UNIDAD 13 Álgebra (I)

En unidades anteriores estudiaste fórmulas en las que se usan letras para simbolizar cantidades variables, como el perímetro de figuras o el largo y el ancho de rectángulos. Esas letras, a las que se denomina variables, tienen un papel muy importante en Matemática, porque facilitan la descripción de relaciones que se verifican en un tipo general de casos y, una vez obtenidas, pueden ser aplicadas a muy diferentes situaciones particulares. Es el caso, por ejemplo, de la fórmula para calcular el área del triángulo $\frac{b \cdot h}{2}$ en la que *b* y *h* pueden reemplazarse por las medidas de la base y la altura de cualquier triángulo del que se necesite medir la superficie. El Álgebra es la parte de la Matemática que se ocupa de estas expresiones simbólicas en las que intervienen letras con las que se puede operar como si fueran números. Estas expresiones se usan tanto en igualdades, llamadas ecuaciones, como en desigualdades llamadas inecuaciones, que estudiarás en esta unidad. También aprenderás a usar procedimientos del Álgebra como instrumento en la resolución de problemas.

TEMA 1: ECUACIONES E INECUACIONES

A

1. Las figuritas

a) Leé la siguiente situación y luego respondé en tu carpeta las preguntas que hay intercaladas en el relato.

Paula y Mariana coleccionan figuritas. Martín le preguntó a Paula cuántas figuritas tenía. La respuesta de Paula fue: “Con 6 más voy a tener cuatro veces lo que tiene Mariana”. Martín pensó un rato y razonó así: Si Paula tiene 2 figuritas, con 6 más son 8 y entonces Mariana tiene 2 figuritas. Pero si Mariana tuviera 5, Paula debería tener 14 figuritas.

1. ¿Es correcto el razonamiento de Martín?

2. Expresá con símbolos esa situación.

3. Comprobalo y escribí otro par de números que puedan dar solución al problema.

Martín resolvió hablar con Mariana, pero, para no olvidarse, y pensando que p es el número de figuritas de Paula y m el número de figuritas de Mariana, anotó: $p + 6 = 4 \cdot m$. Cuando se encontraron Mariana le dijo que tenía 10 figuritas. Miguel, que no sabía cuál era el problema, vio escrita la igualdad de Martín y pensó: “Si en lugar de p se pone 6, también hay que cambiar m, y para que la igualdad se cumpla, hay que poner 3”.

4. ¿Cuántas figuritas tiene, entonces, Paula?

5. Ensayá otra sustitución de p y averiguá cuál es la sustitución de m que corresponde para que la igualdad: $p + 6 = 4 \cdot m$ sea verdadera.

6. ¿Se puede poner cualquier número en lugar de p? Hacé una tabla y explorá distintos valores de p.

7. Los números que hacen verdadera la igualdad tienen una característica común; ¿cuál es?

En la siguiente actividad y en otras de esta unidad, vas a encontrar la explicación de un proceso en el cual se parte de una expresión y se recorre un camino en el que esa expresión se va transformando en algo equivalente. Aquí y cada vez que te enfrentes con este tipo de desarrollo, te conviene ir anotando los pasos sucesivos e ir haciendo los cálculos para entender qué sucede en cada paso y cómo se llega al resultado. Esto es muy importante cuando se trabaja con ecuaciones y también en las transformaciones geométricas o en distintos tipos de cálculos combinados.

A 2. Incógnitas y variables

En esta actividad se presentan los elementos que componen una ecuación; ellos te permitirán aproximarte al Álgebra.

a) Leé la siguiente información y tomá nota de todo lo que te parezca necesario para acordarte de qué es una incógnita y cómo se descubre.

• • • ¿Cómo se halla el valor de una incógnita?

La igualdad $p + 6 = 4 \cdot m$ que surgió en la actividad anterior es un ejemplo de una ecuación. Este nombre viene del verbo *æquare*, que en latín significa igualar.

La igualdad en la ecuación $p + 6 = 4 \cdot m$ no se cumple para cualquier número p y cualquier número m, sino sólo para algunos valores determinados (como pudiste observar en la actividad anterior). Lo mismo sucede en todas las ecuaciones: hay una incógnita, es decir una expresión cuyo valor numérico no se conoce y hay que descubrirlo. Cuando se lo encuentra, se reemplaza la incógnita por ese número y se resuelve la ecuación, como ya viste en el caso de las figuritas.

Generalmente se usa una letra x para representar al valor desconocido, pero también se pueden usar otras letras, como las letras p y m en el caso anterior. Para hallar el valor de una incógnita se hacen las operaciones inversas de las que permitieron llegar al resultado.

Cuando en una ecuación hay varias operaciones, para hallar la incógnita hay que aplicar las operaciones inversas respetando el "orden inverso", como si recorriéramos el mismo camino en sentido contrario. Por ejemplo, para hallar el valor de x en la ecuación $x \cdot 5 - 3 = 32$ y como el orden correcto de las operaciones es primero la multiplicación y después la resta, la expresión simbólica indica que, partiendo de x, hay que multiplicar por 5 y restar 3 para obtener como resultado 32. Entonces, para resolver la ecuación y encontrar el valor de x se parte de 32 y se aplica la operación inversa de la resta y después la inversa de la multiplicación, en ese orden. Vale decir que, partiendo de 32, sumamos 3 y al resultado lo dividimos por 5. Por lo tanto, $x = 7$.

Cuando es necesario indicar que las operaciones se resuelven en un orden distinto del que marcan los términos (indicados por los signos + o –) se usan paréntesis. Por ejemplo, la expresión $(x - 3) \cdot 5 = 45$ indica que primero se resuelve la operación dentro de los paréntesis y después se multiplica por 5; y para averiguar el valor de x, a 45 se lo divide por 5 y al resultado se le suma 3. Por lo tanto, $x = 12$.

Para verificar si el resultado es correcto basta reemplazar en la primera expresión a x por el valor obtenido y resolver el cálculo: $(12 - 3) \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$.

Las ecuaciones son igualdades en las que hay que descubrir un número, llamado ***incógnita****.*

b) Leé esta explicación sobre los elementos a los que se denomina variables y tomá nota de lo que te parezca necesario para acordarte de qué es una variable.

• • • Variables y valores

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos mayor (>) y menor (<) se llaman desigualdades, y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman **inecuaciones**.

En algunos casos se usan los signos mayor o igual ($\geq$) o menor o igual ($\leq$) para indicar que en esos casos, además de la desigualdad, también es válida la igualdad. En las inecuaciones, igual que en las ecuaciones, se usan letras para indicar las incógnitas o variables.

Cada letra representa una variable o sea que algunas veces puede tener más de un valor y representar más de un número. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 5 = 9$, el número 5 no varía, es una constante, pero la letra x puede valer +2 o bien –2 porque $(+2)^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$. En cambio, en la ecuación $x + 5 = 19$, al encontrar la solución $x = 14$ y reemplazar la x por 14, se cumple la igualdad $14 + 5 = 19$, y 14 es el único número posible.

c) Observá esta situación y resolvé las consignas.

En la inecuación $x \leq 3$, como se trata de encontrar los valores de x iguales o menores que 3, la letra x puede tener distintos valores.

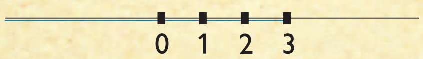
1. Escribí tres valores que satisfagan esa inecuación, es decir que al reemplazarlos se convierta en una expresión correcta.

2. Probá si los siguientes valores hacen verdadera la inecuación mencionada y justificá tus respuestas.

$2 \quad -3 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 5 \quad 22 \quad \frac{7}{2} \quad 1{,}5 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{12} \quad 3$

Una inecuación queda resuelta cuando se encuentra el o los números que puestos en reemplazo de una letra llamada incógnita hacen verdadera la expresión.

En este caso, seguramente encontraste que 22, $\frac{7}{2}$ y $\sqrt{12}$ no satisfacen la inecuación porque son números mayores que 3. Además de los valores que ya viste que satisfacen la inecuación, hay infinitos valores que también hacen verdadera esta desigualdad, pero como es imposible escribirlos todos, uno por uno, es útil representar las soluciones de las inecuaciones sobre una recta numérica. En la recta están presentes los infinitos puntos que corresponden a números racionales e irracionales y mediante ese recurso es posible representarlos a todos.



En la siguiente actividad podrás usar las notas que tomaste sobre inecuaciones e incógnitas.

A 3. La edad de Jimena

a) Copiá el siguiente problema en tu carpeta y revolvé las consignas.

Dentro de cinco años, Jimena será mayor de 18 años. ¿Qué edad tiene actualmente Jimena?

1. Planteá el problema en forma simbólica y luego realizá las operaciones correspondientes para hallar el valor de la incógnita.

2. Con los datos que tenés, ¿podés saber la edad actual de Jimena?

3. Compará lo que escribiste con la explicación que sigue y, si te parece necesario, reescribí tus respuestas.

Si la letra x representa la edad actual de Jimena, $x + 5$ es la edad de Jimena dentro de 5 años. Entonces, $x + 5 > 18$.

Resolver la inecuación significa partir de 18 para encontrar x. Se trata de despejar x como en el caso de las ecuaciones, para lo que se puede hacer la operación inversa de +5 que es –5 en ambos miembros de la desigualdad $x + 5 > 18$:

$x + 5 - 5 > 18 - 5$

$x > 18 - 5$

$x > 13$

Ahora se sabe que la edad de Jimena es mayor de 13 años.

La inecuación expresada en forma simbólica tiene como respuesta un número infinito de soluciones. Pero, de acuerdo con el problema que estamos resolviendo, por tratarse de una edad, de esas infinitas soluciones sólo se considerarán las que corresponden a números naturales.

Más adelante, al avanzar en tus conocimientos matemáticos, te enfrentarás a casos en los que, en lugar de hacer operaciones con números naturales, necesitarás operar con otra clase de números. En particular, en la actividad siguiente podrás aplicar lo que aprendiste sobre las distintas clases de números.

A 4. Las inecuaciones en la recta numérica

a) Leé la situación y revolvé las consignas.

En la quebrada del río Pinturas, en la provincia de Santa Cruz, está la Cueva de las Manos, en cuyas paredes y aleros se encuentran pinturas rupestres realizadas por los tehuelches. Esas pinturas han soportado el paso de siete, ocho o nueve mil años según los casos. Fueron descubiertas en 1941 por el padre salesiano Alberto de Agostini.

1. Copiá en tu carpeta la siguiente recta numérica que representa una línea histórica. Está graduada en milenios, o sea que cada unidad corresponde a 1000 años.

2. Marcá con un punto *D* la fecha del descubrimiento de las pinturas.

3. ¿Qué número en milenios corresponde a una pintura que al finalizar el segundo milenio tenía 7000 años de existencia? ¿Y una de 8000? ¿Y una de 9000 años?

4. Representá con puntos *P*, *Q* y *R* las fechas posibles de realización de esas pinturas rupestres. ¿Qué clase de números les corresponde?

5. Marcá con color, sobre la recta, la época de realización de esas pinturas.

6. Llamando x a cada punto, racional e irracional, de la recta que sustenta la línea histórica dibujada, ¿cómo podés escribir la relación que representa la época en que fueron realizadas esas pinturas rupestres?

7. ¿Cuál es la inecuación que representa la época posterior al descubrimiento de las pinturas?

8. Dibujá otras rectas numéricas para representar las siguientes inecuaciones:

$x < -1$ $\qquad$ $x + 3 > 0$ $\qquad$ $x - 2 < 2$ $\qquad$ $2x > 2$

A partir del tema **2**, vas a estudiar en qué procedimientos el Álgebra ayuda a resolver problemas matemáticos.

TEMA 2: EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO

A

5. Proceso de generalización

a) Respondé en tu carpeta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo de 3 m de base y 5 m de altura?; ¿y la de uno de 4 m por 6 m?; ¿y la de uno de 5 m por 7 m?; ¿y la de uno de lados de 8 m y 10 m?

2. La colección de rectángulos anterior tiene una característica común que es la relación entre sus lados a y b. Escribí simbólicamente esa relación.

3. Ahora dibujá uno de esos rectángulos y usá b como lado para dibujar un cuadrado dentro del rectángulo. Describí las dos figuras en las que ha quedado dividido el rectángulo.

4. Escribí el área de cada rectángulo expresada como la suma del área del cuadrado más el área de la otra figura.

5. Si llamás x a la base del rectángulo, ¿qué fórmula permite calcular la superficie total teniendo como único dato la medida x de la base? Esa fórmula ¿es válida para cualquier rectángulo de esta familia?

6. ¿Pensás que la fórmula que hallaste tiene una única expresión simbólica? Comparala con la de otro compañero y consultá con tu docente sobre los resultados.

El uso de letras para las variables del ejercicio te permitió realizar un procedimiento propio del Álgebra. Tomaste la característica común a todos los rectángulos cuya altura mide 2 unidades más que su base y la empleaste para lograr una fórmula de cálculo del área de cualquier elemento de esta familia de rectángulos, partiendo de su base como único dato. En este proceso de generalización dejaste de lado la medida específica de los lados, que es una característica particular de cada rectángulo de esta familia, y tampoco te fue necesario dibujarlos a todos ya que consideraste lo que les ocurre por pertenecer a esa familia y no lo referido a sus particularidades.

A

6. Expresiones algebraicas equivalentes

Desde hace mucho tiempo venís trabajando con el signo igual.

Ahora también aparece en las ecuaciones. Ese signo igual ya no es sólo la indicación que escribís cuando resolvés un cálculo, como $3 + 2 = 5$, sino que relaciona dos expresiones equivalentes, o sea que tienen el mismo significado. Para el mismo valor de una incógnita, las expresiones del primero y del segundo miembro de la igualdad son iguales porque tienen el mismo valor numérico, y eso debe suceder siempre.

Si escribís $20 + x = 25$ no estás tratando de sumar la x al 20, sino de encontrar cuándo esa suma, $20 + x$, toma el valor 25.

Cuando quieras despejar x para encontrar su valor, tenés que cuidar que siempre se mantenga el equilibrio entre los dos miembros de la igualdad. Para asegurar ese equilibrio es necesario proceder paso a paso, aplicando a ambos miembros de la igualdad las mismas transformaciones.

a) De la siguiente lista de ecuaciones, copiá en tu carpeta las equivalentes a $20 + x = 25$.

1. $25 - x = 20$	**6.** $20 + x - 25 = 0$
2. $18 + x = 23$	**7.** $20x = 25$
3. $x - 2 = 7$	**8.** $\frac{x}{5} = 1$
4. $x = 25 - 20$	**9.** $2x + 15 = 25$
5. $25 + x = 20$	**10.** $20 + x = 15$

b) Si en la consigna **a** contestaste que algunas son equivalentes a la ecuación propuesta, respondé:

1. ¿Qué transformaciones se hicieron en $20 + x = 25$ para llegar a ellas?

2. ¿Cuándo tuviste que emplear operaciones inversas para contestar? Escribí los ejemplos y cómo los resolviste.

c) Conversá con tu docente y con tus compañeros para ver si están de acuerdo con tus respuestas.

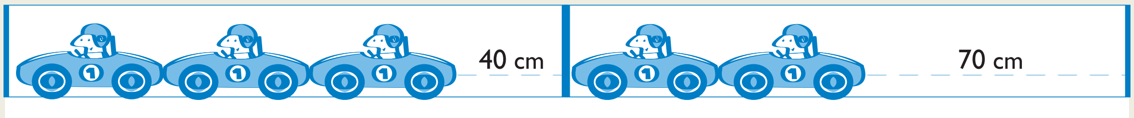
En la actividad siguiente aplicarás los conocimientos de Álgebra que ya lograste para resolver algunas situaciones. Volvé a mirar tus anotaciones en la carpeta o las explicaciones del cuaderno siempre que lo necesites.

A

7. Para resolver con ayuda del Álgebra

a) A continuación se presentan cuatro situaciones con consignas para realizar en cada una. Resolvelas en tu carpeta aclarando la letra y el nombre de la situación. Si podés, comentá con tus compañeros las respuestas que cada uno fue encontrando.

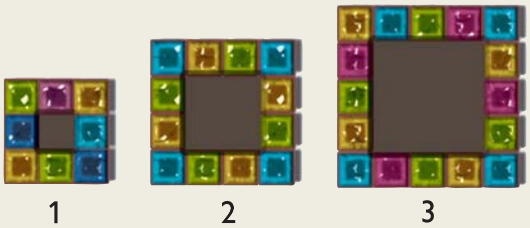
1. En dos sectores de una estantería hay guardados autos de juguete. Todos los autos son iguales. El sector izquierdo de la estantería mide lo mismo que el derecho.



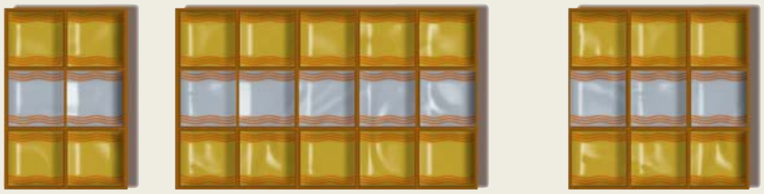
- Expresá con símbolos esta situación.
- Calculá, empleando la ecuación que escribiste, cuánto mide cada auto.
- ¿Cuál es el largo de cada sector de la estantería?

2. Los siguientes diseños corresponden a marcos hechos con placas cuadradas.

- Calculá la cantidad de cuadrados necesaria para dos diseños que le sigan en tamaño a estos primeros tres.
- Escribí una fórmula general para calcular el número de placas cuadradas que bordean el cuadrado central según el número de orden de la figura. (Sugerencia: llamá x al número de placas del marco y n al número de orden del diseño.)



3. Un comercio vende alfajores en cajas de distinto tamaño. Cada caja contiene los alfajores de dulce de leche envueltos con papel dorado, y los de fruta, con papel plateado, según lo muestran las tres cajas rectangulares que ves en la figura de abajo, siempre con tres filas en cada una.



- ¿Cómo podés expresar la relación entre la cantidad de alfajores de una y otra clase que hay en cada caja?
- Si sabés cuántos alfajores de dulce de leche hay en una caja, ¿podés decir cuántos hay de fruta y cuántos en la totalidad de la caja?
- Si sabés que una caja tiene 36 alfajores en total, ¿podés averiguar cuántos de cada clase contiene?

4. La suma de cuatro números consecutivos es 98; ¿cuáles son los números? (Ayuda: llamá x al primero, $x + 1$ al siguiente y así sucesivamente.)

Para finalizar

Vos mismo podés escribir el texto final de esta unidad. Para ello tendrás que revisar lo estudiado en cada tema. Desde las primeras actividades estuviste tomando nota a modo de síntesis para acordarte de las características de incógnitas y variables. También respondiste preguntas y anotaste conclusiones. Todos esos textos te servirán para escribir la síntesis. Procedé de la siguiente manera: escribí el título del tema y un breve texto sobre cada uno.

El texto que escribas te servirá para revisar lo que aprendiste cuando en la próxima unidad sigas trabajando sobre temas de Álgebra, en particular sobre las ecuaciones.

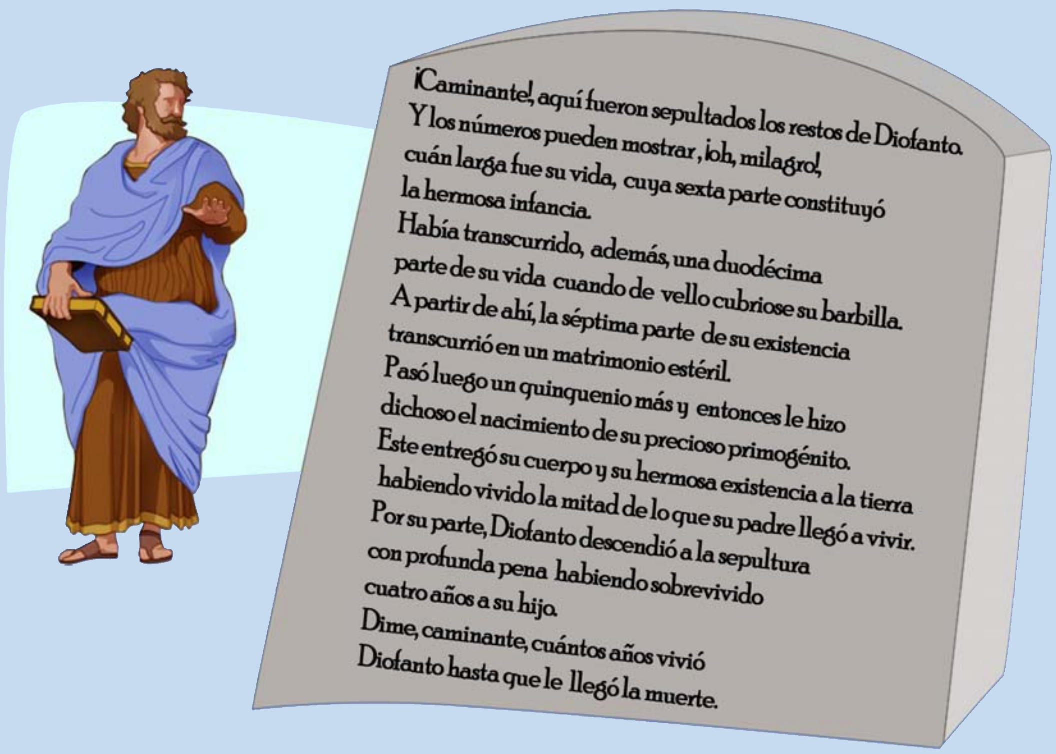
Los desafíos que aparecen a continuación te ofrecen una buena ocasión para que pienses situaciones de la vida cotidiana, algunas planteadas por matemáticos famosos, usando los elementos de Álgebra que acabás de aprender. También podrás utilizar los números que ya conocés.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El epitafio de Diofanto

Diofanto fue un matemático griego del siglo III que tuvo gran influencia entre los matemáticos árabes. Entre sus obras se conservan tratados sobre los números y seis de sus trece libros de Aritmética, que constituyen el primer tratado de álgebra griega. Es muy notable porque, en general, los matemáticos griegos de esa época estaban dedicados al estudio de la Geometría y no del Álgebra.

a) Leé atentamente y tratá de resolver el problema planteado.



El desafío consiste en calcular los años que vivió Diofanto y los que vivió su hijo.

2. Pirámides numéricas

Agregá una o dos filas más a estas curiosas pirámides.

$(0 \cdot 9) + 8 = 8$	$1^2 = 1$
$(9 \cdot 9) + 7 = 88$	$11^2 = 121$
$(98 \cdot 9) + 6 = 888$	$111^2 = 12321$
$(987 \cdot 9) + 5 = 8888$	$1111^2 = 1234321$
$(9876 \cdot 9) + 4 = 88888$	$11111^2 = 123454321$
$(98765 \cdot 9) + 3 = 888888$	$111111^2 = 12345654321$
	$1111111^2 = 1234567654321$

Seguramente, al efectuar las operaciones respetaste el orden indicado por los paréntesis. Si disponés de calculadora, explorá cómo se comporta la pirámide cuando un resultado tiene más de ocho cifras.

3. Cuadrados con números

¿Sabés que un cuadrado mágico es una disposición de igual número de filas y de columnas en cuyos cuadros se ubican números de modo que las sumas de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sean iguales?

En el mundo islámico, los cuadrados mágicos se desarrollaron en los siglos IX y X hasta que alcanzaron su apogeo en el siglo XII. Los cuadrados mágicos llegaron a Europa en el siglo XIV en textos traducidos del árabe. Su denominación árabe original fue **disposición armoniosa de los números**.

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

a) Te presentamos un cuadrado mágico 4 x 4. Su número mágico es 34 y además posee otra propiedad: sumando 4 números que estén en casillas que formen un cuadrado también se obtiene la misma suma. Comprobalo.

b) Si trasladás la columna de la izquierda a la derecha, ¿se mantiene esa propiedad? ¿Ocurre lo mismo si movés una línea de abajo hacia arriba? ¿Por qué?

4. Un símbolo griego

Este signo está ligado a ciertas inscripciones de antiguos monumentos conmemorativos encontrados en Grecia, y funciona de algún modo como un sello o una firma. Resulta agradable descubrir que el símbolo, formado por un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia puede trazarse con una sola línea continua, sin volver a pasar por ninguna línea. Pero si nos permitimos pasar sobre algunas líneas todas las veces que deseemos, sin levantar el lápiz, con la menor cantidad posible de cambios de dirección en el trazo, la tarea se convierte en el mejor acertijo de este tipo que se haya inventado nunca.

El símbolo griego puede dibujarse con una sola línea contínua con trece cambios de dirección. Te desafiamos a que lo pruebes.