UNIDAD 12 Relaciones métricas

La naturaleza, el arte y las ciencias proporcionan oportunidades para la observación y la exploración de conceptos y patrones geométricos. Desde que iniciaste el *Cuaderno de estudio 1* y en lo que va del *Cuaderno de estudio 2* estudiaste algunas relaciones métricas características de las figuras y los cuerpos a partir de la medición de sus elementos: lados, diagonales, contornos rectos o curvos, ángulos, áreas, volúmenes, desplazamientos y distancias entre unos y otros. El estudio de esas relaciones métricas es parte de la geometría métrica, llamada así por su vinculación con los procesos de medida.

La medida de estas relaciones se expresa mediante un número constante. Por ejemplo, la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro está expresada por el número π (pi).

En esta unidad vas a trabajar con otras relaciones métricas, por ejemplo, las que expresan la suma de los ángulos de un polígono. Conocerás, además, una relación métrica definida entre las dimensiones, el largo y el ancho de los rectángulos de una familia de características peculiares. Esta relación es conocida desde la Antigüedad a tal punto que el número que corresponde a su valor se simboliza con una letra griega ϕ (se lee fi). Tanto ϕ como π pertenecen a una clase de números –los irracionales– cuyas características estudiarás.

En esta unidad vas a encontrar una serie de actividades referidas a las relaciones métricas entre distintas figuras geométricas. En cada actividad se desarrolla una relación métrica diferente que se obtiene siguiendo ciertos razonamientos con los que vas a tener que analizar elementos de figuras, compararlos, hacer cálculos y hallar e interpretar fórmulas que expresan esos cálculos en símbolos. Por eso, al finalizar cada una de las actividades, te conviene hacer una breve síntesis de la relación tratada y escribir las fórmulas y los conceptos que la definen. Organizá esas síntesis en una hoja aparte, para que puedas tenerlas cada vez que las necesites.

TEMA 1: RELACIONES MÉTRICAS EN POLÍGONOS

A 1. Ángulos interiores de un polígono

a) Dibujá en tu carpeta cinco polígonos no regulares de 4, 5, 6, 7 y 8 lados, respectivamente. En cada uno elegí un vértice y trazá desde él todas las diagonales posibles. Escribí al pie de cada figura cuántos triángulos se formaron.

b) Todos los polígonos se pueden descomponer en una suma de triángulos y, como ya conocés cuánto vale la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, copiá la tabla que sigue y completala con la suma de los ángulos interiores de un polígono según el número de sus lados.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos	Valor de la suma de los ángulos interiores
Triángulo	3	1	2 ángulos rectos
Cuadrilátero	4	2	4 ángulos rectos
Pentágono	5	3	
Hexágono	6		
Eptágono	7		
Octógono	9		

1. Como pudiste observar, la suma de los ángulos interiores de un polígono depende del número de triángulos en que se lo pueda descomponer, que a su vez depende del número de lados del polígono. Para calcularla, conviene pensar el problema respondiendo a las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- ¿En cuántos triángulos se puede descomponer?
- La suma de los ángulos interiores de un polígono ¿a cuántas veces el valor de dos ángulos rectos equivale?

2. Respondelas en tu carpeta.

Suma de los ángulos interiores de un polígono
Se puede generalizar esta regla a los polígonos de cualquier número de lados. La suma de los ángulos interiores de un polígono de **n** *lados =* (**n** – 2) · 180°, *donde la letra* **n** *representa la cantidad de lados del polígono.*

c) Calculá la amplitud de cada ángulo interior de un pentágono regular y de un decágono regular. Un ángulo interior del decágono ¿es el doble del ángulo interior del pentágono? ¿Por qué?

A 2. Ángulos exteriores de un triángulo

*En la unidad **6** del Cuaderno de estudio 1 se te propuso recortar y unir los ángulos de un triángulo para encontrar el valor de la suma de sus ángulos interiores. Si no lo recordás podés volver a comprobarlo, y verás que en cualquier triángulo esa suma es igual a 180°. Ahora vas a descubrir otras propiedades usando otros recursos matemáticos que ya conocés.*

a) Dibujá un triángulo cualquiera y prolongá los lados para que queden dibujados los ángulos exteriores. Poné las letras α (alfa), β (beta) y γ (gamma) a los ángulos interiores.

b) Observá que a cada ángulo interior de un triángulo le corresponden dos ángulos exteriores según se consideren las semirrectas opuestas a uno u otro lado del ángulo interior. Ponele la letra δ (delta) a uno de los ángulos exteriores a α.

c) Copiá en tu carpeta las siguientes expresiones completando los espacios en blanco.

- Por ser ángulos suplementarios, la suma de un ángulo interior y su adyacente es igual a...
  $\alpha + \delta = ...$ o sea $\alpha = 180° - ...$ (1)
- Además, como en todo triángulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y por eso $\alpha = 180° - (... + ...)$ (2)

d) Compará las expresiones anteriores y escribí el valor de δ.

El razonamiento que hiciste es válido para cualquier triángulo; por lo tanto, puede generalizarse enunciando:

En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

e) Resolvé los siguientes problemas usando la propiedad que acabás de comprobar.

1. Un ángulo exterior de un triángulo isósceles mide 120°; ¿cuánto miden sus ángulos interiores? ¿Cómo son sus lados?

2. En un triángulo isósceles, el ángulo opuesto a la base mide 48°. Calculá la amplitud de cada uno de los ángulos exteriores.

3. En un triángulo isósceles oblicuángulo, un ángulo mide 100°. Calculá la amplitud del ángulo formado por la bisectriz de un ángulo agudo y la bisectriz del correspondiente ángulo exterior.

4. Repetí la experiencia con el ángulo formado por la bisectriz del ángulo de 100° y la bisectriz correspondiente al ángulo exterior adyacente. ¿Te parece que ocurrirá lo mismo en cualquier clase de triángulo? Explicá tu respuesta.

3. Perímetro y área de cuadrados

a) Releé la consigna **c** de la actividad **1** de la unidad **3**, en la que trabajaste con el perímetro y el área de cuadrados y respondé al siguiente planteo.

El lado de un cuadrado mide 4 cm; calculá su perímetro y su área.

1. ¿Se puede decir que "los resultados son iguales"?

2. Explicá con tus palabras en qué se parecen y cuál es la diferencia. Si es necesario, ayudate con un dibujo.

b) Copiá una tabla de cuadrados como la que sigue, en la que ***n*** representa la medida del lado. Usá una calculadora para completarla y luego, observando los resultados, respondé a las preguntas que están al pie.

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	11	121	21	441	31	961
2	4	12		22		32	
3	9	13		23		33	
4	16	14		24		34	
5	25	15		25		35	
6		16		26		36	
7		17		27		37	
8		18		28		38	
9		19		29		39	
10		20		30		40	

1. Si se duplica el lado de un cuadrado, ¿se duplica también su perímetro?, ¿se duplica su área?

2. Usá papel cuadriculado y dibujá un cuadrado de 5 unidades de lado; ¿cuál es su área? Repetí la experiencia con un cuadrado de 6 unidades de lado; ¿cuál es su área? ¿Cuál es el área de un cuadrado de 5,5 unidades de lado?

3. ¿Entre qué números enteros está comprendida el área de un cuadrado de 8,25 cm de lado?

c) Resolvé la situación que se presenta a continuación.

El docente les pidió a sus alumnos que calculen el lado de un cuadrado cuya área es de 2 cm^2. Manuela se dio cuenta de que debía ser un número mayor que 1 y menor que 2. Probó con 1,5, lo multiplicó por sí mismo y obtuvo 2,25. Probó con 1,4 y obtuvo 1,96. Entonces se preguntó cómo encontrar un número que fuera a la vez mayor que 1,4 y menor que 1,5 y que al elevarlo al cuadrado diera 2.

1. Usá la calculadora para resolver el problema de Manuela, es decir encontrar un valor aproximado para $\sqrt{5}$: 1,4 < $\sqrt{5}$ < 1,5.

2. Usá el mismo procedimiento para encontrar una expresión aproximada de la raíz cuadrada de 3 con dos cifras después de la coma decimal.

La raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto no es un número racional (no se lo puede expresar con un decimal exacto ni periódico) y por eso recibe el nombre de **número irracional**.
Son ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}$, el número π. En cambio, $\sqrt{4}$; 2; $\sqrt{9}$; 3; 4; 0,5; –1,2; $\frac{1}{3}$; $0,\widehat{6}$ son números racionales.

d) Escribí otros dos ejemplos de números racionales que provengan del cálculo de raíces cuadradas y dos ejemplos que también provengan de raíces cuadradas y sean números irracionales. Compará tus ejemplos con los de otros compañeros y conversá sobre este tema con tu docente.

e) Respondé a cada una de las siguientes consignas. Copiá las dos tablas en tu carpeta.

1. En la fila superior de esta tabla está el perímetro, medido en centímetros, de diferentes cuadrados. Completala con las respectivas áreas.

Perímetro (cm)	22	40	30	32,4	82	108
Área (cm^2)		100				

• Los números de la tabla ¿son racionales o no? ¿Por qué?

2. En la fila superior está el área, en centímetros cuadrados, de diferentes cuadrados. Completala con la medida de los respectivos lados.

Área (cm^2)	16	100	49	36	81	4
Lado (cm)		10				

• Los números de la tabla ¿son racionales o no? ¿Por qué?

3. Conversá con tus compañeros y con tu docente sobre este trabajo.

TEMA 2: LA RELACIÓN ÁUREA

Tanto en la naturaleza como en el arte se ponen de manifiesto principios proporcionales muy interesantes. Uno de ellos es la relación métrica que se establece entre los lados de los rectángulos que se consideran con mejores proporciones. A esta relación se la conoce como número de oro, divina proporción, relación áurea o regla dorada. Si bien se la usó en la práctica desde la Antigüedad, sigue vigente hasta hoy entre arquitectos, diseñadores y artesanos.

A

4. Una relación métrica especial

En esta actividad trabajarás sobre una relación métrica identificada con otro número irracional: el **número de oro**.

a) Para empezar a ver de qué se trata esta relación, realizá la siguiente experiencia.

1. Dibujá en un papel un rectángulo de las dimensiones que prefieras, ni muy angosto ni exageradamente ancho. Si podés trabajar con otros compañeros, comparen los rectángulos que dibujaron. Si no tenés compañeros de tu año, pedile al tu docente y a otros chicos de la escuela que cada uno dibuje con regla un rectángulo que no sea ni muy angosto ni muy ancho.

2. Comparen todos los rectángulos dibujados; ¿les parecen que son rectángulos semejantes? Recórtenlos y péguenlos en un afiche para colgar en el aula. Midan lo necesario en cada rectángulo para averiguar la razón entre el lado mayor y el menor, y escríbanla en el afiche debajo de cada uno.

Te parecerá curioso observar que los rectángulos que a la mayoría de las personas nos parecen de “buena forma” son muy semejantes, vale decir que la razón entre el ancho y el largo es prácticamente la misma en todos. Casi siempre el lado menor es el 62% del lado mayor.

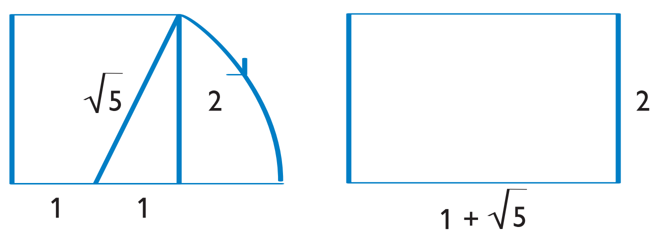
Te sorprenderá, también, saber que la mayoría de los documentos de identidad –DNI (Documento Nacional de Identidad), Cédula de Identidad, Registro de Conductor, Tarjetas de crédito o de débito emitidas por los bancos– tienen aproximadamente la misma forma y que, además, estas formas se encuentran en el formato de muchos libros.

Esta relación métrica entre los lados de los rectángulos de “buena forma” es conocida desde la Antigüedad y se la puede encontrar en la construcción de los templos griegos, como verás más adelante en esta unidad.

Conocedor de esta relación, un monje italiano, Fray Paciolo di Borgo, enunció en 1509 una fórmula matemática para obtener el número constante, razón característica de esta relación a la que Leonardo Da Vinci denominó Divina Proporción. El valor de esa razón constante es un número irracional denominado **número de oro** al que se simboliza con la letra griega ϕ (se lee fi) en homenaje al arquitecto Fidias que la puso en práctica en el diseño del Partenón (siglo V a.C.). Algo similar ocurrió con la relación métrica que ya estudiaste entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. También era conocida desde la Antigüedad, pero recién en 1796 un matemático inglés, William Jones, denominó a ese número irracional con la letra griega π (pi) por ser la inicial de “perisferia”.

En el punto siguiente vas a aprender cómo se calcula el número de oro ϕ.

b) Copiá en tu carpeta las siguientes figuras. Fijate que para dibujar el rectángulo tenés que hacer centro con el compás en el punto medio del lado del cuadrado y trazar el arco indicado con la flecha.



1. Observá tus dibujos y respondé las preguntas.

• ¿Qué relación permite afirmar que la hipotenusa del triángulo de los catetos 1 y 2 mide $\sqrt{5}$? Escribila.

• Escribí el cociente entre las medidas del lado mayor y el menor del rectángulo, llamalo ϕ ya que este cociente es el número de oro.

• Calculá el valor de ϕ con tres cifras decimales. Tené en cuenta que $\sqrt{5} \cong 2{,}236\ldots$ (el signo $\cong$ significa aproximadamente).

*Se denominan **rectángulos áureos** aquellos cuyos lados están en relación aproximada a 1,618, conocido como **número de oro** y simbolizado con la letra griega ϕ (se lee fi).*

c) En la unidad **9** aprendiste que para que dos figuras sean semejantes deben tener ángulos congruentes y lados proporcionales. ¿Todos los rectángulos áureos son semejantes entre sí? ¿Por qué?

d) Calculá el valor de $\frac{1}{\phi}$ con tres cifras decimales; escribilo.

e) Restá $\frac{1}{\phi}$ del valor de ϕ; ¿cuál es la diferencia?

Te sorprenderá saber que el número de oro es el único número cuyo inverso es él mismo disminuido en 1: $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$.

En efecto, $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{1{,}618} = 0{,}618$, es decir que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

A la vez $\frac{1}{1{,}618} = 1{,}618 = \phi$.

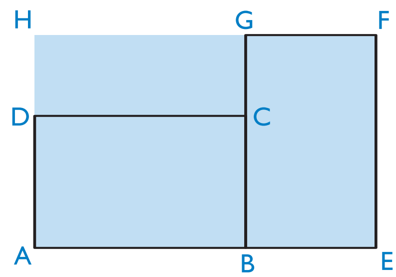
f) Comprobá estas relaciones usando la calculadora.

A 5. La división áurea de un segmento

En esta actividad verás una importante aplicación de la relación áurea que permite dividir un segmento en otros dos que guardan con él una curiosa relación de proporcionalidad.

a) Una propiedad interesante de los rectángulos áureos es que si se colocan dos rectángulos iguales, como en la figura que se muestra a continuación, se forma otro rectángulo más grande. Para ver si este nuevo rectángulo es o no áureo, seguí los siguientes pasos.

1. Copiá en tu carpeta esta figura. Los rectángulos ABCD y BEFG son áureos porque fueron dibujados en escala tomando como unidad el segmento AD.



2. Completá una tabla como esta con las medidas del lado mayor y el menor de cada uno de los rectángulos.

Rectángulo	Lado mayor Unidad AD	Lado menor Unidad AD	Razón lado mayor/lado menor
ABCD	1,618	1	1,618
BEFG			
AEFH			

3. Observá tu figura. El rectángulo *ABGH* ¿es un cuadrado? ¿Por qué?

4. Si agregás a la derecha de tu figura un rectángulo *EIJK* de las mismas dimensiones que *AEFH*, ¿qué relación tiene el rectángulo *AIJL* con los demás rectángulos dibujados? ¿Por qué? El rectángulo *AEKL* ¿es un cuadrado? ¿Por qué?

5. A partir de tus dibujos anteriores habrás podido observar que a cualquier rectángulo áureo se le puede añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado también es un rectángulo áureo. ¿Creés que si a un rectángulo áureo se le quita un cuadrado de lado igual al del lado menor del rectángulo la figura que resta es un rectángulo áureo? ¿Por qué?

Los dibujos que hiciste te ayudarán a descubrir otra relación métrica vinculada con el número de oro.

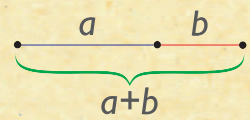
6. Observá nuevamente tu dibujo inicial y tené en cuenta que en él *AD* = *BC* = *BE*. Además, el segmento *AE* es la suma de *AB* y *BE*. El punto *B* divide el segmento *AE* en dos partes tales que sus respectivas medidas son 1,618 y 1; ¿cuál es la medida de *AE*? Calculá la razón entre las medidas de *AE* y *AB*, y la razón entre las medidas de *AB* y *BE*. Compará ambas razones; ¿qué resultado obtuviste?

Dado que todos los rectángulos áureos guardan la misma proporción entre sus lados se puede enunciar que:

En todos los rectángulos áureos la razón entre la suma de los dos lados y el lado mayor es la misma razón que existe entre sus lados.

En este caso: $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE}$ se ve que AB es el divisor en la primera razón y el dividendo de la segunda, por eso se dice que AB es medio proporcional entre la suma AE y el lado menor BE.

Dicho de otro modo, cuando la parte mayor AB de un segmento AE es medio proporcional entre el segmento total AE y la parte menor BE se dice que el punto B divide el segmento AE en **media y extrema razón**.

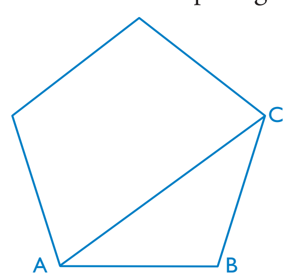


Para generalizar, si se llama $a+b$ al segmento total y constituye el segmento x, a es la parte mayor y b es la menor, se puede enunciar que si se verifica la siguiente proporción: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, entonces la parte mayor a recibe el nombre de **segmento áureo de** x.

A 6. El pentágono pitagórico y el Partenón

En esta actividad verás otra aplicación del número de oro en la construcción del pentágono regular.

Los griegos pitagóricos encontraron el número de oro al hallar la relación entre la diagonal de un pentágono y el lado.

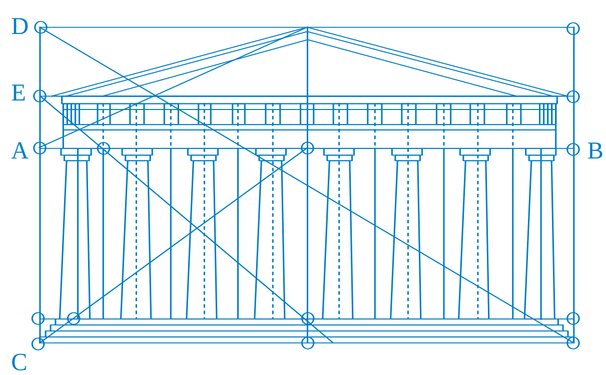


$$\frac{AC}{AB} = 1{,}618$$

Cuando llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros les pareció algo tan contrario a su lógica que lo llamaron número irracional. Este es el primer número irracional del que históricamente se tuvo conciencia.

Con posterioridad, los griegos consideraron que el rectángulo cuyos lados a y b estaban en la relación $\frac{a}{b} = \phi$ era especialmente armonioso y lo llamaron rectángulo de oro pues para ellos la armonía era considerada como una virtud.

• Un ejemplo de la aplicación práctica de la relación áurea se encuentra en el diseño del Partenón griego.



a) En la figura del Partenon podés comprobar midiendo con cuidado que $\frac{AB}{CD} = \phi$. Investigá la razón entre *CD* y *AC* y comparala con la razón entre *AC* y *AD*. El segmento *AC* ¿es el segmento áureo de *CD*? ¿Por qué?

b) Otra aplicación de esta relación descubierta por los pitagóricos es la que posibilita la construcción de un pentágono regular usando regla y compás. Construí un pentágono de 3 cm de lado aplicando la relación áurea. Explicá paso a paso cómo lo construís.

Para concluir la unidad leé unos versos que el poeta Rafael Alberti (1902-1999) dedicó a este tema.

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Para finalizar

En Geometría existe un gran número de relaciones métricas que fueron descubiertas y formuladas por los matemáticos a lo largo de la historia. Algunas han sido superadas a través de los tiempos y hoy solo conservan un valor histórico para los especialistas. Otras –como la relación pitagórica, el número π o el número ϕ– siguen vigentes porque son de imprescindible aplicación práctica y contribuyen al avance de la ciencia, la tecnología y el arte.

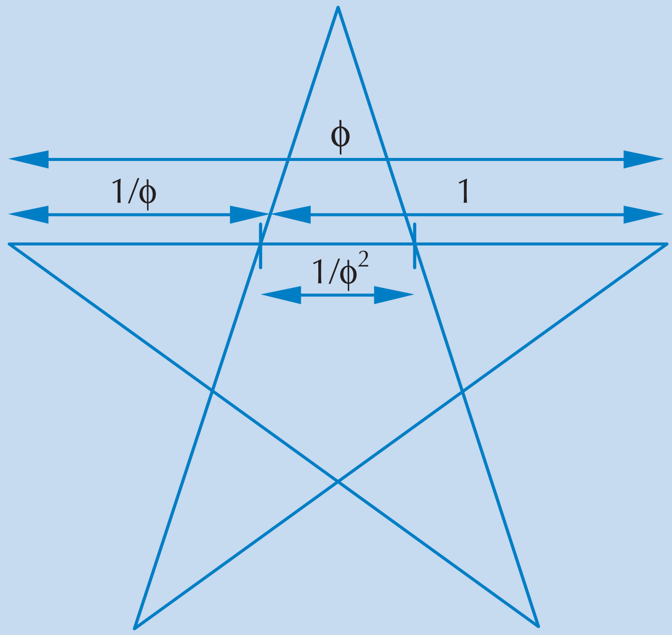
Revisá la hoja con las síntesis parciales que fuiste haciendo para ver si están claras y si no te olvidaste de algo importante. Por ejemplo, la revisión acerca de la naturaleza de los números irracionales que no se pueden expresar como cociente entre dos enteros. En las unidades siguientes, que se refieren a Álgebra y funciones, retomarás el estudio de muchas de las relaciones que analizaste en estas actividades.

A continuación, en los desafíos vas a encontrar problemas sobre el tema de la unidad, pero también algunos que te van a permitir revisar lo que sabés sobre proporcionalidad y volumen.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

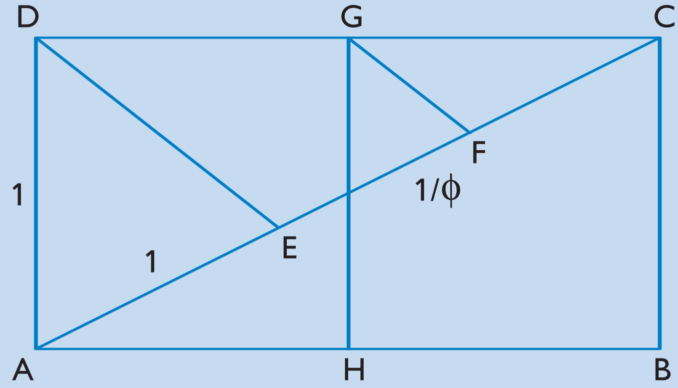
1. Estrella pitagórica

Los pitagóricos adoptaron como símbolo para reconocerse entre ellos el pentágono regular estrellado como el del dibujo. Su propiedad característica es que todos los segmentos están en relación áurea. Obsevá los datos de la figura y calculá la longitud de la diagonal del pentágono convexo que quedó formado en el centro.



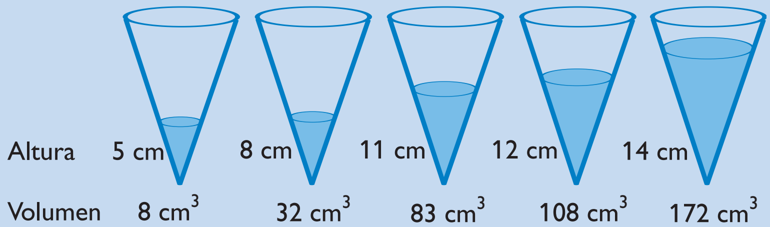
2. El número *m*

En la figura aparece una construcción geométrica con regla y compás del número *m*, valor que los griegos obtuvieron del inverso del número de oro. El desafío consiste en justificar razonadamente que $EF = m$.



3. Los vasos cónicos

Se vierten diferentes cantidades de agua en un vaso cónico. En cada vertido se mide la altura del agua y su volumen.



Teniendo en cuenta los datos de la figura, ¿podés responder si el volumen es directamente proporcional a la altura?

4. Un problema de tablas

De las siguientes tablas, ¿cuáles pueden pertenecer a una proporcionalidad directa?

2	7	3
3	10,5	2

3	4	–7
6	-8	14

4	12	10
3	9	7,5

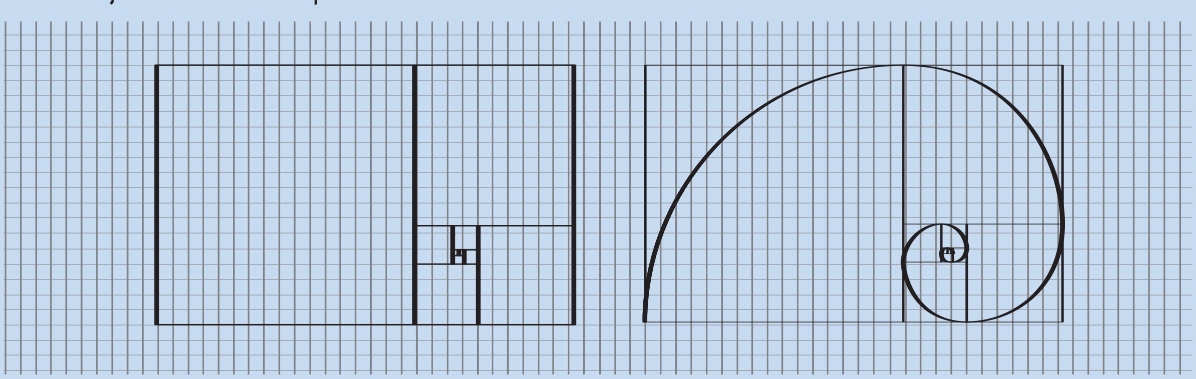
2	7	3
3	10,5	2

3	4	–7
6	–8	14

4	12	10
3	9	7,5

5. Construcción de la espiral

A cualquier rectángulo áureo se le puede restar por su lado menor o bien añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado sigue siendo un rectángulo áureo. Esta propiedad se ilustra frecuentemente con este dibujo similar a una espiral.



Para construirla usá una hoja de papel milimetrado. En el centro de la hoja dibujá un cuadrado de 1 cm de lado. Con el compás marcá un arco de un cuarto de circunferencia que tenga por radio el lado del cuadrado. Y seguí construyendo la espiral según el modelo hasta salirte de la hoja.