2$ en el cuadrado de lado $a - b$.

c) En el cuadrado de lado a, que contiene al de lado b, trazá las prolongaciones de los lados de b^2, hasta que el cuadrado de lado a quede dividido en dos cuadrados y dos rectángulos. Para nombrarlos usá las letras a y b y anotá lo que corresponda sobre cada lado de los cuadrados y cada lado de los rectángulos.



d) Escribí sobre cada una de las cuatro figuras que componen el cuadrado de lado a, el área correspondiente.

Seguramente tus dibujos son similares a estos.



e) Observá la figura. Para obtener el área del cuadrado de lado $a - b$, ¿qué áreas se deben restar a la del cuadrado de lado a? Escribí las operaciones que permiten obtener $(a - b)^2$ a partir de a^2, b^2 y las áreas de los dos rectángulos $b \cdot (a - b)$. Tené en cuenta que si se efectúa el producto entre el largo y el ancho del rectángulo se obtiene el área $b \cdot (a - b)$ y por aplicación de la distributividad del producto, esta área se puede escribir también como $b \cdot a - b^2$.

f) Efectuá las operaciones necesarias para obtener una expresión de $(a - b)^2$ lo más simple posible.

Seguramente esta experiencia geométrica te permitió encontrar la fórmula que generaliza este procedimiento a cualquier par de números.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma del cuadrado del primero y el cuadrado del segundo menos el doble del producto entre el primero y el segundo.
En símbolos: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.$

Como habrás notado, para obtener el área $(a - b)^2$ hay que plantear que:

$(a - b)^2 = a^2 - (2ba - 2\,b^2) - b^2 = a^2 - 2ba + 2\,b^2 - b^2$ y por este camino geométrico se obtiene como resultado que $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$.

El camino algebraico consiste en el cálculo del cuadrado de la diferencia como una potencia de base $(a - b)$ y exponente 2. Es decir que $(a - b)^2 = (a - b)\,.\,(a - b)$ y distribuyendo ordenadamente los productos se obtiene $a^2 - a\,b - b\,a + b^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$.

g) Compará el resultado de estas operaciones algebraicas con el resultado que obtuviste por el camino geométrico, ¿qué observás? Proponé otros ejemplos numéricos para aplicar las igualdades anteriores y comprobar geométricamente los resultados.

A 7. La diferencia de dos cuadrados

En la actividad anterior aprendiste a calcular el cuadrado de la diferencia de dos números $(a - b)^2$. Ahora vas a restar dos números cuadrados $(a^2 - b^2)$.

¡Poné mucha atención! Se trata de dos problemas bien diferentes. En la actividad anterior restaste *a* y *b* para obtener el lado de un cuadrado, en cambio en este caso se trata de los cuadrados de dos números y restarlos.

¡No te confundas! los resultados de estos procedimientos son diferentes porque la potenciación no es una operación distributiva con respecto a la suma ni a la resta como ya viste la unidad **3**. Vas a trabajar primero con números y luego con figuras geométricas, para comparar los resultados de operar con dos números *a* y *b* de modo diferente.

Calcularás los cuadrados de *a* y de *b* y luego la diferencia entre esos cuadrados.

Para realizar este trabajo necesitás lápiz, papel cuadriculado y regla graduada. Aunque podés hacerlo sin calculadora, si disponés de una, podés usarla. Te va a facilitar las operaciones con números decimales para plantear mayor cantidad de ejemplos.

a) Copiá la siguiente tabla y completala. Trabajá con distintos pares de números racionales *a* y *b*, naturales y también decimales, proponiendo otros ejemplos.

a	b	a + b	a – b	(a + b) (a – b)	a^2	b^2	$a^2 - b^2$
5	2	7	3	21	25	4	21
0,5	0,3						
15	4,5						

b) Compará los resultados de la columna del producto $(a + b)\ (a – b)$ con los de la última donde está la diferencia de cuadrados $a^2 – b^2$. ¿Qué observás? ¿Ocurre lo mismo con cualquier par de números?

El objetivo de la parte que sigue de esta actividad es que verifiques mediante un procedimiento geométrico, lo que antes descubriste numéricamente en el cuadro del punto a). Vas a trabajar geométricamente con la igualdad: $a^2 – b^2 = (a + b)\ (a – b)$, para lo cual dibujarás dos segmentos a y b, por ejemplo, de longitudes a = 5 cm y b = 3 cm.

c) Representá el segmento suma $a + b$. ¿Cuánto mide?

d) Representá el segmento diferencia $a – b$. ¿Cuánto mide?

e) Recortá dos cuadrados de lados *a* y *b*. ¿Cuánto mide el área de cada uno?

f) Ubicá los cuadrados superponiéndolos de tal modo que coincida uno de sus vértices. El de lado *b* resulta interior al de lado *a*. Escribí junto a cada lado su medida según corresponda. Dibujá los cuadrados en esa posición y sombreá la figura que resulta de quitar al cuadrado de lado *a*, el cuadrado de lado *b*. Obtendrás una figura con forma de L.

g) Trazá la prolongación de un lado de b^2 hasta que la figura sombreada quede dividida en 2 rectángulos.

En el dibujo que hiciste siguiendo los pasos indicados, tendrás un cuadrado de lado a, dentro del cual hay un cuadrado de lado b, un rectángulo (R_1) de a x (a – b) y un rectángulo (R_2) de b . (a – b).

h) Expresá simbólicamente el área de la figura sombreada, comparála con lo que descubriste en la consigna b y redactá brevemente tus observaciones.

i) Si podés, reunite con otro compañero para comparar lo que escribieron y muéstrenle sus producciones al docente. Seguramente habrán llegado a una fórmula equivalente a la siguiente: $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a – b)$.

Lo que comprobaste en esta actividad se puede enunciar de esta manera:

La diferencia de los cuadrados de dos números a y b, se puede obtener multiplicando la suma de esos números por su diferencia.

j) Hacé con tus compañeros un afiche con los cálculos numéricos y los respectivos dibujos geométricos que ilustren las identidades algebraicas que aprendieron en este tema. No dejen de plantear ejemplos con números decimales. Si disponen de calculadora es conveniente que la usen para hacer los cálculos.

A 8. Fórmulas equivalentes

a) En la actividad **5** de la unidad **13** de álgebra trabajaste con una familia de rectángulos con lados relacionados. La base mide x y la altura $x + 2$. Obtuviste una fórmula para calcular el área de esta familia de rectángulos partiendo de un único dato: la longitud de su base. Respondé:

1. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas sirven para calcular el área de los rectángulos de esa familia? Si te hace falta dibujá algunos de esos rectángulos.

- $A = x\,(x + 2)$
- $A = x^2 + 2$
- $A = x^2 + 2\,x$
- $A = x\,.\,\mathrm{v} + 2$
- $A = 2\,x + \mathrm{v}\,.\,x$
- $A = x^2 + x + 2$
- $A = 2\,x + x^2$
- $A = 2\,x + x + 1$

b) Si obtuviste más de una respuesta correcta operá a partir de una de ellas con procedimientos algebraicos, haciendo los cálculos para llegar a la otra y comprobar que son expresiones equivalentes.

Consultá con tu docente acerca de tu trabajo en esta unidad y si es conveniente que consultes algún texto de matemática para resolver otras situaciones. En la próxima unidad dedicada a funciones profundizarás acerca de estos temas de álgebra.

Para finalizar

En esta segunda unidad dedicada al álgebra analizaste los posibles pasos a seguir para resolver una ecuación que tiene una única incógnita, comenzando por el planteo hasta llegar a la verificación. El trabajo algebraico sobre expresiones que vinculan números y letras –constantes y variables– permite operar con ellas para determinar los valores de las variables que verifican una igualdad.

Este tipo de trabajo cobra sentido cuando la expresión algebraica resulta de la formulación de un problema planteado en lenguaje coloquial y se la va transformando en otras expresiones equivalentes hasta despejar la incógnita.

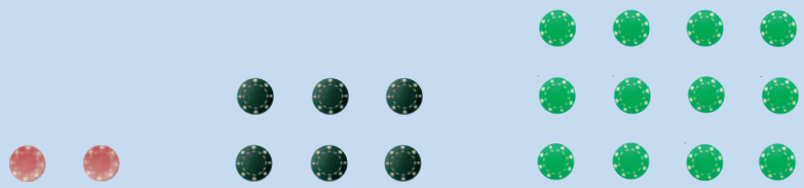
En particular en la primera parte trabajaste con ecuaciones de primer grado con una incógnita y en la segunda abordaste procedimientos geométricos para vincularlos con los caminos algebraicos en los que las letras representan las medidas de figuras. Este tipo de trabajo algebraico permite establecer relaciones de orden general que por cumplirse para todo par de números se denominan identidades. La potencia del álgebra se pone de manifiesto al tratar diversas situaciones que se comportan del mismo modo y pueden ser comunicadas mediante una misma expresión algebraica. Tal es el caso de las fórmulas que responden a procesos de generalización, por ejemplo el agrandamiento de figuras según determinado criterio.

En las unidades siguientes referidas al tratamiento de funciones aplicarás muchos de los conocimientos que adquiriste en esta unidad. Como siempre, los desafíos matemáticos que siguen te proponen situaciones interesantes, en este caso problemas curiosos para resolver mediante el Álgebra.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las fichas

Tenés una serie de disposiciones de fichas como las que te mostramos aquí:



Éstas son las primeras tres figuras. Encontrá una expresión para saber el número de fichas que tiene una figura según el lugar que ocupa en la serie. Continuá dibujando más arreglos de fichas de esta serie y hacé una tabla registrando los resultados.

¿Hay más de una fórmula que resuelva la situación? Si podés discutilo con tus compañeros y tu docente.

2. Pitágoras en acción

Esta es una propuesta de trabajo a partir del genial teorema de Pitágoras. En lugar de tomar la hipotenusa y cada cateto de un triángulo rectángulo para emplearlos como lados de cuadrados, repetí el procedimiento construyendo triángulos equiláteros en vez de cuadrados. Los tres triángulos equiláteros tienen que tener como lado, respectivamente, la hipotenusa y cada cateto del triángulo rectángulo. Entre las áreas de los triángulos, ¿se cumple la misma relación que con los cuadrados? O sea, ¿es verdad que: El área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre cada cateto?.

¿Qué pasará si tomás las longitudes de los catetos y la hipotenusa y las empleás como lados de otros polígonos regulares? ¿Podés probar con hexágonos y octógonos regulares? ¿Por qué?

3. ¿Qué es 365?

Todos saben que es el número de días del año pero también presenta otras particularidades. 365 se puede expresar como la suma de los cuadrados de tres números consecutivos y también como la suma de los cuadrados de los dos números siguientes a esa terna. ¿cuáles son esos números?