# Ondas

## Introducción a los fenómenos ondulatorios

Marc Figueras Atienza

PID_00159135

Universitat Oberta de Catalunya

# Índice

# Introducción

Este módulo está dedicado a las ondas, es decir, al movimiento ondulatorio. Seguramente todos tenéis una idea intuitiva de lo que es una onda y seguro que también habéis visto ondas en el agua y quizá habéis oído hablar de ondas sonoras o de ondas electromagnéticas.

Con lo que estudiaréis en este módulo podréis describir de manera mucho más precisa qué es una onda. Hallaréis una definición exacta de onda y descubriréis cómo se pueden describir matemáticamente. Veréis que las ondas se generan cuando se produce una perturbación y también de qué modo se pueden propagar.

El objetivo general es tener una visión global de los fenómenos ondulatorios, algunos de los cuales se tratarán con más detalle en módulos posteriores (las ondas acústicas en el módulo "Acústica" y las electromagnéticas en el resto de esta asignatura, con una parte concreta dedicada a la luz). El hecho de que todos los fenómenos ondulatorios se pueden describir de la misma manera, independientemente del caso particular que estemos considerando, es la idea fundamental que pretende establecer este módulo.

# Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante una vez trabajados los contenidos de este módulo son:

1. Saber qué es una onda y qué características definen el movimiento ondulatorio.
2. Conocer los diversos tipos de ondas y sus características definitorias.
3. Saber cómo se puede describir matemáticamente una onda.
4. Conocer e identificar la ecuación de ondas y poder obtenerla en algún caso particular.
5. Saber qué es una onda armónica y cómo se puede describir.
6. Poder identificar los parámetros básicos de cualquier onda armónica en diversas situaciones.
7. Saber qué sucede cuando se hallan dos o más ondas en un mismo punto y ver cómo se puede describir matemáticamente este hecho.
8. Saber qué les ocurre a las ondas cuando les imponemos condiciones de contorno.
9. Tener claro cuándo y cómo se producen los fenómenos de reflexión y refracción de ondas.
10. Saber qué pasa cuando el emisor de las ondas se halla en movimiento relativo respecto al observador.
11. Tener una idea cualitativa de los aspectos energéticos de las ondas, mediante los conceptos de energía e intensidad.
12. Saber cómo interaccionan las ondas cuando atraviesan medios materiales y qué fenómenos se pueden producir en tal caso.

# 1. Las ondas

En este primer apartado del módulo estudiaremos de manera general las ondas, el movimiento ondulatorio. Definiremos qué es una onda y veremos qué tipos diferentes de ondas podemos observar. Posteriormente, intentaremos hallar una descripción matemática de las ondas lo más general posible.

## 1.1. ¿Qué es una onda?

Todos hemos tirado alguna vez una piedra a un charco (y si no, ¡podéis probarlo ahora mismo!). ¿Qué pasa cuando hacemos esto? Cuando la piedra cae al agua, vemos que el agua alrededor del punto en que ha caído empieza a moverse arriba y abajo; después, el agua un poco más alejada, que antes estaba bien tranquila, también empieza a moverse arriba y abajo (véase la figura 1). De hecho, si nos fijamos bien, este movimiento arriba y abajo va llegando cada vez más lejos.

Figura 1. Ondas en la superficie del agua

Fuente: Wikimedia Commons; autor: Roger McLassus

Lo que hemos hecho al tirar la piedra es **perturbar** el agua, es decir, hemos hecho que se aleje de su situación normal, de su situación "tranquila" en que no se movía, y ahora, en cambio, se mueve arriba y abajo. Y no sólo eso; además, este movimiento del agua arriba y abajo, esta **perturbación**, se **propaga**, es decir, a medida que pasa el tiempo llega cada vez más lejos del punto donde la hemos originado.

Bien, esto que acabamos de crear en la superficie del agua es una **onda**. Podemos ver cómo se crean y se propagan ondas cuando lanzamos un guijarro en un charco, pero también cuando damos un golpe en la cuerda de tender la ropa, por ejemplo. En ambos casos creamos una perturbación en un lugar y esta perturbación se propaga a otros puntos (a otros puntos del charco en el primer ejemplo y a otros puntos de la cuerda, en el segundo). Esto también sucede cuando producimos un sonido; en este caso la onda no es evidente, no la podemos "ver"; en cambio sí que es evidente la propagación de una perturbación desde un lugar de origen hacia otro, que en este caso es el sonido y, por tanto, la podemos "oir".

En todos estos casos hay mecanismos físicos que hacen que una perturbación que se produce en un lugar tenga unos efectos en otro lugar, situado a una cierta distancia, y tras un cierto tiempo. Además, fijémonos que sólo se propaga la **perturbación**, no hay ningún cuerpo ni ningún otro agente físico que se desplace desde el lugar de origen hasta el lugar de llegada. En cada caso, la perturbación consistirá en una variación de alguna magnitud física respecto a un valor inicial; esta magnitud puede ser:

**Mecanismo físico**

Entendemos por mecanismo físico un conjunto de fuerzas que hacen cambiar el estado de un sistema, es decir, que modifican la situación en que se halla un cuerpo o conjunto de cuerpos.

- un desplazamiento,
- la presión,
- la densidad,
- el campo eléctrico,
- etc.

y el mecanismo mediante el cual la variación de esta magnitud se propaga por el espacio será muy diferente. Por ejemplo, en el caso de la onda que provocamos en el agua al tirar una piedra, la magnitud que perturbamos es la altura de la superficie del agua, que va variando arriba y abajo, y esta perturbación se propaga gracias a las atracciones que hay entre las moléculas delagua.

En general, pues, la magnitud física considerada realizará alguna clase de oscilación alrededor de un punto de equilibrio, pero sin sufrir ningún desplazamiento neto. Esta magnitud, y especialmente su variación a medida que pasa el tiempo, nos caracterizará a la onda; es decir, describiremos la onda mediante la variación de esta magnitud. En la figura 2 podéis ver una representación esquemática de una perturbación, una onda, que se propaga hacia la derecha con una cierta velocidad $v$.

**Punto de equilibrio**

El punto de equilibrio es el valor que tiene una magnitud física cuando no la perturbamos. En el caso del agua, el punto de equilibrio es la altura del agua cuando está "tranquila", antes de tirar la piedra.

El hecho de que la perturbación se vaya propagando nos indica que se está propagando energía, que es la que permite que la magnitud perturbada en un punto también pueda resultar perturbada en otro punto un tiempo después. En otras palabras, y volviendo nuevamente al ejemplo del charco, cuando tiramos la piedra al agua, le comunicamos una cierta energía, que es la que provoca la perturbación. Y posteriormente esta energía se va propagando y es la que permite que la perturbación vaya apareciendo más y más lejos.

Figura 2. Perturbación que se propaga hacia la derecha

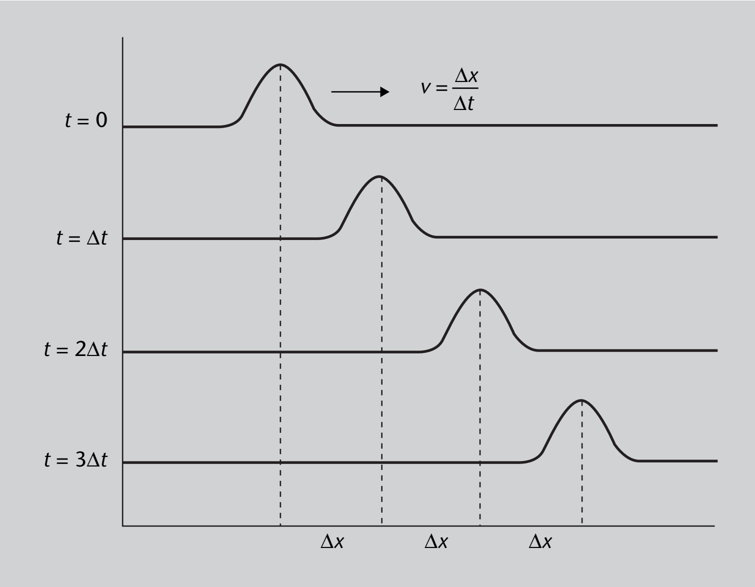



**Figura 2**

Perturbación (onda) que se propaga hacia la derecha, representada en diferentes instantes de tiempo ($t = 0$, $t = \Delta t$, etc.). La velocidad de propagación de esta perturbación, $v$, es el espacio recorrido, $\Delta x$, dividido por el tiempo empleado en recorrerlo, $\Delta t$.

Una **onda** es una perturbación que se propaga por el espacio y el tiempo, con transporte de energía y cantidad de movimiento, pero sin transporte neto de materia.

Fijaos que la definición remarca el hecho de que en una onda no hay movimiento neto de materia, sólo hay propagación de energía y de cantidad de movimiento. Es esta propagación de energía la que hace que la perturbación vaya llegando cada vez más lejos.

Dado que, a partir de esta definición, el mecanismo físico particular de una onda resulta irrelevante, la rama de la física que se ocupa de las ondas estudia sus propiedades genéricas, independientemente de su origen físico. Es cierto que, en último término, para cada caso particular tendremos que considerar de qué tipo de ondas estamos hablando, pero las características generales del movimiento ondulatorio son genéricas para cualquier tipo de onda. Todas las ondas presentan fenómenos como la reflexión y la refracción, la interferencia, la difracción, la dispersión y otros que iremos comentando en este módulo, independientemente de qué clase de ondas sean.

Ahora ya hemos visto, pues, qué es una onda. A continuación lo que haremos es, en primer lugar, ver cómo se pueden clasificar diferentes tipos de ondas, y después intentaremos encontrar una descripción matemática de las ondas, es decir, encontrar un conjunto de ecuaciones que, cuando las solucionemos, nos permitan saber cómo se comportará una onda. Una vez tengamos claro cómo podemos describir matemáticamente cualquier onda, pasaremos a un caso particular especialmente importante, las denominadas *ondas armónicas*, que también nos servirán para introducir unos cuantos conceptos habituales al hablar de ondas, como la longitud de onda o la frecuencia.

### 1.2. Tipos de ondas

En el subapartado anterior hemos visto que en cada caso particular la magnitud perturbada en un movimiento ondulatorio puede ser diferente, y también lo puede ser el mecanismo de propagación de esta perturbación. Aun así, podemos clasificar las ondas en función de varias características. De este modo tenemos:

**1)** En función de la dirección de la perturbación respecto a la propagación de la onda:

**a)** ondas transversales,
**b)** ondas longitudinales,
**c)** ondas mixtas.

**2)** En función de si necesitan un medio para propagarse:

**a)** ondas mecánicas,
**b)** ondas no mecánicas.

**3)** En función de su propagación:

**a)** ondas planas,
**b)** ondas circulares,
**c)** ondas esféricas.

Veamos con detalle cada uno de estos tipos.

#### 1.2.1. Ondas en función de la dirección de la perturbación

La primera clasificación posible es en función de la dirección de la perturbación respecto a la dirección de propagación de la onda. Es decir, en qué dirección se mueve la magnitud física que caracteriza a la onda cuando la comparamos con la dirección de propagación de la propia onda. En este caso, las ondas se pueden separar en dos grandes grupos: transversales y longitudinales.

**Recordad**

La magnitud física que caracteriza a la onda es la que utilizamos para describirla, estudiando su variación en función del tiempo.

En una **onda transversal** la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. En una **onda longitudinal** la perturbación es paralela a la dirección de propagación.

**Enlaces de interés**

Podéis ver animaciones de ondas transversales y longitudinales, bastante clarificadoras, en: http://www.youtube.com/watch?v=Rbuhdo0AZDU, http://www.youtube.com/watch?v=MoVz2ENJb8M y en http://www.youtube.com/watch?v=f66syH8B9D8.

**Ejemplos de ondas longitudinales y de ondas transversales**

Las ondas sonoras son un ejemplo de ondas longitudinales, como también las ondas en un muelle y algunas ondas sísmicas, como las ondas P. En estos casos, la perturbación consiste en un desplazamiento de las partículas del medio hacia adelante y hacia atrás en la misma dirección en que se está propagando la onda. En la figura 3a podéis ver una representación de una onda longitudinal: las partículas del medio se mueven adelante y atrás y crean zonas de mayor o menor densidad (representadas como más oscuras o más claras).

Las ondas electromagnéticas son un ejemplo de ondas transversales. También lo son las ondas que podemos generar en una cuerda haciendo oscilar uno de sus extremos arriba y abajo, las ondas superficiales en el agua o algunas ondas sísmicas, como las ondas S. En la figura 3b podéis ver una representación de una onda transversal: la magnitud que varía lo hace perpendicularmente a la dirección de propagación (en este caso particular, además, lo hace siguiendo la forma de una función senoidal, pero podría tener cualquier forma).

Figura 3. Ondas transversales y longitudinales

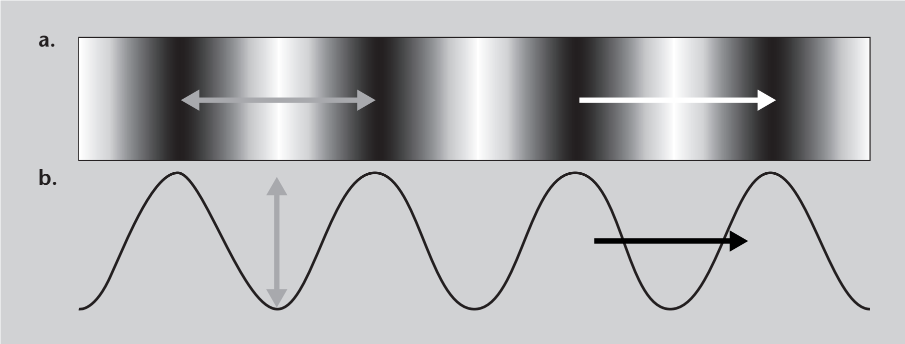



**Figura 3**

**a.** Onda longitudinal. El color más oscuro o más claro indica un valor más alto o más bajo de la magnitud perturbada (densidad, presión, etc.).
**b.** Onda transversal. El perfil de la onda representa los valores que asume la magnitud perturbada, que siempre varía en dirección perpendicular a la dirección de propagación.
En ambos casos, las flechas grises indican la dirección en que se produce la perturbación, la flecha blanca y la flecha negra muestran la dirección de propagación de la onda.

### Polarización y ondas transversales

En el caso de las ondas transversales, la perturbación, como acabamos de comentar, es perpendicular a la dirección de propagación, pero todavía podemos precisar más. La dirección definida por la perturbación se puede mantener siempre igual, girar alrededor de la dirección de propagación de una manera bien definida* o ir cambiando aleatoriamente. Podemos imaginarlo en el caso de una onda que producimos en una cuerda haciendo oscilar uno de sus extremos con la mano: esto podemos hacerlo moviendo siempre la mano arriba y abajo o bien ir cambiando la dirección de movimiento de nuestra mano (ahora arriba y abajo, ahora de derecha a izquierda, ahora algo intermedio, etc.). La propiedad que describe este fenómeno se denomina *polarización*. Cuando la dirección de la perturbación se mantiene siempre igual o cambia de manera bien definida se dice que la onda está polarizada; en caso contrario, que la onda no está polarizada. Dos ejemplos de polarización muy típicos son la polarización lineal y la polarización circular.

*** Cuando decimos "de una manera bien definida" nos referimos al hecho de que va cambiando de manera que se puede expresar con una función matemática.**

La **polarización** es la condición de una onda transversal por la cual la dirección en que se produce la perturbación tiene una relación bien definida respecto a la dirección de propagación. En una **onda polarizada linealmente** la dirección de la perturbación siempre se mantiene igual respecto a la dirección de propagación. En una **onda polarizada circularmente** la dirección de la perturbación gira con una velocidad angular constante respecto a la dirección de propagación.

En la figura 4a podéis ver una representación de dos ondas polarizadas linealmente (una con polarización en el eje $x$ y la otra con polarización en el eje $y$) y en la figura 4b, la de una onda polarizada circularmente. Todas las ondas representadas se propagan en la dirección del eje $z$. En el caso de las ondas polarizadas linealmente (figura 4a), la perturbación se produce siempre con una misma orientación respecto a los ejes $x$ e $y$, es decir, la magnitud que varía siempre lo hace manteniendo esta orientación. En los dos casos mostrados, la orientación de una onda es paralela al eje $x$ y la de la otra, al eje $y$, aunque podría formar un ángulo cualquiera. Así, la proyección de la perturbación sobre el plano $xy$ es simplemente una línea recta. En el caso de la onda polarizada circularmente (figura 4b), la perturbación va girando con velocidad angular constante alrededor del eje $z$ y su proyección sobre el plano $xy$ sería una circunferencia.

**Enlaces de interés**

No os preocupéis si os cuesta un poco visualizar mentalmente los diversos tipos de polarización, ¡no es fácil! Podéis ayudaros con algunas animaciones, como las siguientes miniaplicaciones (*applets*) de Java disponibles en: http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Twave/PolWave.html o http://www.enzim.hu/~szia/cddemo/edemo2.htm para ondas polarizadas linealmente y http://www.enzim.hu/~szia/cddemo/edemo7.htm para ondas polarizadas circularmente.

Figura 4. Representación esquemática de la polarización

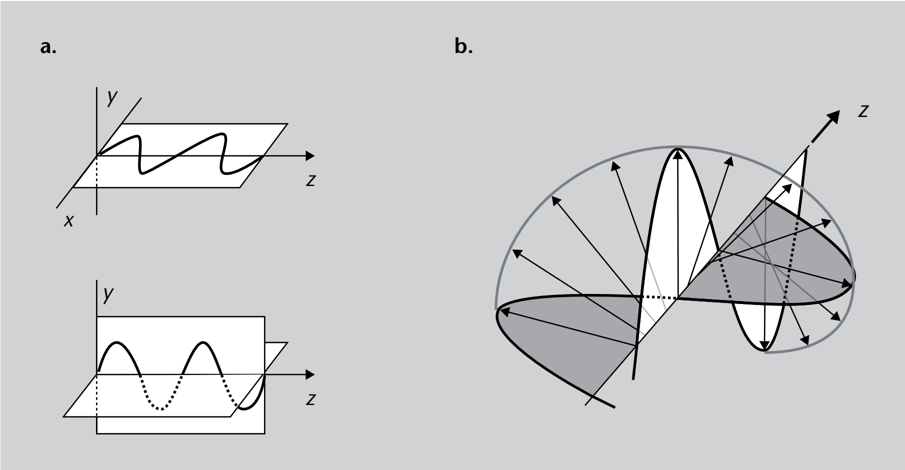



**Figura 4**

Ondas polarizadas. En ambos casos las ondas se propagan en la dirección del eje $z$.
**a.** Ondas polarizadas linealmente.
**b.** Onda polarizada circularmente.

En algunos casos las ondas son una mezcla de ondas transversales y ondas longitudinales, a veces denominadas *ondas mixtas*. En realidad, las ondas superficiales que se producen en el agua son ondas mixtas, puesto que el agua se desplaza verticalmente y también horizontalmente y las partículas realizan movimientos relativamente complejos. En la figura 5 podéis ver un ejemplo de ondas mixtas.

Figura 5. Ondas mixtas en la superficie del agua

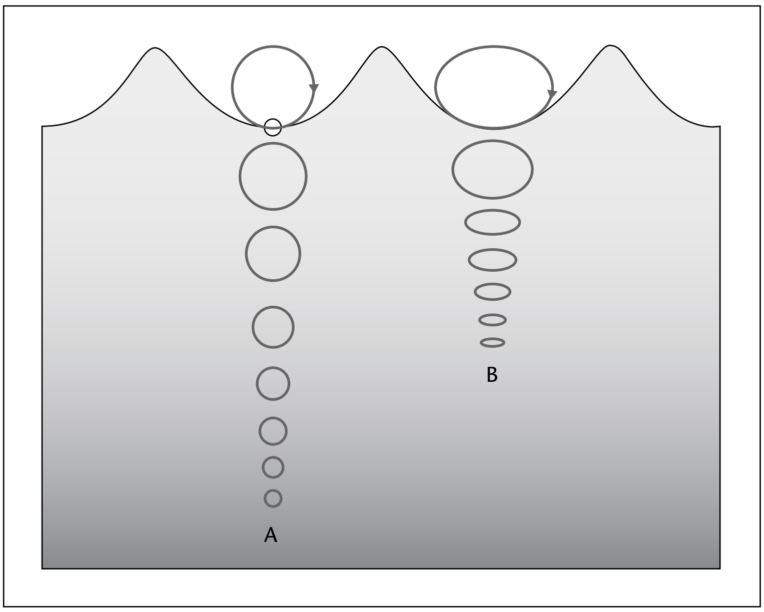



**Figura 5**

Las partículas describen una combinación de movimiento transversal y movimiento longitudinal en aguas profundas (A) o en aguas poco profundas (B). Podéis ver una animación de este tipo de movimiento ondulatorio en: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Mouvement_dans_une_vague_en_eau_peu_profonde.gif.

### 1.2.2. Ondas en función del medio de propagación

A veces también se diferencian las ondas en función de si necesitan un medio para propagarse o no. Las **ondas no mecánicas** no necesitan ningún medio para su propagación. Son un ejemplo de ello las ondas electromagnéticas, que están formadas por un campo eléctrico y un campo magnético variables que se van reforzando mutuamente y se propagan. Otro ejemplo son las ondas gravitatorias, pero como son hipotéticas, no las tendremos en cuenta: para nosotros, las únicas ondas no mecánicas serán las electromagnéticas.

En el módulo "Propagación de ondas electromagnéticas" se explica qué significa esto de los campos eléctrico y magnético que se van reforzando mutuamente.

Todas las otras ondas que consideramos necesitan un medio para propagarse (es decir, no se pueden propagar en el vacío) y, en general, se denominan **ondas mecánicas**. Ahora bien, cuando una onda se propaga por un medio, hay algunas limitaciones. Si todas las partes que forman el medio estuvieran rígidamente unidas, no se podrían desplazar unas respecto a las otras, de forma que no se podría generar ninguna onda, ningún tipo de perturbación. Por otro lado, si el medio fuese extraordinariamente flexible, la onda tampoco se podría propagar: no habría manera de hacer que la perturbación en un punto se transmitiera a otro punto adyacente. Desde un punto de vista físico se dice que una onda no se puede propagar en un medio infinitamente rígido ni tampoco en un medio infinitamente flexible.

### 1.2.3. Ondas en función de su propagación

Finalmente, la última clasificación, en función de la propagación, no afecta a una onda individual, sino que sólo se utiliza cuando consideramos un conjunto de ondas emitidas por una fuente. Cuando tenemos muchas ondas que se propagan conjuntamente es útil introducir los conceptos de *frente de onda* y de *rayo*.

El **frente de onda** es el conjunto de puntos en los que todas las ondas que consideramos se hallan en el mismo estado de oscilación. Es decir, es el conjunto de puntos en los que todas las ondas se encuentran en su punto más alto, por ejemplo (o en su punto más bajo, da igual; la idea importante es que estén en un mismo estado de oscilación).

Los **rayos** son líneas perpendiculares en todo momento al frente de onda, que nos indican en qué dirección se está propagando la onda.

Cuando el frente de onda es plano, los rayos son paralelos y tenemos una **onda plana**. Esto significa, a partir de la definición de frente de onda que acabamos de dar, que todos los puntos que están en un mismo estado de oscilación forman un plano. Una onda en una dimensión siempre es una onda plana, mientras que en dos y tres dimensiones, si estamos lo bastante lejos del foco emisor de ondas, siempre podemos considerar que las ondas son, aproximadamente, planas. En la figura 6 podéis ver una representación esquemática de un frente de onda plano, es decir, de una onda plana.

Figura 6. Representación esquemática de un frente de onda plano

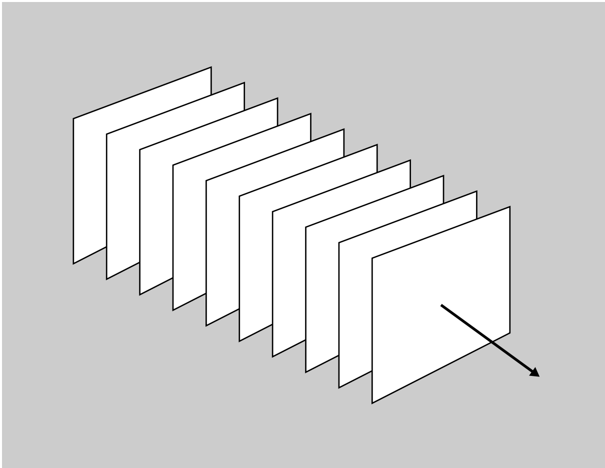


**Figura 6**

Cada plano representa el conjunto de puntos en los cuales todas las ondas que forman el frente tienen su valor máximo.

Si una fuente puntual emite ondas en un medio en dos o tres dimensiones, el frente de onda formará, respectivamente, circunferencias o esferas centradas en la fuente emisora y tendremos una **onda circular** o una **onda esférica**, en cada caso. Volviendo al ejemplo de la piedra que lanzamos en un charco, en ese caso tenemos precisamente ondas circulares que se van propagando a partir del punto en que hemos tirado la piedra.

**Enlace de interés**

Podéis ver una animación, que resulta quizá más clara que la fotografía del agua del principio del módulo, en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blender3D_CircularWaveAnim.gif.

### 1.3. ¿Qué hemos aprendido?

En este primer apartado nos hemos limitado a plantear la cuestión básica para empezar a trabajar: ¿qué es una onda? La hemos definido como una perturbación que se propaga por el espacio y transporta energía y cantidad de movimiento, pero no materia. Esta es la idea a partir de la cual empezaremos a tratar las ondas con más detalle.

También hemos hecho un poco de clasificación de las ondas y hemos considerado cómo las podemos clasificar en función de diversos parámetros. Así, hemos considerado ondas longitudinales y ondas transversales (y estas nos han llevado a introducir el concepto importante de polarización); ondas mecánicas y ondas no mecánicas; y ondas planas, circulares y esféricas.

# 2. Descripción matemática de las ondas

Una vez presentada una descripción general de las ondas y considerados los diferentes tipos en los que se pueden clasificar, el paso siguiente es intentar hallar una descripción matemática de las mismas. Hasta ahora hemos descrito las ondas de una manera cualitativa, que no nos permite trabajar con ellas. Necesitamos describirlas cuantitativamente y esto es, precisamente, lo que haremos ahora: buscaremos una ecuación que nos servirá para cualquier tipo de onda y que, cuando la solucionemos, nos dirá cómo evoluciona la onda a lo largo del tiempo, es decir, cómo se propaga y qué valor tiene la perturbación en cada punto del espacio y en cada momento. Con esta ecuación ya podremos trabajar con las ondas con toda generalidad.

## 2.1. La función de onda

Imaginemos una perturbación que en un momento dado, que consideraremos inicial, se encuentra en una cierta posición que también consideraremos inicial. La forma de la perturbación la describimos con una cierta función $y$ que dependerá del tiempo y del punto del espacio donde estemos: $y = f(x,t)$. La forma concreta de la perturbación y, por lo tanto, de la función $y$ ahora es irrelevante, sólo nos interesa saber cómo variará en función del tiempo

**Funciones**

Cuando representamos una función como $y = f(x,t)$ estamos diciendo que la magnitud $y$ es función de $x$ y de $t$.

Consideraremos que esta perturbación se propaga en una dimensión, hacia la derecha (podemos suponer igualmente hacia la izquierda, la discusión sería equivalente), y sin deformarse (es decir, la forma de la onda en un punto es exactamente igual a la que tenía en otro punto un cierto tiempo antes), como podéis ver en la figura 7. Después de un cierto tiempo $t$, la perturbación, pues, se ha propagado en el sentido positivo de $x$ con una cierta velocidad $v$ y se hallará en un cierto punto $x$; por lo tanto, $x = x_0 + vt$ y, así, $x_0 = x - vt$. La función $y = f(x)$, que nos describe esta perturbación en el punto $x$, tiene que ser igual a como era en el punto y el momento iniciales, $y = f(x_0)$, porque recordad que hemos dicho que la perturbación no se deforma. De este modo, imponemos esta condición:

**Si un objeto se desplaza a velocidad constante, recorre un espacio que es igual a su velocidad multiplicada por el tiempo.**

$$y = f(x) = f(x_0) = f(x - vt). \tag{1}$$

Ahora bien, la onda también se puede propagar hacia la izquierda, en el sentido negativo de $x$. Un razonamiento análogo al anterior nos llevaría entonces a:

$$y = f(x + vt). \tag{2}$$

Figura 7. Pulso de onda que se propaga hacia la derecha

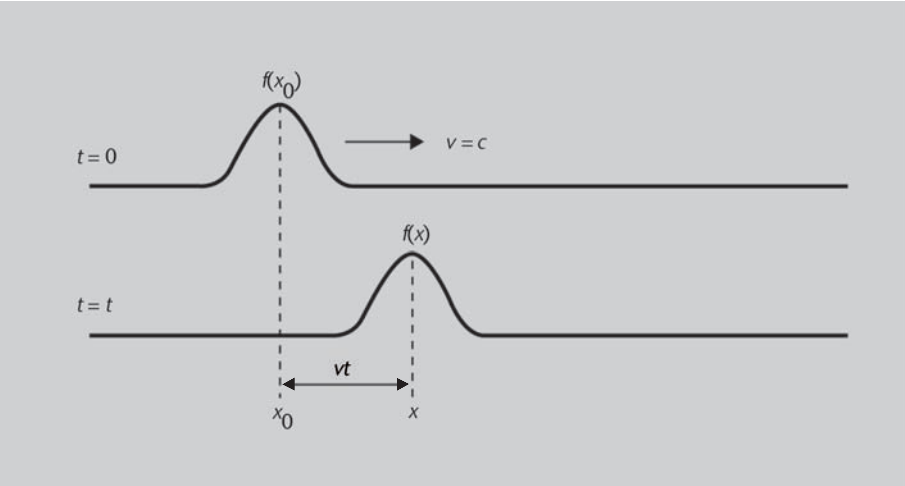



**Figura 7**

Representación esquemática de una onda que se propaga hacia la derecha, en dos instantes de tiempo, $t = 0$ y $t = t$. Después de un tiempo $t$, la perturbación se ha propagado en el sentido positivo de $x$ con una cierta velocidad $v$ y se hallará en un cierto punto $x$; por lo tanto, $x = x_0 + vt$ y, así, $x_0 = x - vt$. La función $y = f(x)$ que nos describe esta perturbación en el punto $x$ tiene que ser igual a como era en el punto y el momento iniciales, $y = f(x_0)$, de modo que $f(x) = f(x_0) = f(x - vt)$.

Así, en general, la función:

$$y = f(x \pm vt) \tag{3}$$

es la **función de onda**. Cualquier onda, sea del tipo que sea, cumplirá esta ecuación, esta relación funcional. Dicho de otro modo, cualquier onda se podrá escribir mediante una función que depende de $x \pm vt$.

### 2.2. La ecuación de ondas

Hasta ahora hemos descrito matemáticamente una onda de manera muy genérica. Lo cierto es que la expresión $f(x \pm vt)$ (ecuación 3) sólo nos dice qué dependencia en $x$ y en $t$ debe tener cualquier tipo de perturbación que se propaga por el espacio, pero no nos dice cómo es exactamente esta perturbación ni cuál es la magnitud física que resulta perturbada. En cada caso particular, esta magnitud será diferente y los mecanismos por los cuales se propaga la perturbación también serán diferentes. Aun así, lo que haremos ahora es ver si es posible encontrar alguna expresión que tenga que cumplir la magnitud perturbada, independientemente del proceso físico involucrado, y que nos permita saber cómo evoluciona la onda a medida que pasa el tiempo y a medida que se desplaza.

Para hacer esto aplicaremos a un par de casos significativos un procedimiento que ya conocemos: calcularemos el movimiento de la perturbación a partir de las fuerzas que actúan sobre el medio que estamos perturbando, del mismo modo que calculamos el movimiento de un cuerpo sometido a determinadas fuerzas.

¿Cómo lo hacíamos para hallar el movimiento de un cuerpo sabiendo las fuerzas que actúan sobre él? En primer lugar encontrábamos la resultante de las fuerzas y después aplicábamos la segunda ley de Newton, $F = ma$, para obtener la aceleración; una vez conocida la aceleración podíamos llegar a determinar el movimiento del cuerpo. Ahora haremos exactamente esto.

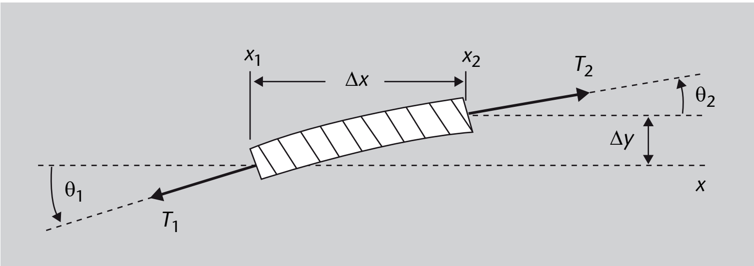
### 2.2.1. Ecuación de ondas transversal: una cuerda

En primer lugar nos preocuparemos de una onda que se propaga por una cuerda. Consideremos un trozo de cuerda como el mostrado en la figura 8. La cuerda se mueve arriba y abajo, pero no de derecha a izquierda ni de izquierda a derecha; así, la magnitud física perturbada es el desplazamiento de la cuerda en la dirección vertical, $y(x,t)$. La longitud del trozo de cuerda es $\Delta x$ y su densidad lineal es $\lambda$, de manera que la masa total del trozo de cuerda és

$$m = \lambda \Delta x \tag{4}$$

La tensión, que simbolizaremos $\vec{T}$, a la cual está sometido el trozo de cuerda en sus extremos es $\vec{T}_1$ para un extremo y $\vec{T}_2$ para el otro, que forman unos ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ con la horizontal. Podéis ver esta situación en la figura 8, donde hemos representado el fragmento de cuerda y las tensiones que sobre él actúan.

Figura 8. Fragmento de una cuerda sometida a un movimiento ondulatorio




Lo que queremos ahora es aplicar la segunda ley de Newton a este fragmento de cuerda; es decir, calcular la resultante de las fuerzas que actúan e igualarla a la masa por la aceleración que se produce. Empecemos, pues, calculando la fuerza total en la dirección horizontal:

$$F_x = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1. \tag{5}$$

Ahora bien, suponemos que los ángulos son pequeños, de modo que la expresión anterior se reduce a:

$$F_x \approx T_2 - T_1. \tag{6}$$

Pero como en la dirección horizontal no hay movimiento, la aceleración es cero y tenemos $F_x = m \cdot 0$; por tanto:

$$T_2 - T_1 = 0 \tag{7}$$

**Densidad lineal**

La densidad lineal de masa de un material, $\lambda$ (la letra griega lambda minúscula), es la masa del material, $m$, por unidad de longitud, $l$: $\lambda = \frac{m}{l}$.

**Recordad**

La magnitud perturbada $y$ es función del tiempo $t$ y del espacio $x$, ya que es diferente en cada punto y en cada momento.

**Δ es la letra griega delta mayúscula, de manera que Δx se lee "delta equis". λ es la letra griega lambda minúscula.**

***θ*** **es la letra griega zeta minúscula (corresponde aproximadamente al sonido de la *z* castellana o del dígrafo *th* inglés).**

**Figura 8**

Los extremos del fragmento, situados en $x_1$ y $x_2$ y de longitud $\Delta x$, están sometidos a unas fuerzas $T_1$ y $T_2$, que forman, respectivamente, unos ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ respecto a la horizontal.

**Recordad**

Si los ángulos son pequeños siempre podemos aproximar los senos por los ángulos o por las tangentes y los cosenos por 1. Es decir, $\cos\alpha \approx 1$ y $\operatorname{sen}\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

o, lo que es lo mismo:

$$T_2 = T_1. \tag{8}$$

Pasemos ahora a la dirección vertical. La fuerza en esta dirección es:

$$F_y = T_2 \operatorname{sen} \theta_2 - T_1 \operatorname{sen} \theta_1. \tag{9}$$

Nuevamente, aprovechando que los ángulos son pequeños, esto se reduce a:

$$F_y = T_2 \tan \theta_2 - T_1 \tan \theta_1 \tag{10}$$

y antes hemos encontrado que, aproximadamente:

$$T_2 = T_1 \tag{11}$$

valor que denominamos simplemente $T$. Luego, volviendo a la ecuación 9, con este resultado tenemos:

$$F_y = T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \tag{12}$$

$$F_y = T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \tag{13}$$

Pero la tangente de estos ángulos es precisamente la derivada del desplazamiento vertical, $y(x,t)$, respecto a $x$ calculada en los puntos respectivos.

**Pendiente de una curva en un punto**

Recordad que la pendiente de una curva en un punto, que es su derivada, es igual a la tangente del ángulo que forma la curva con la horizontal en ese punto.

Así:

$$F_y = T \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_1 \right] \tag{14}$$

Fijaos en el hecho de que utilizamos la derivada parcial ($\partial$) ya que $y$ depende tanto de $x$ como de $t$, pero ahora sólo nos interesa su variación respecto a $x$.

**Derivada parcial respecto a una variable**

Si una función depende de dos o más variables, su derivada parcial respecto a una de estas variables es simplemente su derivada respecto a esta variable considerando las otras variables como constantes.

Esta es la fuerza resultante. Ya tenemos el miembro de la izquierda de la segunda ley de Newton, la $F$ de la fórmula $F = ma$. Ahora nos hace falta el miembro de la derecha, la masa por la aceleración.

Recordad que habíamos visto que la masa de la cuerda se podía expresar en función de la densidad lineal como $\lambda\Delta x$ (ecuación 4). Por otro lado, recordad que la aceleración es simplemente la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Por lo tanto, la masa por la aceleración es:

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15}$$

y, en consecuencia, la expresión completa $F = ma$ queda, utilizando las ecuaciones 14 para la fuerza y 15 para la masa por la aceleración:

$$T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{16}$$

Esta expresión parece muy complicada, pero el miembro de la izquierda lo podemos simplificar: como hacemos tantas veces en física, hemos considerado un trozo de cuerda de longitud arbitraria $\Delta x$, que ahora debemos evaluar en el límite en que la longitud tiende a cero, porque estamos suponiendo implícitamente que la variación de $y$ respecto a $x$ es constante, y esto sólo es cierto en general cuando el intervalo $\Delta x$ es infinitamente corto.

De este modo, si pasamos el $\Delta x$ de la derecha dividiendo a la izquierda y hacemos el límite de $\Delta x \to 0$, la expresión anterior queda como:

$$\text{lím}_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{17}$$

Ahora fijaos que el límite que tenemos es precisamente la definición de derivada. En este caso es una derivada respecto a $x$. Por lo tanto, tenemos la derivada respecto a $x$ de $\partial y/\partial x$, es decir, su segunda derivada:

$$\text{lím}_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{18}$$

Finalmente, pues, la segunda ley de Newton aplicada a la cuerda tensa nos da:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{19}$$

No os asustéis por el aspecto de la ecuación 19, no nos está diciendo nada más que la segunda derivada de $y$ respecto a $x$ tiene que ser siempre igual a $\lambda/T$ veces la segunda derivada de $y$ respecto a $t$. Se trata de una ecuación diferencial, pero por el momento no nos preocuparemos de saber cómo se resuelve. Hemos obtenido una ecuación que nos describe una onda en una cuerda, que es lo que queríamos.

**Derivada de una función**

Hay que recordar que la derivada de una función $f(a)$ se define de la siguiente manera:

$f'(a) = \text{lím}_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

En el caso de la ecuación 17, $\Delta x$ hace el papel de $h$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ hace el papel de $f$ y recordad también que los puntos 1 y 2 están separados por esta distancia $\Delta x$, de manera que el punto 2 es el punto 1 + $\Delta x$.

### 2.2.2. Ecuación de ondas longitudinal: un gas

Ahora consideremos un caso bastante diferente: las ondas longitudinales de presión que se propagan por un gas, es decir, el sonido. Las moléculas del gas, con una densidad $\rho$, se desplazan a derecha e izquierda respecto a su posición de equilibrio, de forma que crean variaciones de densidad, puesto que va variando el número de moléculas que hay en cada trozo y, por lo tanto, variaciones de presión; así, como magnitud perturbada podemos considerar el desplazamiento de las moléculas en la dirección longitudinal, $u(x,t)$, o la densidad $\rho(x,t)$ o la presión $p(x,t)$.

**$\rho$ es la letra griega ro minúscula.**

No explicaremos ahora con detalle el proceso, como hemos hecho en el caso anterior, simplemente daremos el resultado final, que es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (20)$$

**Recordad**

En general, $f(x,t)$ quiere decir que la variable $f$ depende de las dos variables $x$ y $t$, es decir, de la posición y del tiempo.

donde $B$ es el módulo de compresibilidad del medio por donde se propaga la onda, o módulo de volumen, que se define como la presión necesaria para producir un cambio unitario de volumen. De hecho, el módulo de compresibilidad en la propagación del sonido hace un papel análogo al de la tensión $T$ en el caso de la onda en una cuerda, $\rho$ hace el papel de $\lambda$ y $p$ hace el papel del desplazamiento $y$.

**El módulo de compresibilidad**

El módulo de compresibilidad, o módulo de volumen, $B$, se define como la presión necesaria para producir un cambio unitario de volumen. Para el acero, por ejemplo, $B \approx 160$ GPa y para el agua $B \approx 2{,}2$ GPa, mientras que para el aire, en un proceso adiabático (es decir, sin intercambio de calor), $B = 0{,}142$ GPa.

### 2.2.3. Ecuación de ondas general

Fijaos que en ambos casos hemos hallado una expresión casi igual (las ecuaciones 19 y 20) que nos relacionan la segunda derivada de la magnitud perturbada (el desplazamiento vertical $y$ en un caso y la presión del aire $p$ en el otro) respecto a la dirección de propagación con la segunda derivada de esta magnitud respecto al tiempo y con un factor de proporcionalidad que depende de caracetrísticas del medio ($\lambda/T$ en un caso y $\rho/B$ en el otro). Esta relación es, precisamente, la relación que estábamos buscando.

En el caso más general, pues, cualquier onda que se propaga en una dimensión cumple la relación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21)$$

donde $u$ es la perturbación y $k$ es una constante de proporcionalidad entre la segunda derivada de la perturbación respecto al espacio y la segunda derivada de la perturbación respecto al tiempo (constante que ya hemos visto que es igual a $\lambda/T$ en el caso de la cuerda y a $\rho/B$ en el caso del sonido).

### 2.2.4. La ecuación de ondas en tres dimensiones

La ecuación que acabamos de presentar es para ondas que se propagan en una sola dimensión, como las que se propagan por una cuerda o una onda de presión, un sonido, que se propaga en línea recta. ¿Podemos encontrar una expresión equivalente pero que sea más general, para tres dimensiones?

La respuesta es que sí. Si al principio de nuestra derivación de la ecuación 21 consideramos una magnitud $\vec{u}$, que depende de las tres coordenadas espaciales $x$, $y$ y $z$ y del tiempo $t$ –es decir, tenemos una magnitud $\vec{u}(x,y,z,t)$–, y seguimos el mismo procedimiento, llegaremos a un resultado parecido pero válido para tres dimensiones. No vamos a hacer ahora su derivación matemática, ya que en estos momentos no nos aporta ningún concepto nuevo y es ligeramente más compleja. Así, el resultado que se obtiene es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \tag{22}$$

Es decir, es el mismo que teníamos en la ecuación 21, pero ahora con las derivadas para cada dirección. De hecho, una cosa que se puede hacer, aunque quizá de buenas a primeras os pueda parecer raro, es sacar $\vec{u}$ factor común. De este modo nos queda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \tag{23}$$

Para simplificar este tipo de ecuaciones, habitualmente se define un operador denominado *nabla*, que se representa con el símbolo $\vec{\nabla}$, de la forma siguiente:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{24}$$

De este modo, la ecuación anterior se puede escribir de una forma más compacta así:

$$\nabla^2 \vec{u} = k\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \tag{25}$$

Esta relación es la **ecuación de ondas** en tres dimensiones.

### 2.2.5. Carácter general de la ecuación de ondas

Ahora bien, ¿cómo podemos estar seguros de que cualquier tipo de onda cumplirá esta ecuación? ¿Es realmente general? Al fin y al cabo, sólo hemos escogido dos casos particulares de onda y hemos visto que los dos nos daban una ecuación del tipo 21. ¿Seguro que cualquier otra clase de onda también se podrá describir con las expresiones 21 o 25? Bueno, al principio habíamos encontrado la forma genérica de la función de onda, que es $f(x - vt)$ y que sabemos que es completamente general para todas las ondas. Para ver que cualquier onda satisface la ecuación 21 apliquemos la ecuación de ondas a una función de onda cualquiera $f(x - vt)$ y veamos si se cumple.

Para simplificar la notación haremos:

$$\alpha \equiv x - vt \tag{26}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} \equiv y' \tag{27}$$

**$y'$ se lee "y prima"**

y entonces, aplicando la regla de la derivación en cadena:

**La regla de la cadena**

La regla de la cadena en la derivación nos asegura que para una función $f(x,y)$ se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{28}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t} \tag{29}$$

Pero como:

**Recordad que hacer $\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}$ es derivar $x - vt$ respecto a $x$, y por eso da 1. Igualmente, hacer $\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}$ es derivar $x - vt$ respecto a $t$, y por eso da $-v$.**

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1 \tag{30}$$

y

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v \tag{31}$$

las derivadas anteriores de las ecuaciones 28 y 29 se reducen a:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \tag{32}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vy' \tag{33}$$

Si ahora hacemos las segundas derivadas de estas dos últimas expresiones obtendremos, en primer lugar:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \tag{34}$$

Fijaos que en este caso sólo estamos escribiendo la segunda derivada de otra manera, como $y''$. Con respecto a $\frac{\partial y}{\partial t}$, para hacer la segunda derivada tenemos que aplicar nuevamente la regla de la cadena, usando la ecuación 33:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(-vy') = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 y'' \qquad (35)$$

En definitiva, pues, con esta última ecuación hemos llegado a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 y'' \qquad (36)$$

Y si recordamos que $y''$ no es nada más que otra manera de escribir $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (ecuación 34), llegamos a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (37)$$

es decir, obtenemos la ecuación de ondas.

Recapitulemos esto que acabamos de hacer: hemos partido de la función de onda $f(x - vt)$, que sabemos que es general para cualquier clase de ondas, y le hemos hecho las derivadas segundas que nos dice la ecuación de ondas (expresión 21) para ver si se cumple la igualdad. El resultado ha sido que sí; la función de onda satisface la ecuación de ondas. Esto quiere decir que cualquier clase de onda satisfará la ecuación de ondas 21. Y si lo hiciéramos en el caso de tres dimensiones obtendríamos exactamente lo mismo: que cualquier onda en tres dimensiones satisfará la expresión 25.

Ahora ya podemos estar tranquilos, puesto que hemos conseguido demostrar que todas las ondas se podrán describir con esta ecuación diferencial, da igual si son ondas sobre la superficie del agua, ondas de presión como el sonido u ondas electromagnéticas. Bien equipados con este resultado, ya nos podremos enfrentar al estudio de las ondas que queramos, que es lo que haremos en el resto de este módulo y en los módulos siguientes. ¡No está nada mal!

### Relación con la velocidad de propagación

Antes de acabar este apartado, fijémonos que si comparamos la constante $k$ que aparece en la ecuación 21 con la constante que nos ha aparecido en la ecuación 37, resulta que $k$ es igual a $1/v^2$, y $v$ es, precisamente, la velocidad de propagación de la onda. Este resultado es general y, por lo tanto, podemos afirmar:

$$k = \frac{1}{v^2}. \qquad (38)$$

Así, en el caso de la cuerda tensa, la ecuación de ondas de la cual era 19, podemos relacionar la velocidad de propagación con la densidad y la tensión de la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}. \tag{39}$$

También lo podemos hacer en el caso de la propagación del sonido, que sigue la ecuación de ondas 20, y relacionar su velocidad de propagación con la densidad del medio y su módulo de compresibilidad:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{40}$$

En definitiva, acabamos de ver que la ecuación de ondas es general para todo tipo de ondas y, además, hemos conseguido relacionar la velocidad de propagación de la onda con características intrínsecas del medio por el cual se propaga.

En el módulo "Ecuaciones de Maxwell", cuando hablemos de ondas electromagnéticas, se encuentra una relación entre la velocidad de propagación de la onda y las características intrínsecas del medio por el cual se propaga.

### 2.3. ¿Qué hemos aprendido?

Este apartado ha sido fuertemente matemático. Primero, hemos empezado considerando la expresión matemática que deben cumplir todas las ondas. Esta expresión matemática, la **función de onda**, es muy genérica y sirve para todo tipo de ondas, independientemente del caso particular que nos ocupe. Ahora bien, esta función de onda $f(x \pm vt)$ sólo nos dice qué dependencia debe cumplir cualquier tipo de perturbación que se propaga por el espacio, pero no nos dice cómo es exactamente ni cuál es la magnitud física perturbada.

Con esto no nos basta. Nos gustaría encontrar una expresión más concreta para cualquier clase de ondas, una expresión que nos dijera cómo cambia la onda en función del tiempo y del espacio. Este ha sido el paso más complejo, que hemos realizado para un caso particular: hemos determinado el movimiento de la perturbación a partir de las fuerzas que actúan sobre el medio que estamos perturbando, del mismo modo que calculamos el movimiento de un cuerpo sometido a determinadas fuerzas, aplicando la segunda ley de Newton. Con este procedimiento hemos llegado a una expresión, la **ecuación de ondas**, que, lejos de ser válida sólo para el caso que hemos estudiado, es totalmente válida para cualquier tipo de onda, hecho que hemos podido demostrar.

Tras este tratamiento tan general de las ondas pasaremos a estudiar un tipo concreto de onda, las ondas armónicas.

# 3. Ondas armónicas

Cuando en una onda, la magnitud que varía en función del tiempo alcanza los mismos valores a intervalos periódicos, se trata de una **onda periódica**. Si, además, esta variación sigue una ley senoidal o cosenoidal, se trata de una **onda armónica**. Esto es equivalente a decir que, en una onda armónica, en cada punto la magnitud que varía lo hace siguiendo un movimiento vibratorio armónico simple.

**Periodicidad**

Que una magnitud sea *periódica* quiere decir que, tras pasar un tiempo determinado, el valor de la magnitud vuelve a ser el mismo y esto pasa siempre.

En los subapartados siguientes nos limitaremos a estudiar con más detalle las ondas armónicas. A simple vista esto puede parecer muy restrictivo, puesto que, al fin y al cabo, podemos suponer que sólo en casos muy concretos las ondas se comportarán de una manera tan "amigable". La importancia de estudiar ondas armónicas no se encuentra tanto en el hecho de su posible aplicación directa a la descripción de ondas reales que, efectivamente, pocas veces son perfectamente armónicas, sino al hecho de que, como veremos más adelante, cualquier onda se puede expresar como una suma de varias ondas armónicas. Este resultado, que es el **teorema de Fourier**, es una herramienta extraordinariamente potente para analizar el movimiento ondulatorio.

**Movimiento vibratorio armónico simple**

Un movimiento vibratorio armónico simple es el que hace un cuerpo que oscila alrededor de un punto de equilibrio y su posición en función del tiempo se puede describir con una función seno o coseno, es decir, $x(t) \propto \operatorname{sen} t$ o $x(t) \propto \cos t$.

Podéis recordar el teorema de Fourier en el apéndice del módulo.

## 3.1. Descripción de las ondas armónicas

Tal y como acabamos de comentar, en una onda armónica la magnitud física de la onda varía en el tiempo, en cada punto del espacio, de forma senoidal. Y, tal como pasa con todas las ondas, la variación es en función de la variable $x - vt$, aunque aquí escribiremos la dependencia en el espacio y el tiempo de una forma ligeramente distinta. Así, pues, expresaremos la onda armónica como

$$f(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{41}$$

donde:

- $A$ es la **amplitud** de la onda, que corresponde al valor máximo de la perturbación en un punto determinado,
- $x$ es la posición,
- $t$ es el tiempo,
- $k$ es una magnitud denominada **número de onda**,
- $\omega$ es otra magnitud denominada **frecuencia angular** y
- $\phi$ es la llamada **fase inicial**, que simplemente nos dice el valor de la función de onda en el origen de coordenadas y en el instante inicial.

**$\omega$ es la letra griega omega minúscula y $\phi$ es la letra griega fi minúscula.**

Antes de explicar estos conceptos detalladamente vale la pena echar una ojeada a la forma de esta ecuación. Fijaos que la representación gráfica de la ecuación 41 se puede hacer en función de $x$ o en función de $t$. Esto nos lleva a una doble periodicidad: en el tiempo y en el espacio. En la figura 9 podéis ver dos "instantáneas" de una onda armónica: en la figura 9a se muestra la onda en un momento concreto; en la figura 9b podéis ver la variación en función del tiempo en un punto determinado del espacio.

**Funciones seno y coseno**

En lugar de utilizar la función seno podemos utilizar la función coseno y las dos descripciones de la onda son completamente equivalentes. Recordad que para pasar de un seno a un coseno basta con desplazar el origen de coordenadas $\pi$ radianes o, dicho de otro modo: $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha + \pi$.

Figura 9. Doble periodicidad de una onda armónica

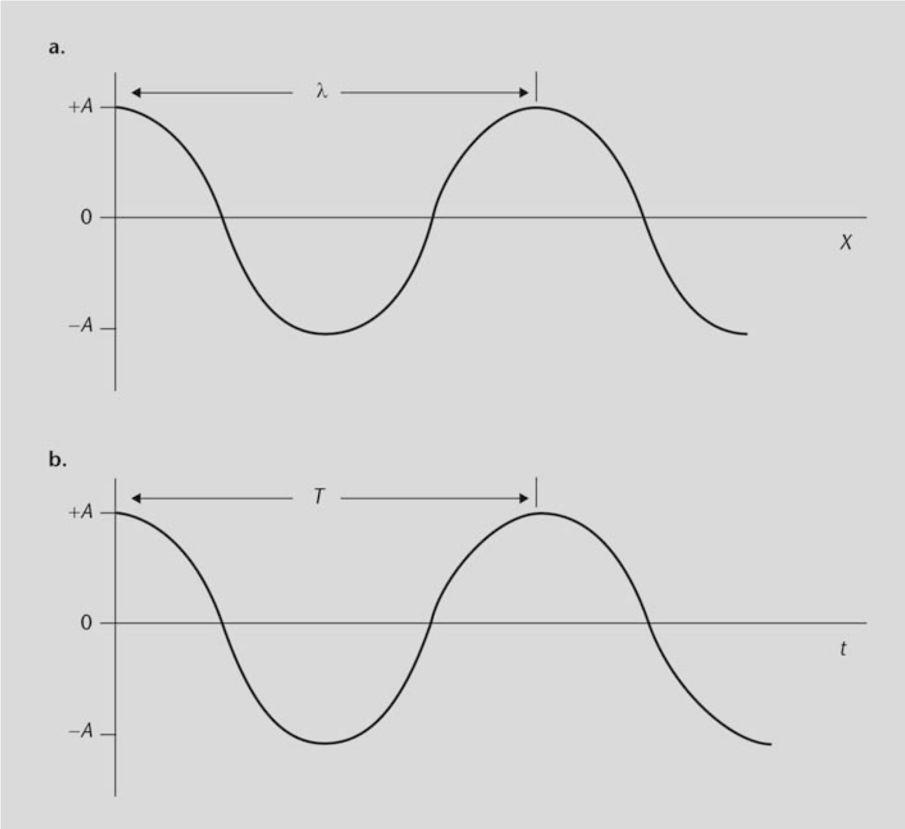



**Figura 9**

**a.** Imagen de una onda armónica que se propaga en la dirección $x$ en un instante de tiempo $t$ determinado. La longitud entre dos máximos consecutivos es la longitud de onda $\lambda$.
**b.** Evolución en función del tiempo $t$ de una onda armónica en un punto $x$ determinado. El tiempo entre dos máximos consecutivos es el periodo $T$.

Vamos a ver ahora qué significan el número de onda ($k$) y la frecuencia angular ($\omega$); por el camino nos aparecerán también el concepto de longitud de onda ($\lambda$) y el concepto de periodo ($T$).

### 3.1.1. El número de onda y la longitud de onda

Empecemos preguntándonos cuál es, en un instante de tiempo determinado, la distancia mínima entre dos puntos de la onda, $x$ y $x'$, que tienen el mismo valor de la perturbación (por ejemplo, la distancia entre dos máximos o dos mínimos). Esta pregunta es equivalente a plantear la ecuación:

$$A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) = A \operatorname{sen}(k(x + x') - \omega t + \phi). \quad (42)$$

Como el seno es una función periódica con periodo $2\pi$, ambas expresiones tendrán el mismo valor cuando $x' = 2\pi/k$. Esta distancia se denomina **longi-**

**tud de onda** y se acostumbra a simbolizar con la letra griega lambda minúscula, $\lambda$, que es, pues, la distancia entre dos puntos que se hallan en el mismo estado de vibración.

Una magnitud asociada a la longitud de onda es el **número de onda**, que simbolizamos con $k$. Podemos pensar en el concepto de número de onda a partir de la situación siguiente: en un momento dado "hacemos una fotografía" de la onda y nos preguntamos: ¿cuántos máximos hay en un metro? Dado que la longitud de onda es la longitud que hay entre dos máximos consecutivos, su inversa, $1/\lambda$, nos dirá cuántos máximos hay en un metro. Esto lo multiplicamos por $2\pi$ y tenemos la magnitud que llamamos *número de onda*. Así, tenemos:

**Unidades m y m$^{-1}$**

En el Sistema Internacional de Unidades, la longitud de onda se expresa en metros (m) y el número de onda en metros elevado a menos uno (m$^{-1}$).

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{43}$$

Este factor $2\pi$ puede parecer extraño, pero sólo es una cuestión convencional: como las funciones senoidales son periódicas con periodo $2\pi$, si no ponemos este factor $2\pi$ tendríamos que ir arrastrándolo todo el rato, de modo que es más fácil definir una magnitud que ya lo incluya y así ahorrarnos el ir añadiendo el $2\pi$ por todas partes. Podríamos perfectamente trabajar con la inversa de la longitud de onda, en lugar del número de onda, es simplemente cuestión de comodidad.

### 3.1.2. La frecuencia y el periodo

Ahora hagámonos la pregunta equivalente pero en función del tiempo: en un punto determinado del espacio, ¿cuánto tarda en repetirse el mismo estado de perturbación? (por ejemplo, ¿cuánto tardan en producirse dos máximos?). De manera muy parecida a como lo hemos hecho antes, esta pregunta es equivalente a plantear la ecuación

$$A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega(t + t') + \phi). \tag{44}$$

Como el seno es una función periódica con periodo $2\pi$, ambas expresiones tendrán el mismo valor cuando $t' = 2\pi/\omega$. Este tiempo es el **periodo**, que simbolizamos con la letra $T$, que es, pues, el tiempo que tarda la onda en estar otra vez en el mismo estado de vibración.

Una magnitud asociada al periodo es la **frecuencia angular**. Podemos considerar la frecuencia a partir de la situación siguiente: si nos encontramos en un punto del espacio y nos llega una onda, ¿cuántos máximos nos llegan en un segundo? Este valor es la **frecuencia**, la inversa del periodo, que simbolizamos con $f$. Este valor multiplicado por $2\pi$ es la frecuencia angular, que simbolizamos con la letra griega omega minúscula, $\omega$.

**Unidades s, Hz y rad/s**

En el Sistema Internacional de Unidades el periodo se expresa en segundos (s), la frecuencia se expresa en hercios (Hz) y la frecuencia angular se expresa en radianes por segundo (rad/s).

Asi pues:

$$\omega = 2\pi f \tag{45}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \tag{46}$$

**A menudo la frecuencia también se simboliza con la letra griega nu minúscula, $\nu$. Hay que ir con cuidado de no confundirla con una uve, ya que son muy parecidas gráficamente.**

Conjuntamente, el argumento ($kx$–$\omega t$) que aparece dentro del seno en la ecuación 41 se llama **fase** de la onda. Fijaos también que durante un tiempo igual a un periodo, $T$, la onda se ha desplazado una longitud igual a la longitud de onda, $\lambda$; por lo tanto, puesto que en general $x = vt$ y en este caso la velocidad es la velocidad de propagación de la onda, $v$, tenemos que

$$\lambda = vT. \tag{47}$$

Si de la expresión anterior despejamos la $v$, obtenemos:

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{48}$$

y ya hemos visto que $1/T = f$ (ecuación 46), de modo que podemos escribir:

$$v = \lambda f. \tag{49}$$

Esta última expresión nos relaciona la velocidad de propagación de una onda ($v$) con su frecuencia ($f$) y su longitud de onda ($\lambda$). También se puede reescribir, haciendo uso de la ecuación 43 y de que $\omega = 2\pi f$, como

$$v = \frac{\omega}{k}. \tag{50}$$

En la tabla 1 resumimos las magnitudes principales en la descripción de una onda armónica, junto con sus símbolos y unidades de medida en el Sistema Internacional.

Tabla 1

| Magnitud | Símbolo | Unidad (SI) |
|---|---|---|
| Longitud de onda | $\lambda$ | m |
| Frecuencia | $f$, $\nu$ | Hz |
| Frecuencia angular | $\omega$ | rad/s |
| Periodo | $T$ | s |
| Número de onda | $k$ | $m^{-1}$ |
| Fase inicial | $\phi$ | - |
| Velocidad de propagación | $v$, $c$ | m/s |
| Amplitud | $A$ | según el tipo de onda |

**Ejemplo. Cálculo de la frecuencia y del periodo**

Suponed que la función de onda de una onda armónica que se propaga por una cuerda horizontal es $y(x,t) = 0{,}03\,\text{sen}(2{,}2x - 3{,}5t)$, donde $y$ es el desplazamiento de la cuerda en la dirección vertical y todas las magnitudes están expresadas en unidades del Sistema Internacional.

**1)** Determinad el valor de la amplitud, el número de onda, la longitud de onda, la frecuencia, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.

**2)** ¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza un fragmento cualquiera de la cuerda?

**3)** ¿Cuál es la velocidad de un punto de la cuerda en función del tiempo? (¡cuidado: no se trata de la velocidad de propagación de la onda!)

**4)** ¿Cuál es la velocidad máxima de un punto cualquiera de la cuerda?

**Solución**

**1)** Puesto que la función de onda está expresada en la forma $A\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi)$, ya podemos saber directamente $A$, $k$, $\omega$ y $\phi$:

- amplitud: $A = 0{,}03$ m,
- número de onda: $k = 2{,}2\ \text{m}^{-1}$,
- frecuencia angular: $\omega = 3{,}5\ \text{s}^{-1}$,
- fase inicial: $\phi = 0$.

A partir del número de onda podemos hallar la longitud de onda ($\lambda$), utilizando la ecuación 43:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2} = 2{,}86\ \text{m} \tag{51}$$

Igualmente, a partir de la frecuencia angular podemos obtener el periodo ($T$) y la frecuencia ($f$), si utilizamos la ecuación 46 y que $f = 1/T$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5} = 1{,}80\ \text{s} \tag{52}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}80} = 0{,}557\ \text{Hz} \tag{53}$$

Ahora podemos hallar la velocidad de propagación ($v$), recordando la ecuación 49:

$$v = \lambda f = 2{,}86 \cdot 0{,}557 = 1{,}59\ \text{m/s} \tag{54}$$

**2)** Si recordáis la definición de amplitud que hemos dado al principio del subapartado 3.1, veréis que la amplitud es precisamente el valor máximo que alcanza la perturbación que caracteriza a la onda. En el caso que nos ocupa, la perturbación es el desplazamiento $y$ y ya sabemos que la amplitud $A$ es igual a 0,03 metros.

Por lo tanto, el desplazamiento máximo al que llega un fragmento cualquiera de cuerda es 0,03 metros.

**3)** Nos preguntan cuál es la velocidad de un punto de la cuerda en función del tiempo. Bien, sabemos que la posición en función del tiempo es $y(x,t) = 0{,}03\,\text{sen}(2{,}2x - 3{,}5t)$. Por otro lado, seguramente recordáis, de lo que habéis aprendido en cinemática, que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. Por lo tanto, basta con derivar la expresión de la posición respecto al tiempo:

$$v(x,t) = y'(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0{,}03(-3{,}5)\cos(2{,}2x - 3{,}5t) = -0{,}105\cos(2{,}2x - 3{,}5t) \tag{55}$$

Esta es, pues, la velocidad en función del tiempo. La expresión nos da la velocidad de cualquier punto de la cuerda en un instante de tiempo cualquiera, igual que la función de onda nos dice la posición $y$ de cualquier punto de la cuerda en un instante de tiempo cualquiera.

**Observación**

Para representar la velocidad de un punto utilizamos $y'$ en lugar de $v$ para no confundirla con la velocidad de propagación de la onda.

**4)** Hemos hallado la velocidad $y'$ de la cuerda: $y'(x,t) = -0{,}105\cos(2{,}2x - 3{,}5t)$. Como se trata de una función coseno, el valor máximo se producirá cuando el coseno valga* $\pm 1$ y entonces la velocidad máxima será $\pm$ 0,105 m/s. El signo más corresponde a los casos en que la cuerda se mueve hacia arriba y el signo menos a los casos en que se mueve hacia abajo.

*** Recordad que un seno y un coseno siempre tienen un valor comprendido -1 y 1.**

Ahora también nos podemos preguntar qué desplazamiento tiene la cuerda cuando se logra esta velocidad máxima. La velocidad máxima se logra cuando

$$\cos(2{,}2x - 3{,}5t) = \pm 1 \tag{56}$$

y esto sucede sólo si

$$2{,}2x - 3{,}5t = 0, \pm\pi \tag{57}$$

Y cuando $2{,}2x - 3{,}5t$ vale precisamente $\pm\pi$, ¿qué valor tiene $y(x,t)$? Introducimos los valores en $y(x,t)$:

$$y_{y'=\text{màx}} = 0{,}03\,\text{sen}(0) = 0 \tag{58}$$

$$y_{y'=\text{màx}} = 0{,}03\,\text{sen}(\pm\pi) = 0 \tag{59}$$

Es decir, cuando la velocidad es máxima, el desplazamiento de la cuerda es nulo. Si recordáis las características del movimiento vibratorio armónico simple os daréis cuenta de que es el mismo resultado, pero esto no nos debe sorprender: ya hemos comentado al principio del apartado 3 que en una onda armónica, en cada punto la magnitud que varía lo hace siguiendo un movimiento vibratorio armónico simple.

**Movimiento vibratorio armónico simple**

Recordad, nuevamente, que un movimiento vibratorio armónico simple es el que hace un cuerpo que oscila alrededor de un punto de equilibrio y su posición en función del tiempo se puede describir mediante una función seno o coseno.

### 3.2. Velocidad de grupo, velocidad de fase y dispersión

En toda la descripción que hemos hecho de las ondas armónicas no nos hemos preocupado de si la onda empieza y acaba en un momento dado, es decir, de si la fuente de ondas empieza a emitir las ondas en un momento determinado, emite durante un cierto tiempo y finalmente deja de emitir. Implícitamente hemos considerado que la onda armónica que estudiábamos se estaba produciendo siempre y en todo el espacio; en resumen, que era infinita. ¿Es relevante esta observación? ¿Hay mucha diferencia entre considerar una onda armónica que empieza y acaba o considerar una onda armónica ilimitada?

La respuesta es que sí, y la diferencia es bastante importante. Fijaos en la figura 10. Podemos ver dos ondas: la onda que se muestra en la parte de abajo es una onda armónica como las que hemos estudiado hasta ahora, es infinita y no empieza ni acaba nunca. Pero esta situación no es real, las ondas siempre empiezan a generarse en un momento determinado y se están generando durante un cierto tiempo, hasta que se acaba la causa que las provoca. En esta situación, más real, tendremos una cosa parecida a la que se muestra en la parte de arriba de la figura. Esta onda es lo que se denomina un **tren de ondas** o **paquete de ondas**.

La primera onda, en realidad, no es una onda armónica (¡fijaos que no podemos describir esta gráfica simplemente como una función seno o una función coseno!). Es una onda armónica entre los puntos inicial y final, pero esto no nos sirve, puesto que la descripción que hagamos de ella debe servir para cualquier valor de *x* en cualquier instante de tiempo *t*.

Figura 10. Paquete de ondas y onda infinita

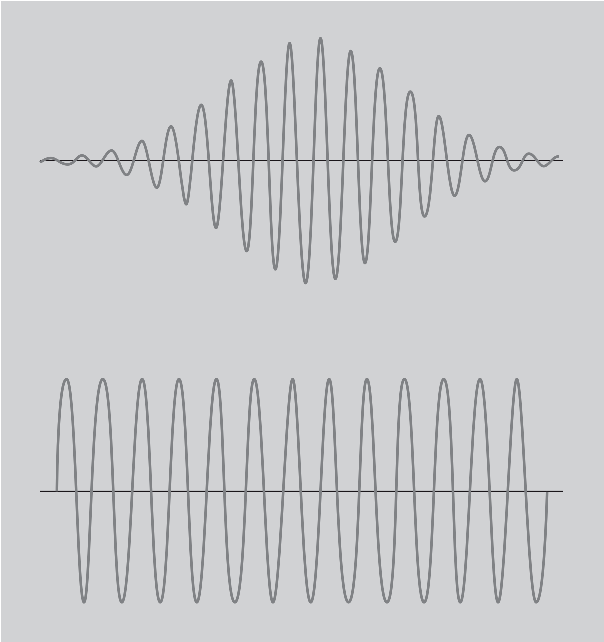


**Figura 10**

Arriba: un tren de ondas o paquete de ondas, resultado de haber empezado a generar una onda armónica en un momento determinado, generarla durante un cierto tiempo y, finalmente, parar. Abajo: una onda armónica infinita, que no empieza ni acaba nunca.

Habíamos comentado al principio del apartado 3 que, según el teorema de Fourier, cualquier onda se puede expresar como la suma de ondas perfectamente armónicas, cada una con una cierta amplitud y frecuencia. De este modo, un tren de ondas como el de la figura 10 también lo podremos expresar como la suma de ondas armónicas. Si las ondas armónicas que forman el tren de ondas viajan todas con la misma velocidad *v*, el tren también lo hace.

Consultad el apéndice del módulo para recordar el teorema de Fourier.

Si, en cambio, la velocidad *v* depende de la frecuencia que tiene la onda, unos componentes (unas ondas armónicas) del tren de ondas se desplazarán más rápidamente que otros. Esto provocará que el tren de ondas se propague a una velocidad diferente de la de cada onda y se deforme. Este fenómeno se denomina *dispersión*.

La velocidad de propagación de la onda, es decir, la velocidad a la que avanzan los máximos y mínimos de la onda, se denomina más específicamente **velocidad de fase**, mientras que la velocidad a la cual se desplaza el tren de ondas conjuntamente es la **velocidad de grupo**.

La **dispersión** es el fenómeno por el cual la velocidad de fase de una onda que se propaga por un medio depende de su frecuencia. Un medio en el cual se produce dispersión es un **medio dispersivo**.

La dispersión se producirá siempre que haya propagación de varias frecuencias en un medio dispersivo. Estas diversas frecuencias pueden estar presentes porque en realidad tenemos un tren de ondas y no una onda infinita, como hemos comentado hace un momento, o también porque la onda contenga varias frecuencias, independientemente de si se trata de un tren de ondas finito o de una onda infinita. Veremos con más detalle esta última situación en el módulo "Óptica geométrica", donde hablaremos de dispersión básicamente como resultado de este caso.

**Dispersión en un medio**

La dispersión en un medio puede estar causada por el material del medio, que responde de manera diferente a frecuencias diferentes, o puede estar causada por limitaciones geométricas de la forma del material.

El ejemplo más típico del primer caso es la dispersión de la luz cuando se propaga por un vidrio: la velocidad de fase depende de la frecuencia (color) de la luz y, así, los diferentes colores se refractan (se desvían) en ángulos diferentes.

Un ejemplo del segundo caso se da en la propagación de señales por fibras ópticas o, en general, por cualquier clase de guía de ondas, la geometría de las cuales determina qué frecuencias se pueden propagar y cuáles no y con qué velocidad.

Explicaremos más detalladamente el proceso de dispersión de la luz en el módulo "Óptica geométrica".

En los módulos "Óptica geométrica" y "Propagación de ondas electromagnéticas" se habla brevemente de la propagación de señales por fibras ópticas.

Ahora que ya hemos visto cualitativamente la diferencia entre velocidad de fase y velocidad de grupo y cómo se produce la dispersión, las describiremos con más precisión. En la ecuación 50 ya habíamos visto que la velocidad de propagación de la onda, la velocidad de fase, se puede expresar como:

$$v = \frac{\omega}{k}. \qquad (60)$$

La velocidad de grupo, en cambio, se expresa como la derivada de $\omega$ respecto a $k$ (no haremos su demostración, sólo os presentamos el resultado):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (61)$$

La relación que hay entre $\omega$ y $k$ se denomina **relación de dispersión**.

Pese a que no hacemos la demostración de este resultado, sí que vale la pena reflexionar un poco sobre por qué la velocidad de grupo es la derivada de $\omega$ respecto a $k$ y la velocidad de fase es $\omega/k$.

El siguiente párrafo, extraído de Feynman (1963), es bastante clarificador:

En la figura 13 podéis ver dos ondas de longitud de onda ligeramente diferente.

"Consideremos dos ondas, de longitud de onda ligeramente diferente. Están desfasadas, en fase, desfasadas, etc. Estas ondas representan, en realidad, las ondas en el espacio viajando con frecuencias ligeramente diferentes. Ahora, como la velocidad de fase, la velocidad de los nodos de estas dos ondas, no es exactamente la misma, pasa una cosa nueva. Supongamos que nos ponemos encima de una de estas ondas, en una cresta, y miramos a la otra; si las dos fueran a la misma velocidad, la otra onda se quedaría donde estaba respecto a nosotros, mientras viajamos encima de la primera. Vamos sobre esta cresta y justo a nuestro lado tenemos la cresta de la otra onda [...]. Pero resulta que las dos velocidades no son iguales. Hay una pequeña diferencia de frecuencia y, por lo tanto, una pequeña diferencia de velocidad, pero a causa de esta diferencia de velocidad, mientras viajamos sobre una onda, la otra se mueve hacia adelante, por ejemplo, o hacia atrás, respecto a nosotros. Así, a medida que pasa el tiempo, ¿qué le pasa a un nodo? Si movemos un tren de ondas un poco adelante, el nodo se mueve adelante (o atrás) una distancia considerable. Así, la suma de estas dos ondas tiene una envolvente y, a medida que las ondas viajan, la envolvente viaja con ellas a una velocidad diferente. La velocidad de grupo es la velocidad a que se transmitirán las señales moduladas."

R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands (1963), *The Feynman lectures on Physics* (p. 48-7)

La distinción entre las dos velocidades es importante, porque la velocidad de grupo es la velocidad a la cual se propagará cualquier modulación que tenga una onda.

Si calculamos la velocidad de fase $\omega/k$ en determinados medios podemos encontrar que ¡es superior a la velocidad de la luz en el vacío! Aún así, hay que pensar que para propagar algún tipo de información hay que modular una onda de alguna manera, si no, es imposible propagar ningún tipo de señal. Incluso enviar una onda senoidal perfecta para indicar alguna clase de acontecimiento (como por ejemplo una señal de radio en una única frecuencia y sin modular) también nos da una modulación: la onda no es infinita, la hemos "encendido" en algún momento y ya no tenemos, por lo tanto, una onda infinita, sino un tren de ondas, como hemos comentado antes. En resumidas cuentas, resulta imposible enviar información a una velocidad superior a la de la luz en el vacío, puesto que la velocidad de grupo, la velocidad con que se propaga cualquier modulación, es siempre inferior a la velocidad de la luz en el vacío.

Como la modulación de una onda es la forma en que podemos transmitir información de un lugar a otro mediante esta misma onda, resulta que cualquier clase de información que queramos transmitir (por ejemplo, una señal de SOS, mediante ondas electromagnéticas de la banda de radiofrecuencia) viajará a la velocidad de grupo, no a la velocidad de fase. En resumen: para transmitir información es necesario que haya algún "cambio" en la onda, y los "cambios" se propagan a la velocidad de grupo.

**Cálculo de la velocidad de fase y de grupo**

Supongamos que la relación de dispersión (ecuación 61) para una determinada onda que se propaga en un medio es

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{A}{\omega c}, \tag{62}$$

donde $A$ es una constante positiva y $c$ es la velocidad de la luz en el vacío. Fijaos que es la relación normal $k = \omega/c$ (ecuación 50) más un término que depende inversamente de la frecuencia. Calculemos la velocidad de fase (ecuación 60):

$$v = v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} - \frac{A}{\omega c}} = c\frac{\omega^2}{\omega^2 - A} \tag{63}$$

que es claramente superior a $c$, ya que $\omega^2/(\omega^2 - A)$ siempre es mayor que 1.

Calculemos ahora la velocidad de grupo. Como disponemos de $k$ en función de $\omega$, en

**Enlaces de interés**

Podéis ver unas animaciones de paquetes de ondas que se propagan con y sin dispersión en las direcciones siguientes:

- Con dispersión: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_packet_(dispersion).gif.
- Sin dispersión: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_packet_(no_dispersion).gif.

lugar de calcular $d\omega/dk$ (ecuación 61) calcularemos $dk/d\omega$:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} \tag{64}$$

y después hacemos la inversa y tendremos $v_g$. Calculemos, pues, esta derivada:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{A}{\omega^2 c}. \tag{65}$$

Por lo tanto:

$$v_g = c\frac{1}{1 + A/\omega^2}. \tag{66}$$

Y esto sí que es siempre menor que $c$, puesto que el cociente que acompaña a $c$ siempre será menor que 1. En resumen, con este ejemplo hemos visto que la velocidad de fase puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío, $c$, pero que sin embargo la velocidad de grupo será siempre inferior a $c$.

## 3.3. ¿Qué hemos aprendido?

Tras el tratamiento totalmente general de las ondas que hemos presentado en el apartado anterior, en este nos hemos centrado en un tipo concreto de ondas, las ondas armónicas, que son aquellas en las cuales la magnitud varía senoidalmente en función del tiempo.

Esta restricción puede parecer bastante importante, pero el teorema de Fourier nos garantiza que cualquier clase de onda se podrá expresar como la suma de ondas de tipo senoidal. Así, el estudio concreto de las ondas armónicas nos permite estudiar, en el fondo, cualquier tipo de onda. Y de hecho, en todo lo que queda de este módulo siempre trabajaremos con ondas armónicas.

En nuestro estudio de las ondas armónicas hemos introducido una serie de conceptos que son muy útiles en el análisis de fenómenos ondulatorios: la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia, el periodo y la amplitud. Estas magnitudes nos aparecerán repetidamente siempre que tratemos problemas relacionados con las ondas.

# 4. Superposición de ondas

Hasta ahora nos hemos dedicado a describir las ondas y a ver algunas de sus características. Pero siempre hemos considerado una única onda, de forma que ahora nos podemos preguntar: "¿y qué pasa cuando dos ondas se encuentran en el mismo lugar? ¿hay alguna clase de interacción entre ellas?"

A continuación intentaremos responder a estas preguntas y después pasaremos a algunos casos particulares, como los batidos, que se producen cuando se encuentran ondas de frecuencias muy parecidas, o las ondas estacionarias (ya en el apartado siguiente), que se producen cuando las ondas están confinadas en el espacio y no se pueden propagar indefinidamente.

## 4.1. El principio de superposición

Observad la primera imagen de la figura 11: hay dos ondas que se propagan por una cuerda, una hacia la derecha y la otra hacia la izquierda. Está claro que llegará un momento en que las dos se encontrarán en un mismo punto de la cuerda. ¿Qué pasara entonces? ¿Se destruirán ambas ondas? ¿Se creará una onda nueva?

Figura 11. Superposición de dos pulsos

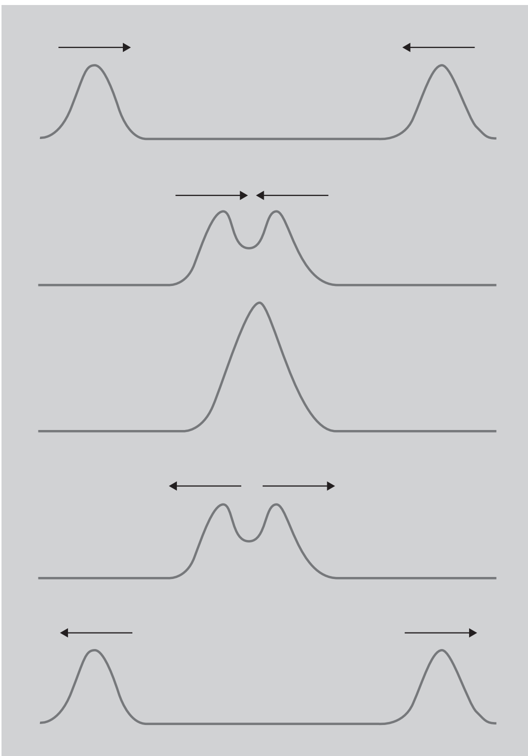


**Figura 11**

Dos pulsos de ondas se propagan por una cuerda en sentidos contrarios. Cuando se encuentran en un mismo punto, la perturbación en la cuerda resulta ser igual a la suma de las perturbaciones que cada una de las ondas provocaría por separado.

Lo que sucede en esta situación, que podéis ver en las imágenes de la figura 11, es que la forma resultante del "choque" entre las dos ondas es una nueva onda igual a la suma de las dos ondas iniciales. Es decir, el desplazamiento que la onda resultante provoca en la cuerda es igual a la suma de los desplazamientos que provocarían cada una de las ondas por separado. Esto es lo que se llama *principio de superposición*.

**Enlace de interés**

Podéis ver una animación que ejemplifica el principio de superposición en: http://www.st-andrews.ac.uk/~bds2/optics/applet2/superposition.htm. Es una miniaplicación de Java; hay que tener Java instalado.

Según el **principio de superposición**, cuando dos o más ondas se encuentran en un punto del espacio, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.

De esta manera, la función de onda que describirá la superposición de dos o más ondas será simplemente la suma de las dos o más funciones de onda de cada una de las ondas. Dicho de otro modo, si $u(x,t)$ es la función de onda que describe a una onda y $v(x,t)$ es otra función de onda que describe a otra onda diferente, la superposición de las dos ondas se describirá mediante la función de onda:

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \tag{67}$$

**Actividad**

Supongamos que $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ son dos funciones de onda que, en consecuencia, cumplen la ecuación de ondas 21. Demostrad que la suma de las dos funciones $y_3(x,t) = Ay_1(x,t) + By_2(x,t)$ también cumple la ecuación de ondas.

Indicación: recordad que la ecuación de ondas es (ecuación 21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{68}$$

### 4.2. Superposición de ondas armónicas

Para tratar matemáticamente la superposición de ondas nos limitaremos al caso de ondas armónicas, que son más fáciles de manipular. Recordad que esto no representa ningún gran problema, puesto que según el teorema de Fourier cualquier onda se puede expresar como la suma de ondas armónicas.

Consideraremos dos ondas armónicas de la misma amplitud y, para ver cómo es la onda resultante de su superposición, las sumaremos tal y como afirma el principio de superposición y veremos que obtenemos una nueva onda, diferente de las dos ondas originales. Partimos, pues, de las dos ondas armónicas siguientes:

$$y_1 = A\,\text{sen}(k_1x - \omega_1t) \tag{69}$$

$$y_2 = A\,\text{sen}(k_2x - \omega_2t + \delta) \tag{70}$$

donde $\delta$ es el desfase de la segunda onda respecto a la primera. Ya hemos dicho que escogemos dos ondas de la misma amplitud; podríamos plantear la situación con dos ondas de amplitudes diferentes, pero el análisis matemático se complica bastante y el resultado no es diferente conceptualmente. Así, la suma de las dos ondas armónicas $y_1$ e $y_2$, que simbolizaremos $y_s$, es:

$$y_s = y_1 + y_2 = A\,\text{sen}(k_1 x - \omega_1 t) + A\,\text{sen}(k_2 x - \omega_2 t + \delta). \tag{71}$$

Esta ecuación se puede simplificar usando la relación trigonométrica:

$$\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right). \tag{72}$$

En nuestro caso tenemos que

$$\theta_1 = k_1 x - \omega_1 t \tag{73}$$

$$\theta_2 = k_2 x - \omega_2 t + \delta \tag{74}$$

de modo que

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{k_1 x - \omega_1 t - k_2 x + \omega_2 t - \delta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{k_1 x - \omega_1 t + k_2 x - \omega_2 t + \delta}{2}\right). \tag{75}$$

Si agrupamos los términos del interior del seno y del coseno y definimos, por comodidad:

$$\Delta k = k_1 - k_2 \tag{76}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{77}$$

**Recordad**

$\Delta$ es la letra griega delta mayúscula y se acostumbra a emplear para simbolizar un incremento o una diferencia.

podemos expresar esta ecuación como:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta\omega t - \delta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t + \delta}{2}\right). \tag{78}$$

Esta expresión puede parecer algo compleja y no nos entretendremos demasiado en ella, pero vale la pena estudiar esta situación con más detalle en dos casos particulares: cuando las dos ondas tienen exactamente la misma frecuencia (y número de onda) y cuando las dos ondas tienen frecuencias muy próximas.

### 4.2.1. Superposición con frecuencias iguales

Si las dos frecuencias son iguales tenemos que $\omega_1 = \omega_2$, valor que simbolizaremos simplemente como $\omega$ y entonces $\Delta\omega = 0$, y también que $k_1 = k_2$, que simbolizaremos simplemente $k$ y $\Delta k = 0$. Aplicando todo esto en la ecuación 78 obtenemos:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \delta/2) \qquad (79)$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. ¿Cómo podemos interpretar este resultado? Fijaos que tenemos la expresión típica de una onda armónica, un seno de $kx - \omega t$, con una cierta fase inicial y una "cosa" delante del seno que debería ser la amplitud de la onda resultante. Si os fijáis bien, veréis que esta "cosa" es un factor constante, que no depende de $x$ ni de $t$. Este factor es precisamente la amplitud de la onda resultante, que sólo depende de $\delta$, la diferencia de fase entre las dos ondas originales:

$$A_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right). \qquad (80)$$

**Recordad que $\delta$ es la letra griega delta minúscula.**

Como el coseno siempre tiene un valor entre 1 y –1, la amplitud de la onda resultante será máxima (igual a $2A$) cuando $\delta = 0$, ya que entonces $\cos 0 = 1$. Igualmente, la amplitud será mínima (igual a cero) cuando $\delta = \pi$, porque entonces $\cos\pi = 0$.

**Recordad**

La amplitud es el valor máximo de la perturbación, sea positivo o negativo.

Así:

- En el primer caso, cuando $\delta = 0$, tendremos una onda de amplitud igual al doble de las ondas originales, la máxima que podemos obtener; esta situación se conoce como **interferencia constructiva**. Podéis ver esta situación en la figura 12a.
- En el segundo caso, cuando $\delta = \pi$, tendremos una onda de amplitud nula, es decir, no tendremos ningún tipo de onda; esta situación recibe el nombre de **interferencia destructiva**. Podéis ver esta situación en la figura 12b.
- Para cualquier otro valor de la diferencia de fase entre las ondas, nos encontraremos con una situación intermedia.

Figura 12. Interferencia constructiva y destructiva

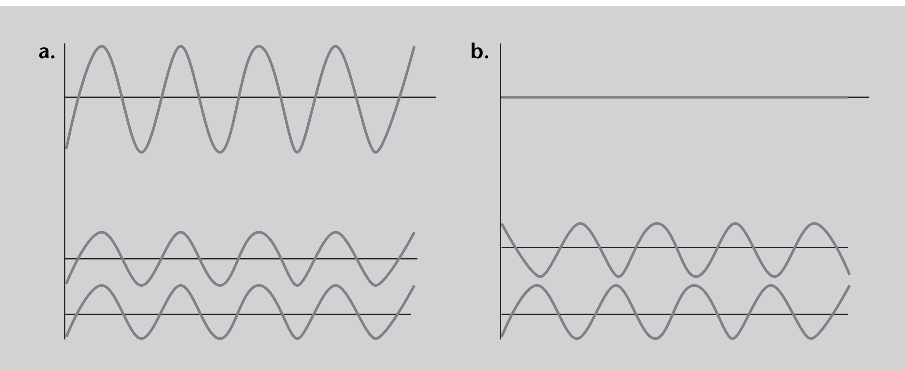



**Figura 12**

**a)** Interferencia constructiva de dos ondas armónicas.
**b)** Interferencia destructiva de dos ondas armónicas.

**Ejemplo. Interferencia de ondas**

Suponed que dos ondas de la misma frecuencia y amplitud se mueven en una misma dirección, de modo que se superponen. Su amplitud es de 4 cm.

**1)** Si la diferencia de fase entre ellas es $\pi/2$, ¿qué amplitud tiene la onda resultante de su superposición?

**2)** ¿Cuál debería ser la diferencia de fase para que la amplitud resultante también fuera igual a 4 cm?

**Solución**

**1)** Tenemos un desfase igual a $\pi/2$ y una amplitud de 4 cm, por lo tanto:

- $\delta = \pi/2$.
- $A = 0{,}4$ m.

Como acabamos de ver, la amplitud de la onda resultante sólo depende de la amplitud original y de la diferencia de fase entre las dos ondas, según la ecuación 80. Por lo tanto:

$$A_s = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\cdot 0{,}4\cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right). \tag{81}$$

Recordando que los ángulos siempre se expresan en radianes, el cálculo nos da:

$$A_s = 0{,}566 \text{ m}. \tag{82}$$

**2)** Ahora nos piden la situación contraria: determinar la diferencia de fase $\delta$ para obtener una amplitud resultante determinada:

- $A_s = 0{,}4$ m.
- $A = 0{,}4$ m.

En consecuencia, utilizando de nuevo la ecuación 80 tenemos:

$$0{,}4 = 2\cdot 0{,}4\cos\left(\frac{\delta}{2}\right). \tag{83}$$

Esto lo podemos reducir a

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{84}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\delta}{2} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \tag{85}$$

que da:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}. \tag{86}$$

Esto, en grados, son 60° y 300°, respectivamente, Por lo tanto:

$$\delta = \frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} \tag{87}$$

que, en grados son 120° y 600°, respectivamente. Pero 600° es lo mismo que 240°, puesto que 600° = 240° + 360°.

**Recordad que 360° son $2\pi$ radianes. Así, para pasar de radianes a grados hay que multiplicar por 360 y dividir por $2\pi$.**

### 4.2.2. Superposición con frecuencias muy cercanas: batidos

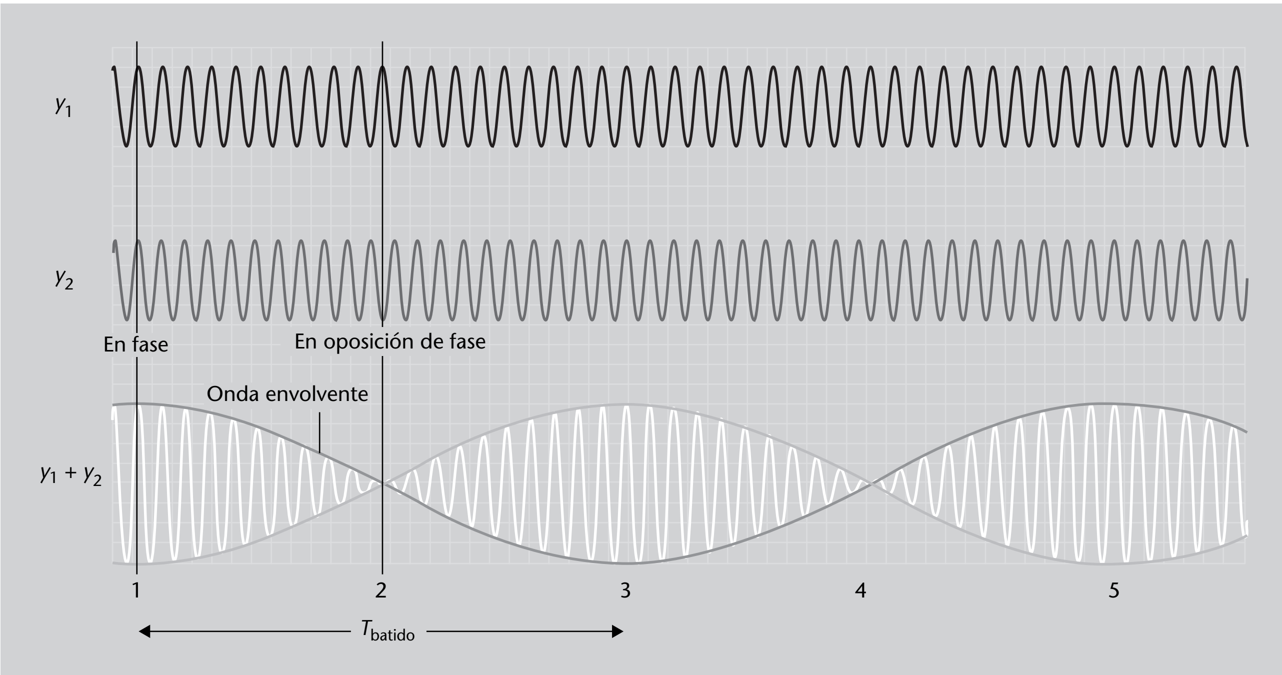
El otro caso particular que queremos estudiar de la ecuación 78 es el caso de la superposición de dos ondas con frecuencias ligeramente diferentes, es decir, frecuencias muy próximas. Esta situación da lugar al fenómeno de los **batidos** o **pulsaciones**. Quizás alguna vez, al oír determinados sonidos, como algunas notas musicales, sirenas o simplemente el zumbido constante de dos o más máquinas, habréis notado que, de repente, la intensidad del sonido empezaba a aumentar y disminuir, provocando una especie de latido. Este "latido" que oís son los batidos o pulsaciones, que se producen siempre que se superponen dos ondas las frecuencias de las cuales son ligeramente diferentes. Este es el fenómeno que estudiaremos a continuación.

**Enlace de interés**

Si queréis oír un fenómeno de batidos, escuchad el sonido que podéis encontrar en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beatfrequency.ogg.

Sin embargo, antes de analizar el problema matemáticamente, observad la figura 13, que nos muestra estas dos ondas. En esta imagen las dos ondas de la parte superior ($y_1$ e $y_2$), superpuestas, dan lugar a la onda inferior. La representación es en función del tiempo y, por lo tanto, muestra cómo evolucionan las ondas a lo largo del tiempo en un punto determinado, sin tener en cuenta su desplazamiento en el espacio.

Figura 13. Superposición con frecuencias ligeramente distintas: batidos




Supongamos que las dos ondas empiezan estando en fase, de forma que se suman tal y como se ve en el punto 1 de la figura. La segunda onda tiene una frecuencia ligeramente superior a la primera, de forma que la va adelantando lentamente hasta que, finalmente, se encuentra medio ciclo por delante. En este momento, que corresponde al punto 2 de la figura, las dos ondas se encuentran en oposición de fase y su suma es igual a cero; así, la amplitud de la onda resultante es nula. Posteriormente, la segunda onda sigue adelantan-

**Figura 13**

La superposición de la onda $y_1$ y la onda $y_2$, con frecuencias ligeramente diferentes, da lugar a la onda que se representa en la parte inferior, $y_1 + y_2$, que muestra el fenómeno de los batidos.

do a la primera hasta que vuelven a encontrarse ambas en fase y la amplitud resultante vuelve a ser máxima (punto 3 de la figura). Fijaos que la onda resultante tiene una frecuencia muy parecida a la de las dos ondas superpuestas (a continuación determinaremos su valor exactamente) y una amplitud que varía lentamente entre un valor máximo y cero. En el caso del sonido, esto correspondería a un sonido que va subiendo y bajando de volumen lentamente, como el que habéis podido oír al empezar este subapartado si habéis visitado el enlace de interés que os hemos indicado.

Ahora analicemos el problema matemáticamente, a partir de la ecuación general 78. Como las dos frecuencias son muy parecidas, podemos considerar una frecuenca angular media:

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{88}$$

y un número de onda medio:

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{89}$$

Así, la expresión 78 quedará:

$$y_s = 2A\cos\left(\frac{\Delta kx - \Delta\omega t - \delta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(k_m x - \omega_m t + \delta/2\right). \tag{90}$$

Para entender mejor este resultado, olvidémonos ahora de la dependencia espacial (la dependencia en $x$), preocupémonos sólo de lo que sucede en un determinado punto en función del tiempo (por ejemplo, nos podemos centrar en el punto $x = 0$) y consideremos $\delta = 0$:

$$y_b = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\operatorname{sen}\left(\omega_m t\right). \tag{91}$$

Es decir, tenemos una onda con una frecuencia $\omega_m$ la amplitud de la cual resulta modulada (es decir, modificada) por el factor $\cos(\Delta\omega/2t)$, que es una modulación de frecuencia $\Delta\omega/2$. Pero fijaos que esta frecuencia es la de la modulación, la de la envolvente, pero los máximos y mínimos resultantes se producen cada mitad de periodo (podéis observarlo en la figura 13). Por lo tanto, la frecuencia que se detecta de los batidos es el doble de la frecuencia de modulación:

**Los batidos no son más que un ejemplo de modulación de amplitud (AM, de amplitud modulada).**

$$\omega_{\text{batido}} = \Delta\omega. \tag{92}$$

Esta frecuencia se llama **frecuencia de batido** y es mucho más lenta que las frecuencias originales y que la frecuencia media $\omega_m$.

Si estas dos ondas fueran ondas sonoras, ¿qué oiríamos? Suponiendo que la diferencia de frecuencias fuese lo suficientemente pequeña, la onda resultante resultaría intensa cuando las dos componentes estuvieran en fase y muy débil cuando estuvieran en contrafase. El tono de la onda resultante (la frecuencia) estaría a medio camino entre el de las dos ondas originales y la oiríamos más fuerte y más débil a intervalos regulares. Esto es lo que habréis podido oír en el sonido que os hemos presentado al principio de este subapartado 4.2.2. Cuando la diferencia entre las dos frecuencias supera unas pocas decenas de hercios ya empezaríamos a oír dos notas (dos frecuencias) claramente separadas y desaparecerían los batidos.

**Enlace de interés**

Podéis consultar la dirección http://www.phys.unsw.edu.au/jw/beats.html#sounds, donde encontraréis ejemplos de superposición de ondas sonoras que podréis escuchar y determinar si las oís como un batido o como notas separadas.

**Afinación de instrumentos**

El fenómeno de los batidos se utiliza muy a menudo en la afinación de instrumentos. Si tenemos un diapasón, que da una frecuencia precisa que nos sirve de referencia, y, al mismo tiempo, hacemos que el instrumento que queremos afinar emita un sonido que teóricamente debe ser de aquella misma frecuencia, podremos saber si está ligeramente desafinado. Si lo está, oiremos batidos; entonces hay que ir actuando sobre el instrumento (por ejemplo, tensando o destensando una cuerda en los instrumentos de cuerda) hasta que oigamos que desaparecen los batidos (o se hacen mínimos), lo que indica que la diferencia entre las frecuencias del diapasón y del instrumento es nula o muy pequeña.

Fuente: Wikimedia Commons; autor: Till Westermayer

**Clavijero de un piano vertical**

El fenómeno de los batidos se utiliza para afinar instrumentos de cuerda, como el piano. Cada nota corresponde a una, dos o tres cuerdas, que tienen que estar perfectamente afinadas a la nota correspondiente. Su frecuencia se puede ajustar (afinar) girando más o menos las clavijas a las que están sujetas. En la parte inferior podéis ver los martillos que golpean a las cuerdas cuando se pulsa una tecla y, casi tocando a las cuerdas, los apagadores, que presionan las cuerdas una vez se deja de pulsar la tecla, para evitar que sigan vibrando.

**Ejemplo. Afinación de instrumentos**

Suponed que queremos afinar la cuerda de un piano (en realidad pueden ser dos cuerdas, pero ahora no entraremos en esto) correspondiente a la tecla que da la nota *la* central del teclado. Idealmente, el *la* central debe ser de una frecuencia de 440 Hz; por lo tanto, necesitamos un diapasón de 440 Hz. Golpeamos el diapasón y, a la vez, tocamos la tecla del *la* del piano y oímos unos batidos a 3 pulsos por segundo. Esto nos indica que el piano está algo desafinado, pero ¿qué nota nos está dando?

Como oímos 3 pulsos por segundo, la frecuencia de batido es de 3 Hz, y según la ecuación 92:

$$3 = \omega_{\text{piano}} - 440 \tag{93}$$

o bien:

$$3 = 440 - \omega_{\text{piano}} \tag{94}$$

según si la frecuencia que da el piano es más alta o más baja que el diapasón. Por lo tanto, la frecuencia del piano será 443 Hz o 437 Hz.

**Notas musicales**

En música, una nota no es más que un sonido de una frecuencia determinada (y también de una duración determinada, pero este aspecto ahora no nos interesa).

**Batidos y registros de un órgano**

Un registro es un conjunto de tubos de un órgano que reciben el aire conjuntamente. Corresponden a los botones que hay sobre el teclado del órgano y el instrumentista los puede activar o desactivar para conseguir varios tipos de sonidos.

Como curiosidad en lo referente a los batidos podemos señalar que algunos órganos disponen de un registro denominado *voix céleste* (‘voz celestial’, en francés) que consiste precisamente en uno o dos conjuntos de tubos muy ligeramente desafinados respecto a las notas correctas. Este registro se utiliza junto con otros registros para provocar batidos que dan al sonido principal una ligera ondulación y un efecto agradable y cálido.

### 4.3. ¿Qué hemos aprendido?

Avanzando algo más en nuestro estudio de las ondas, nos hemos planteado la cuestión de qué pasa cuando dos o más ondas se encuentran en un punto del espacio. Hemos visto que el principio de superposición nos garantiza que cuando se encuentran dos o más ondas, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales. Esto nos ha permitido describir matemáticamente este fenómeno, cosa que hemos hecho detalladamente en el caso de ondas armónicas.

El resultado obtenido lo hemos aplicado a un par de casos particulares más simples pero que son lo suficientemente representativos de muchos fenómenos físicos: el caso en que las dos ondas tienen la misma frecuencia y el caso en que tienen frecuencias parecidas (caso que da lugar a los batidos).

**El *la* y los 440 Hz**

En el ejemplo del piano desafinado os hemos dicho que la nota *la* corresponde a una frecuencia de 440 Hz. En realidad, esto no es siempre así. El *la* corresponde a 440 Hz en la afinación estándar internacional, pero algunas orquestas prefieren afinar los instrumentos de forma que el *la* central corresponda a 442 o 444 Hz, mientras que en la interpretación de música barroca a menudo se utiliza una afinación del *la* a 415 Hz, un poco más grave.

# 5. Ondas y condiciones de contorno

En todo lo que hemos hecho hasta ahora sobre las ondas, siempre hemos considerado que se podían propagar indefinidamente, que el medio por el cual viajaban no tenía ningún límite o frontera. En muchos casos esto no es así. Si volvemos a los ejemplos con que empezábamos el módulo, el charco de agua y la cuerda de tender la ropa, ya vemos que las ondas que producimos no se pueden propagar indefinidamente: el charco es limitado, en algún momento las ondas llegarán al final; en la cuerda pasa lo mismo: está sujetada por dos extremos y la onda llegará al final tarde o temprano.

Ahora, pues, tenemos que dar un paso adelante y enfrentarnos a un problema que todavía no habíamos considerado: si el medio por donde se propaga una onda está limitado, tiene una "frontera", ¿qué le pasa a la onda cuando llega a este límite? ¿Desaparece? ¿Rebota? ¿Provoca algún efecto en el medio que hay al otro lado de la frontera?

Experimentalmente se observa que cuando una onda llega a la frontera que determina la separación entre el medio por donde se está propagando y otro medio, parte de la energía y de la cantidad de movimiento que transporta la onda se transmite al otro medio, mientras que otra parte de la energía y del momento "permanece" en la onda, que resulta reflejada (sale "rebotada", podríamos decir). Normalmente, la parte de la energía que se ha transmitido provoca la formación de una nueva onda en ese otro medio. Según como sea el medio, la nueva onda que se ha creado se puede propagar fácilmente, y se observa sin dificultad, o bien se amortigua muy rápidamente.

**Ejemplo. Propagación y amortiguamiento de ondas**

Algunos ejemplos nos ayudarán a comprender mejor este hecho:

- Cuando la luz (que recordad que es una onda electromagnética) llega a un medio cualquiera, parte de su energía se refleja y parte se transmite hacia aquel medio. Si el medio es transparente tenemos un caso en que se crea una nueva onda, que se propaga fácilmente en este segundo medio y se observa sin dificultad (¡los medios transparentes dejan pasar la luz!). En cambio, si el medio es opaco, la parte de energía que se ha transmitido no se puede propagar y se amortigua muy rápidamente (y, además, la energía que transportaba la luz se transforma en otros tipos de energía; generalmente en energía térmica, es decir, el medio se calienta).

- Otro ejemplo. Cuando oímos el televisor de los vecinos es porque las ondas sonoras que emite se propagan por el aire y cuando llegan a la pared que separa nuestro piso del suyo, parte de su energía rebota y parte se transmite al segundo medio (la pared). En este caso, la onda que se crea en el segundo medio se puede propagar con una cierta facilidad y llega a la segunda superficie de la pared (la que da a nuestro piso), donde nuevamente vuelve a cambiar de medio y se propaga por el aire de nuestra habitación hasta nosotros. No oímos perfectamente el televisor de los vecinos por varias razones: en primer lugar, pese a que la onda se ha propagado relativamente bien, también se ha amortiguado un poco, es decir, ha perdido algo de energía; en segundo lugar, no todas las frecuencias se han transmitido igual de bien (por eso es mucho más fácil oír sonidos de baja frecuencia que sonidos muy agudos).

Hay que tener en cuenta que para cada tipo de onda y para cada frontera entre medios diferentes los procesos físicos concretos que se producen en esta reflexión y transmisión de energía pueden llegar a ser muy complejos, implicar reflexiones y transmisiones múltiples y otras complicaciones. Aún así, el proceso básico es el que acabamos de comentar: parte de la energía se transmite al medio que hay al otro lado de la frontera y parte se queda en el medio inicial.

En el módulo "Propagación de ondas electromagnéticas" podéis encontrar las expresiones matemáticas que describen qué parte de la energía se transmite al segundo medio y qué parte se refleja en cada caso particular. Allí se hace para el caso de ondas electromagnéticas, pero los resultados son generales para cualquier clase de ondas.

### 5.1. Reflexión y refracción

Como ya hemos dicho en el apartado anterior, cuando una onda llega a la frontera entre dos medios, parte de su energía se transmite al segundo medio y parte se queda en el medio inicial. El proceso por el cual parte de la energía se queda en el medio inicial es la **reflexión**.

Por ejemplo, en la figura 14 podéis ver qué pasa cuando una onda que se propaga por una cuerda llega a un punto fijo, donde está sujeta. Cuando la onda llega al final se refleja y, además, resulta invertida. Si, en cambio, la cuerda está unida a un extremo libre, la onda se refleja pero no resulta invertida.

**Enlace de interés**

Podéis experimentar con una animación en Java en: http://www.surendranath.org/Applets/Waves/TwaveRefTran/TwaveRefTranApplet.html.

Figura 14. Reflexión de una onda en una cuerda

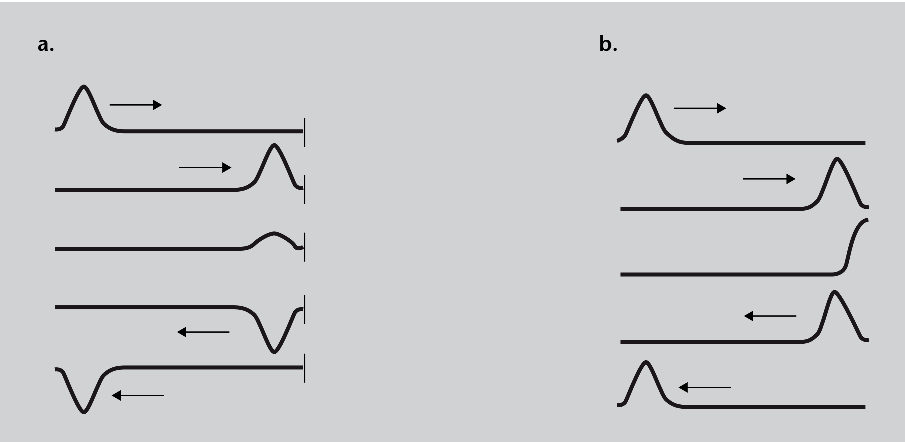



**Figura 14**

**a.** Reflexión en un extremo fijo: la onda reflejada se invierte.
**b.** Reflexión en un extremo libre: la onda reflejada no se invierte.
En ambos casos, en una situació real, una pequeña parte de la energía de la onda también pasaría al segundo medio (fuese cual fuese), en forma de vibraciones en este segundo medio.

Cuando, en la transmisión, la onda que se forma al otro lado de la frontera sigue una dirección diferente a la de la onda original, se habla de **refracción**. La refracción normalmente se caracteriza mediante la dirección de la onda incidente y de la onda transmitida respecto a la dirección perpendicular (también denominada *normal*) a la superficie de separación. Cuando la velocidad de la onda en el segundo medio es mayor que en el medio inicial, la onda se desvía alejándose de la normal; cuando la velocidad de la onda en el segundo medio es menor que en el primero, en cambio, la onda se desvía acercándose a la normal.

En el módulo "Óptica geométrica" se estudia detalladamente la refracción y se puede ver que el proceso sigue siempre una ley determinada, la ley de Snell, que establece cuantitativamente la desviación de la onda transmitida.

### 5.2. Ondas estacionarias

Ahora consideraremos, por simplicidad, una onda que se propaga en una dimensión en un medio que tiene una longitud finita, $L$, y la frontera del cual es perfectamente reflectora, es decir, no hay transmisión de energía a otro medio vecino. En esta situación, cuando la onda llegue a la frontera rebotará y volverá hacia atrás. De este modo tendremos un caso particular de superposición de dos ondas, de la misma amplitud y frecuencia, que viajan en sentidos contrarios.

Como consideramos ondas armónicas (ecuación 41), una de las ondas será:

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{95}$$

y la otra:

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t + \phi). \tag{96}$$

Fijaos que la primera onda viaja hacia la derecha y la segunda, hacia la izquierda (esto lo podéis ver porque la primera depende de $kx - \omega t$, mientras que la segunda depende de $kx + \omega t$). La segunda onda, además, incorpora un desfase $\phi$ respecto a la primera, ya que, de momento, no sabemos qué fase tendrá cuando rebote en la frontera (de hecho, esto dependerá de la longitud del medio por donde viaja, como veremos a continuación).

La suma de las dos ondas, nuevamente, nos lleva a:

$$y_s = 2A\,\mathrm{sen}(kx + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2), \tag{97}$$

donde hemos aplicado la ecuación 72 y hemos seguido el mismo procedimiento que en el apartado 4.2. Fijaos que ahora ya no tenemos una función de onda, no tenemos una función de la forma $f(x \pm vt)$ (ecuación 3), ya que no tenemos una expresión del tipo $x - vt$. Ahora, en cada punto del espacio se produce un movimiento armónico simple con una amplitud que depende de la posición en que se halla. Esta amplitud vale $2A\,\mathrm{sen}(kx + \phi/2)$. Fijaos que este factor es, efectivamente, la amplitud, ya que no tiene dependencia en el tiempo y sólo depende de la posición. Una onda descrita por la ecuación 97 se denomina **onda estacionaria**. En la figura 15 podéis ver un ejemplo real de onda estacionaria, creada en una cuerda sujeta por ambos extremos.

Una **onda estacionaria** es el fenómeno resultante de la propagación simultánea en sentidos contrarios de dos (o más) ondas de la misma frecuencia, que forma una figura en la que hay puntos que son fijos y puntos que oscilan con amplitud máxima. En lugar de observar una onda que se propaga se ve una vibración estacionaria pero de amplitud diferente en cada punto.

Figura 15. Onda estacionaria creada en una cuerda sujeta por ambos extremos

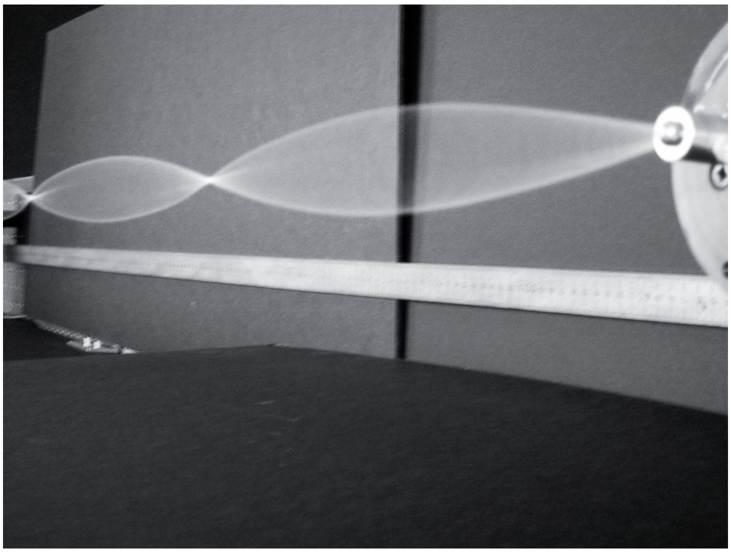


**Figura 15**

En cada punto de la cuerda se produce un movimiento armónico simple con una amplitud que depende de la posición en que se encuentra. Es decir, cada punto de la cuerda vibra siempre con la misma amplitud.

**Una onda estacionaria ¿es una onda?**

Fijaos que para que una onda sea una onda debe cumplir que su función de onda sea del estilo $f(x \pm vt)$, cosa que aquí no se cumple. Recordad, también, que en una onda hay transporte de energía y de cantidad de movimiento; en cambio, en una onda estacionaria no se produce este transporte: en cada punto de la onda hay siempre la misma energía (porque cada punto siempre vibra con la misma amplitud). Así, en sentido estricto, una onda estacionaria no es realmente una onda. Pero tranquilos, no hay necesidad de preocuparse; como las ondas estacionarias provienen de la superposición de ondas "de verdad", se pueden describir perfectamente con las herramientas que utilizamos para las ondas (¡como acabamos de ver!) y hablaremos de ellas como *ondas* sin preocuparnos más.

En resumen, lo que es importante es recordar que cuando dos ondas armónicas se superponen en una zona limitada en el espacio, de forma que van rebotando continuamente en las fronteras, se crea un tipo de ondas que no parecen desplazarse (por ello se denominan *estacionarias*). Es una situación en la cual en cada punto del espacio se produce una vibración la amplitud de la cual viene determinada por una función senoidal que depende del punto en cuestión.

Vale la pena remarcar que, dado que la amplitud en cada punto depende de una función seno, habrá puntos en que la amplitud será siempre nula y otros puntos en que la amplitud será siempre máxima, igual a $2A$. Los puntos en que la amplitud es nula se denominan **nodos**, y los puntos en que es máxima se denominan **vientres** o **antinodos**. En la figura 15 podéis ver los nodos y los vientres claramente: los nodos son los puntos donde la cuerda no está vibrando, mientras que los vientres son los puntos donde lo hace con amplitud máxima. Intentemos ahora calcular dónde se encuentran exactamente estos puntos: su posición dependerá de las condiciones de contorno particulares del caso que estemos tratando, de modo que lo haremos para dos casos bastante ilustrativos.

### 5.2.1. Ondas estacionarias con los dos extremos fijos

Supongamos ondas estacionarias que se producen en un medio que está en el eje $x$ y que empieza en $x = 0$ y acaba en $x = L$ (y, en consecuencia, tiene longitud $L$), con paredes perfectamente reflectoras en las cuales la amplitud de la onda tiene que ser igual a cero (por ejemplo, los extremos de una cuerda sujeta con firmeza por sus extremos, como en el caso de la figura 15). Podéis ver un esquema de esta situación en la figura 16. En resumen, pues, se deben cumplir las condiciones de contorno siguientes: en los extremos la amplitud, la altura de la onda, tiene que ser cero. Expresado matemáticamente, para $x = 0$ y $x = L$, $y_s = 0$, es decir (aplicando la ecuación 97):

$$\text{sen}(k0 + \phi/2) = 0 \tag{98}$$

y

$$\text{sen}(kL + \phi/2) = 0. \tag{99}$$

Figura 16. Ondas estacionarias en un medio con fronteras perfectamente reflectoras

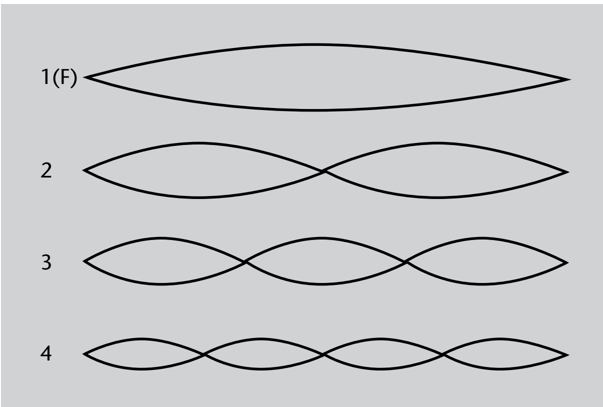



**Figura 16**

Ondas estacionarias en un medio con los extremos perfectamente reflectores. Están representados el modo fundamental (1) y los tres primeros armónicos.

Para satisfacer la primera condición sólo puede ser que $\phi = 0$, de modo que la segunda condición se reduce a:

$$\text{sen}(kL) = 0. \tag{100}$$

Como sabemos que la función seno es igual a cero sólo cuando su argumento es igual a cero o a un múltiplo de $\pi$, la condición queda como:

$$kL = n\pi \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{101}$$

Ya habíamos visto en el subapartado 3.1 que el número de onda y la longitud de onda están relacionados mediante la ecuación 43, $k = 2\pi/\lambda$, de modo que si lo sustituimos en la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{102}$$

**La notación**
**$kL = n\pi \quad (n = 1,2,\ldots,)$**
**significa que $kL$ es igual $n\pi$ y $n$ puede tener cualquiera de los valores que se indican entre paréntesis, es decir, 1, 2, 3, 4, etc.**

y, reordenando los términos:

$$\lambda = \frac{2}{n}L \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{103}$$

Fijaos, pues, que sólo tenemos solución para la ecuación 100 cuando las ondas tienen unas longitudes de onda concretas, que vienen determinadas por la longitud del medio: podremos tener ondas de longitud de onda igual a $2L$, $L$, $(2/3)L$, $(1/2)L$, $(2/5)L$, etc.

Por otro lado, como la frecuencia está relacionada con la longitud de onda por $f\lambda = v$ (ecuación 49), podemos reescribir la ecuación 103 en función de la frecuencia:

$$f = n\frac{v}{2L} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{104}$$

La frecuencia más baja posible, que corresponde a $n = 1$, se llama **frecuencia fundamental** y tiene el valor:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \tag{105}$$

con una longitud de onda:

$$\lambda_1 = 2L \tag{106}$$

Todas las frecuencias superiores a la fundamental que se pueden generar en este sistema se denominan **armónicos**. Así, tenemos:

- la **frecuencia fundamental** o primer armónico, de frecuencia $f_1 = v/2L$ y longitud de onda $\lambda_1 = 2L$,
- el **segundo armónico**, de frecuencia doble a la fundamental $f_2 = v/L$ y la mitad de longitud de onda $\lambda_2 = L$,
- el **tercer armónico** de frecuencia triple a la fundamental $f_3 = 3v/2L$ y longitud de onda $\lambda_3 = 2L/3$,
- etc.

Este conjunto de frecuencias recibe el nombre de **serie armónica** y son las **frecuencias naturales** del sistema, es decir, las frecuencias a las que puede vibrar. En la figura 16 podéis ver una representación del modo fundamental y los armónicos en este caso.

**No hay que confundir la serie armónica de frecuencias con la serie armónica matemática, que es la suma:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

### 5.2.2. Ondas estacionarias con un extremo libre

Otra condición de contorno que se puede dar a veces en las ondas estacionarias es un extremo fijo, con amplitud nula, y otro extremo con amplitud máxima (un extremo "abierto", como pasa en un tubo de órgano, por ejemplo). Esta situación se puede ver representada en la figura 17. En este caso, las condiciones de contorno que tenemos que imponer cambian ligeramente: en un extremo la amplitud de la onda tiene que ser cero, mientras que en el otro tiene que ser máxima. Expresado matemáticamente, para $x = 0$, $y_s = 0$ y para $x = L$, $y_s = 2A$ y, por lo tanto (utilizando de nuevo la ecuación 97):

$$\mathrm{sen}(k0 + \phi/2) = 0 \tag{107}$$

y

$$\mathrm{sen}(kL + \phi/2) = 1. \tag{108}$$

Figura 17. Ondas estacionarias en un medio con un extremo perfectamente reflector y el otro extremo abierto

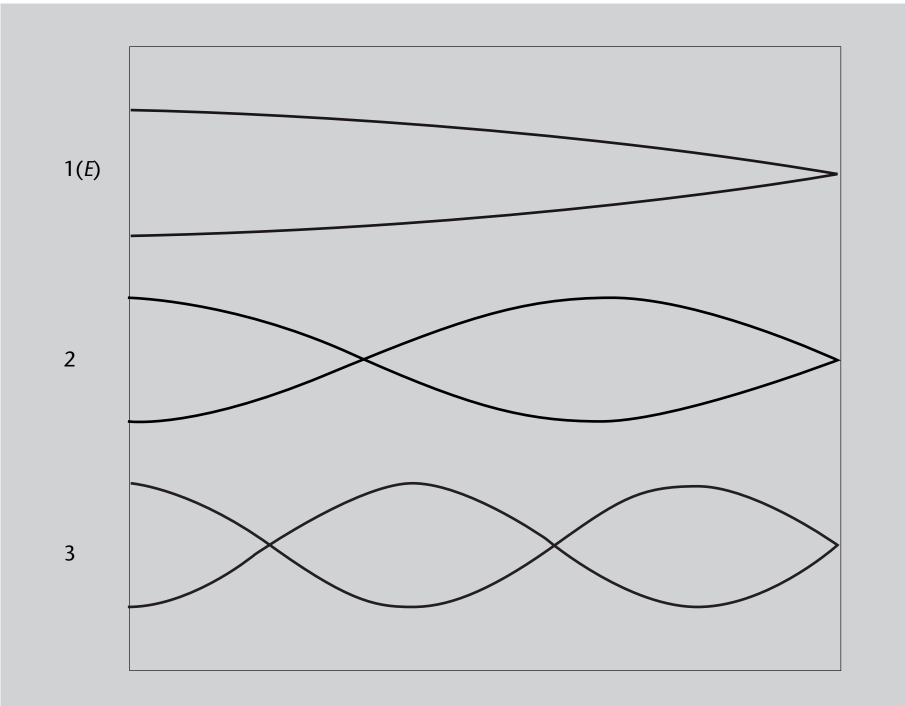



**Figura 17**

Ondas estacionarias en un medio con un extremo perfectamente reflector y el otro extremo abierto. Están representados el modo fundamental (1) y los dos primeros armónicos.

Para satisfacer la primera condición sólo puede ser que $\phi = 0$ (fi igual a cero), de modo que la segunda condición se reduce a:

$$\mathrm{sen}(kL) = 1. \tag{109}$$

Como sabemos que la función seno es igual a uno sólo cuando su argumento es igual a un múltiplo impar de $\pi/2$, la condición queda como:

$$kL = \frac{n}{2}\pi \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \tag{110}$$

Ahora, si tenemos en cuenta que $k = 2\pi/\lambda$ (ecuación 43), la condición queda reducida a:

$$\lambda = \frac{4}{n}L \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \tag{111}$$

o, en función de la frecuencia:

$$f = n\frac{c}{4L} \qquad (n = 1,3,5,\ldots) \tag{112}$$

En la figura 17 podéis ver una representación del modo fundamental y los armónicos en este caso.

La situación de ondas estacionarias es bastante común, y se produce, por ejemplo, en las cuerdas o los tubos de instrumentos musicales; con ondas electromagnéticas en cavidades metálicas; en barras, columnas y vigas con extremos fijos, etc. Y no sólo se producen ondas estacionarias en sistemas unidimensionales, también las encontramos en superficies bidimensionales limitadas por condiciones de contorno.

**Enlace de interés**

Podéis observar animaciones de los diferentes modos de oscilación de una superficie con condiciones de contorno circulares en: http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Drum_vibration_animations.

**Instrumentos de viento**

La situación de ondas estacionarias con un extremo abierto se produce en los instrumentos musicales de viento, como acabamos de comentar. ¿Quiere esto decir que un instrumento de viento no puede hacer todas las notas que quiera? ¿Podrá sólo hacer una nota fundamental y sus armónicos, correspondientes a la longitud que tenga el tubo del instrumento?

Bueno, sí y no. Vamos por partes. En primer lugar, tanto los instrumentos de viento madera (como por ejemplo las flautas o los oboes) como los instrumentos de viento metal (como por ejemplo las trompetas o las trompas) disponen de agujeros, válvulas o pistones que permiten modificar a voluntad la longitud efectiva del instrumento. Es decir, cambiamos la longitud $L$ que hemos considerado al hacer el estudio de este caso. Así, podremos hacer prácticamente cualquier nota fundamental y, en consecuencia, también todos sus armónicos.

Pero esto no siempre ha sido así. Antiguamente los instrumentos de viento metal no disponían de válvulas ni pistones, de modo que su longitud era fija. Estos instrumentos se denominan *naturales* y, efectivamente, sólo pueden hacer la nota fundamental de su longitud y los armónicos correspondientes. Os podéis preguntar también cómo se pueden hacer los diferentes armónicos si no se puede cambiar nada en el instrumento. Bueno, sí que hay una cosa que se puede cambiar: los labios del instrumentista. Aquí ya entramos en cuestiones de técnica musical, pero los diferentes armónicos se consiguen variando la fuerza y la forma de los labios y del aire que se sopla. Los instrumentos naturales eran los instrumentos habituales de metal durante el Renacimiento y el Barroco, y a menudo se siguen utilizando cuando se interpreta música de aquella época.

**Lectura complementaria**

Os recomendamos la lectura del capítulo 49 de las *The Feynman Lectures on Physics*, donde hay una explicación muy detallada y comprensible de las ondas estacionarias y los modos de oscilación, también en dos dimensiones.

**Actividad**

En la película *Voyage to the Bottom of the Sea* (1961) un barco quiere determinar la profundidad a que se encuentra el *Seaview*, un submarino sumergido. El emisor del barco, situado a nivel del mar, emite ondas sonoras que interfieren con las ondas reflejadas por la cubierta del submarino. Se producen nodos a 7 cm del foco emisor y 0,1 s tras ser emitidas ya no se reciben ondas reflejadas. Sabiendo que la frecuencia de las ondas empleadas es de 5.000 Hz y que su velocidad es independiente de la presión del agua, determinad a qué profundidad se halla el submarino. [Adaptado de la obra de Pont y Moreno (1994). *Física y ciencia ficción*, p. 269]

**Actividad**

En el texto hemos estudiado y calculado las ondas estacionarias que se producen en un sistema en que dos extremos están cerrados (y entonces es obligatorio que en los extremos haya un nodo) y en un sistema con un extremo cerrado y uno abierto (y entonces se impone que en un extremo haya un nodo y en el otro un vientre). Os invitamos ahora a hacer el mismo análisis pero en el caso de los dos extremos abiertos. En este caso la condición a imponer será la presencia de vientres en cada uno de los extremos.

### 5.3. Difracción

En los dos subapartados anteriores hemos visto qué les pasa a las ondas cuando se encuentran con una frontera entre dos medios, pero hay otra situación que todavía debemos considerar: ¿qué pasa cuando una onda se encuentra con una frontera que no "cierra" completamente el medio por donde se está propagando? En otras palabras, ¿qué pasa cuando se encuentra con un obstáculo que no cubre todo el frente de ondas, o con una frontera entre dos medios que tiene un agujero?

**Luz y difracción**

La observación de la difracción con la luz fue uno de los argumentos de más peso para la hipótesis de que la luz es una onda. Si la luz estuviera formada por partículas no se produciría este fenómeno, puesto que las partículas no "se abren" cuando pasan por un agujero.

A la parte del frente de ondas que choca directamente con el obstáculo le pasará exactamente lo que hemos comentado en los subapartados anteriores: una parte de la energía de la onda rebotará y otra pasará al segundo medio. En cambio, la parte del frente de ondas que no se encuentra molestada por el obstáculo o se encuentra delante del agujero parecería que podría seguir propagándose normalmente. Pues bien, no es exactamente así: el frente de ondas tiende a rodear a un obstáculo y a "abrirse" cuando pasa por un agujero. Es el fenómeno de la **difracción**.

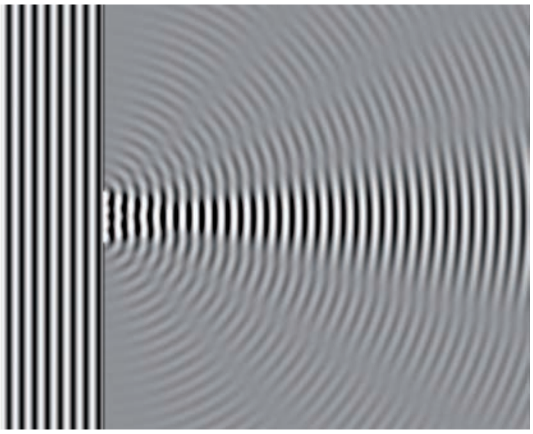
En el módulo "Óptica geométrica" se habla de la luz y de la difracción.

La **difracción** es la desviación en la propagación de una onda cuando esta se encuentra con obstáculos o atraviesa aberturas.

En las figuras 18 y 19 tenéis unos ejemplos de difracción de frentes de ondas planos por aberturas diversas. En todos los casos podéis observar que, tras atravesar la abertura, los rayos (y los frentes de ondas), en lugar de proseguir su propagación en línea recta, "se abren" como si hubiesen salido de la abertura en todas direcciones (tened en cuenta que la figura 18 es una representación precisa y exacta, mientras que la figura 19 sólo es un esquema aproximado).

**Recordad que los rayos son siempre perpendiculares al frente de ondas.**

Figura 18. Difracción de un frente de ondas plano por una pequeña abertura



Fuente: Wikimedia Commons; autor: Dicklyon

**Figura 18**

Simulación numérica (por ordenador) de la difracción de un frente de ondas plano al llegar a una frontera que contiene un pequeño agujero. Las ondas que llegan a la frontera se reflejan (pero la reflexión no se muestra en la figura). Las ondas que llegan al agujero siguen adelante, pero en lugar de seguir su dirección original, "se abren" y se propagan como si tuvieran su origen en la abertura.

La difracción se produce siempre, pero sus efectos son más pronunciados cuando las ondas implicadas tienen una longitud de onda del mismo orden de magnitud que las dimensiones de los obstáculos o aberturas que provocan la difracción. En el caso de las ondas sonoras, como las longitudes de onda van desde algunos centímetros hasta unos cuantos metros, la difracción es un fenómeno muy habitual, puesto que las dimensiones típicas de los objetos cotidianos también están entre unos centímetros y unos cuantos metros. En cambio, en el caso de la luz, las longitudes de onda son del orden de la diezmillonésima del metro (del orden de $10^{-7}$ m) y, por lo tanto, no la podemos observar habitualmente.

Figura 19. Difracción de un frente de ondas

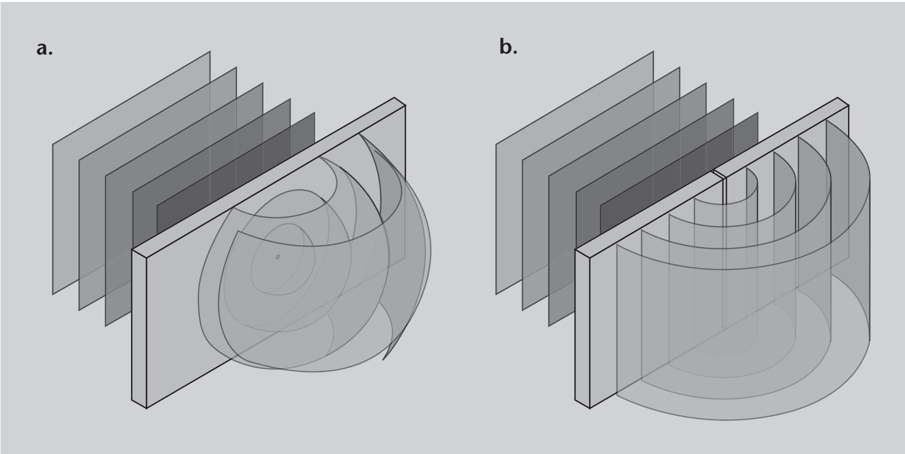



**Figura 19**

Esquema de la difracción de un frente de ondas plano:
**a.** por una pequeña abertura circular,
**b.** por una rendija vertical.

**Ejemplo recapitulativo**

Para recapitular un poco, antes de proseguir, pensemos por un momento en todos los posibles mecanismos que hemos estudiado y por los cuales, desde la habitación en que estamos, podemos oír a alguien que habla en la habitación de al lado. Para ello consideremos el ejemplo de la situación representada en la figura 20.

Figura 20

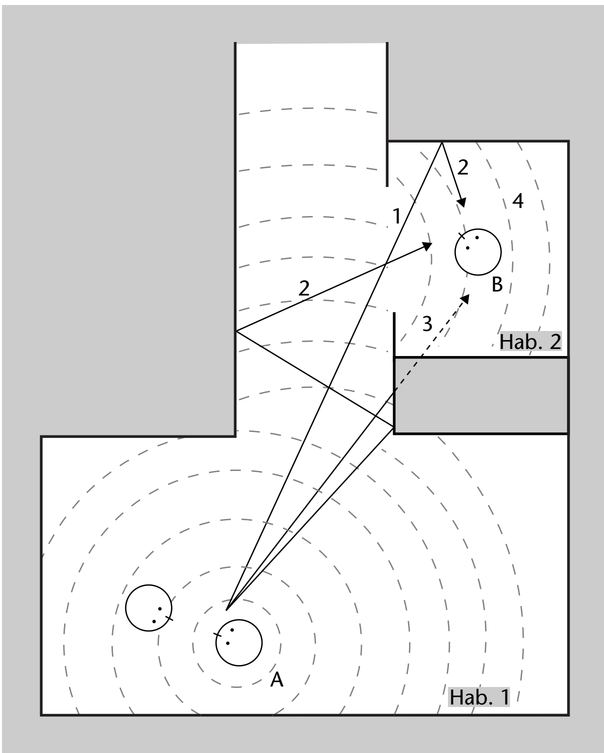



**Figura 20**

¿Cómo oye Bob lo que está diciendo Alicia? En la habitación 1 está Alicia, que habla con un amigo, y en la habitación 2 está Bob. Bob no puede oír lo que dice Alicia por la propagación directa de las ondas sonoras de uno al otro (1), pero sí por la reflexión de las ondas (2), por la transmisión de las ondas por la pared (3) y por la difracción de las ondas en la puerta (4). Los casos (1), (2) y (3) los hemos representado con rayos, mientras que el (4), para no cargar demasiado el dibujo, lo hemos representado con el frente de ondas.

En la figura vemos a Alicia (A), que habla con un amigo en la habitación 1. Bob (B) está en la otra habitación, la 2, conectada con la 1 a través de un pasillo, y puede oír perfectamente lo que está diciendo Alicia. ¿Cómo han llegado las ondas sonoras emitidas por Alicia hasta las orejas de Bob? Consideremos todas las posibilidades:

**1)** Por la propagación directa de las ondas sonoras: en este caso, como podéis ver en el dibujo, la situación relativa de Alicia y Bob impide que ninguna onda sonora emitida por la chica llegue directamente a Bob.

**2)** Por la reflexión en las paredes: las ondas rebotan en las paredes y algunas, de este modo, podrán llegar hasta Bob. Cada rayo rebotará según la ley de la reflexión que ya hemos estudiado (subapartado 5.1), pero hay que tener en cuenta que la reflexión global será más o menos difusa en función de las irregularidades de la pared.

**3)** Por la transmisión a través de las paredes: buena parte de la energía de las ondas que llega a las paredes se refleja (y podrá llegar a Bob según lo que hemos comentado en el punto 2), pero otra parte se transmite hacia el interior de la pared. Si la pared no está hecha de un material especialmente absorbente, la onda se propagará y llegará a la frontera de la pared con la habitación 2. En esta nueva frontera parte de la energía pasará al segundo medio, que ahora vuelve a ser el aire, y, finalmente, podrá llegar a Bob. Seguramente será una contribución muy pequeña, pero si todas las puertas estuvieran cerradas a cal y canto, sería la única manera de que Bob pudiera oír algo de lo que dice Alicia.

**4)** Por la difracción en los obstáculos y aberturas: las ondas que se propagan por el pasillo, de repente encuentran una abertura, que es la puerta de la habitación 2. Como ya hemos visto al hablar de la difracción (subapartado 5.3), las ondas "se abrirán" y se esparcirán a través de esta abertura. De este modo también llegarán a Bob.

## 5.4. ¿Qué hemos aprendido?

Hasta ahora habíamos considerado las ondas de forma muy general, sin preocuparnos de si había otras cosas a su alrededor o no. En este apartado hemos introducido este hecho, que complica las cosas pero que es necesario estudiar si queremos considerar situaciones reales en las que intervengan ondas. En otras palabras, hemos considerado que el medio por donde se propaga una onda está limitado, tiene una "frontera", y hemos visto qué le pasa a la onda cuando llega a este límite.

La idea más importante que os tiene que haber quedado clara sobre el comportamiento general de una onda cuando llega a la frontera que determina la separación entre el medio por donde se está propagando y otro medio, es que parte de la energía de la onda se transmite al otro medio, mientras que otra parte de la energía "permanece" en la onda, que resulta reflejada. Normalmente, la parte de la energía que pasa al segundo medio provoca la formación de una nueva onda en este otro medio. Según como sea el medio, la nueva onda que se ha creado se puede propagar fácilmente, y se observa sin dificultad, o bien se amortigua muy rápidamente.

Como casos particulares de todo lo que hemos comentado, hemos estudiado las ondas estacionarias, que se forman cuando en un determinado medio tenemos ondas que viajan adelante y atrás, superponiéndose. También hemos considerado brevemente el caso en que una onda choca con obstáculos y atraviesa agujeros; en este caso, además de la reflexión y/o la transmisión de energía, tiene lugar el fenómeno de la difracción, la desviación en la propagación de una onda cuando se encuentra con obstáculos o atraviesa aberturas.

# 6. Movimiento relativo de emisor y observador. El efecto Doppler

Hasta ahora hemos estado considerando las ondas sin hacer ninguna referencia a quién o qué las emite ni a quién o qué las recibe o las observa (excepto en el ejemplo de Alicia y Bob con que acabábamos el apartado anterior). Quizás os habéis quedado con la impresión de que el emisor y el posible receptor de las ondas no tienen demasiada importancia, más allá de emitir o recibir. Esto no es así: la situación en que se hallan emisor y receptor y, más específicamente, como se están moviendo, tiene una importancia considerable en algunas características de las ondas.

Quizás alguna vez os habréis dado cuenta de un hecho curioso: estamos en la calle y oímos que se acerca una ambulancia, con la sirena claramente audible. La ambulancia pasa rápidamente a nuestro lado y, de golpe, cuando nos ha adelantado y ya se aleja de nosotros, oímos que el sonido de la sirena ha cambiado: ahora es más grave que cuando se estaba acercando. La sirena de la ambulancia emite el sonido que emite y no cambia cuando nos adelanta; ¿qué ha pasado, pues? ¿cómo es que lo oímos diferente?

Las ondas sonoras emitidas por la sirena son siempre iguales, en cambio nosotros las hemos recibido de manera diferente, concretamente las hemos recibido con una frecuencia diferente, según si la sirena se acercaba o se alejaba. ¿Qué les ha pasado? Fijaos que lo que ha pasado es que cambia la frecuencia con que oímos la onda en función de si se acerca o se aleja de nosotros. Este fenómeno se puede observar con cualquier tipo de ondas y se denomina *efecto Doppler*.

**Christian Doppler**

El efecto Doppler recibe el nombre del físico austríaco Christian Doppler, quien lo describió el año 1842 en su trabajo *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* ("Sobre la luz coloreada de las estrellas binarias y otras estrellas del cielo"). En 1845 el químico neerlandés Chistophorus Buys Ballot confirmó el efecto en ondas sonoras.

El **efecto Doppler** es el cambio de la frecuencia de una onda observada por un receptor que se halla en movimiento relativo respecto al emisor.

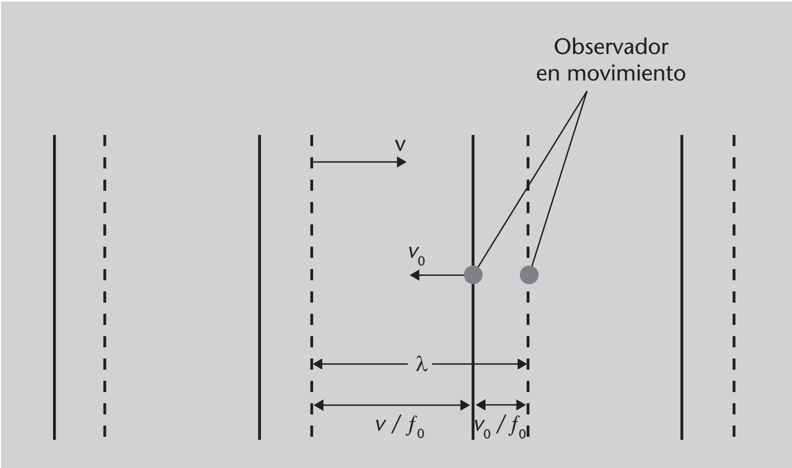
Fijaos que los dos puntos clave del efecto Doppler son el cambio de frecuencia de la onda y el hecho de que este cambio se produce cuando el emisor de la onda y el receptor se están moviendo uno respecto al otro. Si no hay movimiento relativo entre emisor y receptor, este último observará exactamente la frecuencia que emite el emisor, sin ninguna modificación.

Para estudiar el efecto Doppler consideraremos el caso en que el emisor y el receptor se mueven el uno respecto al otro en la dirección de la recta que los une. Como el caso general puede resultar algo enrevesado, haremos primero el caso en que hay un emisor en reposo respecto al medio y un receptor u observador que se mueve respecto al emisor. Después haremos el caso contrario: hay un emisor en movimiento respecto al medio y es el receptor quien está en reposo. Finalmente combinaremos los dos resultados para llegar al resultado general.

### 6.1. Emisor en reposo y observador en movimiento

Supongamos primero que tenemos un emisor en reposo respecto al medio por el que se propagan las ondas y un receptor u observador que se mueve respecto al emisor con una velocidad $v_o$, como tenéis representado en la figura 21.

Figura 21. Efecto Doppler cuando el emisor está en reposo y el observador se mueve




**Frecuencia**

Recordad que la frecuencia se puede determinar como el número de máximos que pasan por un punto en una unidad de tiempo (por ejemplo, en un segundo).

**Figura 21**

En el esquema, el observador se mueve con velocidad $v_o$ hacia el emisor, que emite ondas de frecuencia $f$ que se propagan a velocidad $v$.

Consideraremos positiva la velocidad si el observador se acerca al emisor, que es el caso de la figura, y negativa en caso contrario. El emisor está emitiendo ondas de frecuencia $f$ y, por lo tanto, de longitud de onda $\lambda = v/f$. ¿Qué frecuencia observará el receptor? Si estuviera en reposo, el número de máximos que lo atravesarían en una unidad de tiempo sería $v/\lambda$, pero como se está moviendo con velocidad $v_o$ verá más, porque se está dirigiendo hacia los máximos que van hacia él. Por lo tanto, en realidad la velocidad relativa entre onda y observador no es $v$ sino $v+v_o$; así, la frecuencia que observa el receptor, $f_o$, es:

$$f_o = \frac{v + v_o}{\lambda}. \tag{113}$$

Como $\lambda$ es igual a $v/f$, podemos sustituirla en la ecuación 113 y tener:

$$f_o = f + v_o \frac{f}{v}, \tag{114}$$

que podemos reordenar como:

$$f_o = f \left( \frac{v + v_o}{v} \right). \tag{115}$$

Según esta expresión, podemos ver que si el receptor se acerca al emisor ($v_o > 0$) observará una frecuencia más alta, porque entonces el cociente $(v+v_o)/v$ es superior a 1, y si se aleja ($v_o < 0$), más baja, porque entonces el cociente $(v+v_o)/v$ es menor que 1.

### 6.2. Emisor en movimiento y observador en reposo

¿Y si es el emisor el que se mueve y el observador está en reposo respecto al medio? Este es el caso que representamos en la figura 22, y un razonamiento análogo al que acabamos de hacer nos llevaría a obtener la fórmula siguiente, donde $v_e$ es la velocidad del emisor:

$$f_o = f\left(\frac{v}{v+v_e}\right). \tag{116}$$

Figura 22. Efecto Doppler cuando el emisor está en movimiento y el observador, en reposo

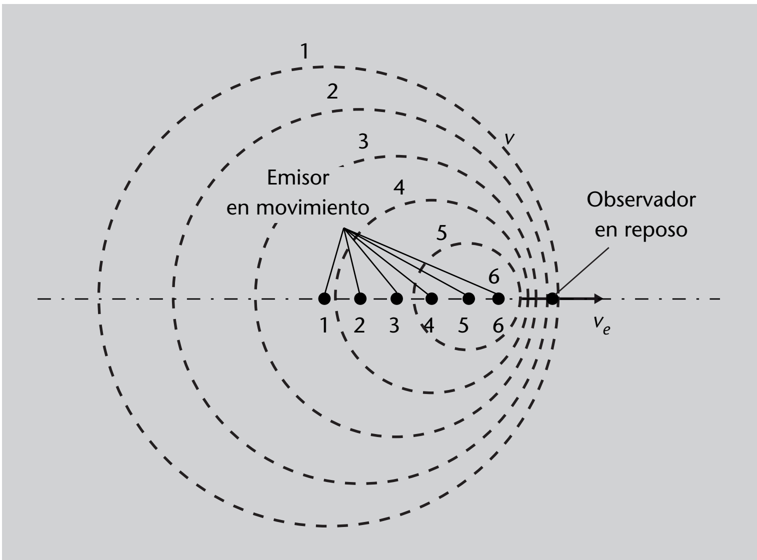



**Figura 22**

En el esquema, el emisor se mueve con velocidad $v_e$ hacia el observador y emite ondas que se propagan a velocidad $v$ respecto al medio. Los puntos 1, 2, 3, etc. indican el lugar de emisión de cada onda 1, 2, 3, etc.

**Actividad**

Obtened la ecuación 116 siguiendo un razonamiento equivalente al que hemos hecho para obtener la ecuación 115. En el proceso tendréis que calcular la longitud de onda emitida por el emisor, que no es simplemente $v/f$, ya que el emisor se está moviendo a una velocidad $v_e$ respecto al medio, sino:

$$\lambda = \left(\frac{v+v_e}{f}\right). \tag{117}$$

### 6.3. Caso general: emisor y observador en movimiento

Ahora ya podemos combinar los dos resultados que hemos obtenido para llegar a una expresión general para el efecto Doppler, con movimiento de emisor y de observador. En la ecuación 113, que nos da la frecuencia observada por el receptor en movimiento en función de la longitud de onda recibida, sustituimos esta longitud de onda $\lambda$ por la expresión 117, porque ahora es esta la longitud de onda emitida por el emisor en movimiento. Así, llegamos a:

$$f_o = f\,\frac{v + v_o}{v + v_e}. \tag{118}$$

**Actividad**

Obtened la ecuación 118 siguiendo el proceso que acabamos de comentar: sustituir la longitud de onda que nos da la ecuación 117, que es la longitud de onda emitida por el emisor en movimiento, en la ecuación 113, que nos da la frecuencia observada por el receptor en movimiento.

En esta ecuación del efecto Doppler hay que ir con mucho cuidado con los signos de la velocidad. ¿Cuándo consideramos que $v_o$ y $v_e$ son positivas o negativas? En general consideramos:

- $v_o$ positiva cuando el observador "se acerca" a la onda, es decir, se mueve en sentido contrario al de propagación de la onda que está recibiendo,
- $v_o$ negativa cuando el observador "se aleja" de la onda.

Para $v_e$ pasa exactamente lo mismo:

- consideramos $v_e$ positiva cuando el emisor se mueve en sentido contrario al de la onda que emite,
- consideramos $v_e$ negativa cuando el emisor se mueve en el mismo sentido que la onda que emite.

**Atención**

El emisor emite ondas en todas direcciones, pero ahora, para el efecto Doppler sólo nos fijamos en la onda que después recibe el observador.

En el caso en que las velocidades del emisor y del receptor sean bastante más pequeñas que la velocidad de propagación de la onda en el medio, la ecuación 118 se puede simplificar considerando $v_o \ll v$ y $v_e \ll v$. Haciendo esta aproximación se llega al resultado:

$$\Delta f \approx f\,\frac{v_{\text{rel}}}{v}, \tag{119}$$

donde $v_{\text{rel}} = v_o - v_e$ y $\Delta f = f_o - f$.

**Demostración**

Llegar a este resultado es un poco delicado. Lo demostraremos a continuación, pero lo dejamos como texto opcional.

Dado que consideramos $v_o \ll v$ y $v_e \ll v$, inicialmente podríamos pensar en eliminar $v_o$ y $v_e$ en el numerador y el denominador de la ecuación 118, pero claro, entonces nos quedaríamos simplemente con el resultado de que $f_o = f$. Esto significa que hemos ido demasiado lejos en la simplificación. Lo que hay que hacer en estos casos es buscar una simplificación menos radical. Fijaos que podemos reescribir la ecuación 118 como:

$$f_o = f\,\frac{1 + v_o/v}{1 + v_e/v}. \tag{120}$$

Ahora viene la parte delicada: como el cociente $v_e/v$ es mucho más pequeño que 1, podemos aprovechar que

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \ldots \tag{121}$$

**El resultado de la ecuación 121 proviene de desarrollar $1/1 - x$ en una serie de Taylor, y sólo es válido para $|x| < 1$.**

En nuestro caso consideramos que $x$ es $-v_e/v$ y así podemos escribir la ecuación 120 como:

$$f_o \approx f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)\left(1 - \frac{v_e}{v}\right). \tag{122}$$

Haciendo el producto de los dos paréntesis tenemos:

$$f_o \approx f\left(1 + \frac{v_o}{v} - \frac{v_e}{v} - \frac{v_o v_e}{v^2}\right). \tag{123}$$

Ahora podemos hacer nuevamente una aproximación, ya que el término $v_o v_e/v^2$ es mucho menor que todos los otros. Fijaos que es en este punto donde hemos hecho la aproximación "menos radical" que decíamos. Antes intentábamos una simplificación eliminando términos de orden $x$ frente a términos de orden 1 y nos quedábamos con nada; ahora vamos un paso más allá y eliminamos términos de orden $x^2$ frente a términos de orden $x$ y de orden 1. De este modo tenemos:

$$f_o \approx f\left(1 + \frac{v_o - v_e}{v}\right) \tag{124}$$

que aún podemos reordenar como

$$f_o - f \approx f\,\frac{v_o - v_e}{v}. \tag{125}$$

Y si ahora definimos $\Delta f$ como la diferència entre la frecuencia emitida por la fuente y la frecuencia observada por el receptor, $f_o - f$, y $v_{\text{rel}}$ como la velocidad relativa entre emisor y observador, es decir, $v_o - v_e$, llegamos a la expresión simplificada del efecto Doppler, la ecuación 119:

$$\Delta f \approx f\,\frac{v_{\text{rel}}}{v}. \tag{126}$$

**Ejemplo. Frecuencia de una sirena de un coche**

Empezamos con un ejercicio que recupera lo que comentábamos al principio del apartado: la sirena de un coche. Para no complicar innecesariamente el problema, supongamos una sirena que emite un sonido de una única frecuencia, un sonido de 440 Hz. Si este coche se mueve a 90 km/h hacia nosotros, que estamos parados, ¿cuál es la frecuencia que oiremos? Tened presente que la velocidad del sonido es 340 m/s.

**Solución**

En este ejemplo concreto tenemos un emisor en movimiento (una sirena) que emite ondas y un observador en reposo (nosotros). Sabemos la frecuencia de la sirena y sabemos la velocidad del emisor. El objetivo es calcular la frecuencia que observamos (mejor dicho, que oímos). Para hacerlo, basta con aplicar directamente la ecuación general del efecto Doppler (ecuación 118):

$$f_o = f\frac{v + v_o}{v + v_e}. \tag{127}$$

De esta ecuación sabemos:

- la frecuencia del emisor: $f = 440$ Hz,
- la velocidad de propagación de la onda: $v = 340$ m/s,
- la velocidad del observador: $v_o = 0$ m/s,
- la velocidad del emisor: $v_e = -90$ km/h $= -25$ m/s. Fijaos que es negativa, según la convención de signos que hemos establecido.

Así pues:

$$f_o = 440\frac{340}{340 - 25} = 475 \text{ Hz} \tag{128}$$

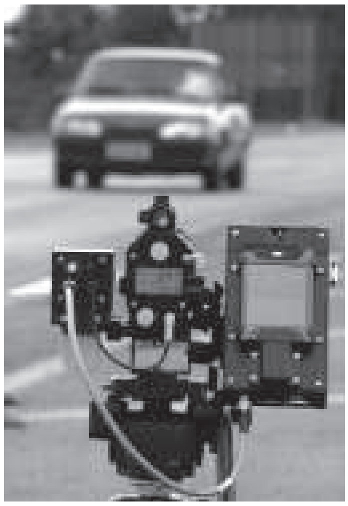
Observamos, por lo tanto, una frecuencia algo más alta que la que realmente está emitiendo la sirena, es decir, un sonido un poco más agudo.

**Actividad**

Repetid el ejercicio anterior pero ahora considerando que, además, nosotros vamos andando hacia el coche a una velocidad de 6 km/h. ¿Qué frecuencia observaremos? ¿Y si, en cambio, nos estamos alejando del coche con otro coche que va a 150 km/h?

**Ejemplo. Radares de control de velocidad**

El efecto Doppler también se utiliza en los radares meteorológicos y en los radares de control de velocidad en las carreteras. En este caso se trata de efecto Doppler con ondas electromagnéticas de la banda de radioondas. Para medir la velocidad de los vehículos se tiene lo que podríamos llamar un "efecto Doppler doble". La onda emitida por el radar a frecuencia $f$ llega al vehículo, que la recibe con una frecuencia $f_o$, puesto que se está acercando o alejando del radar. Las ondas que rebotan en el vehículo, que ahora es el emisor, lo hacen, pues, con frecuencia $f_o$ y el radar, que ahora es el observador, las detecta a una frecuencia $f_r$, puesto que el emisor (el vehículo) se mueve respecto al observador.


Radar para el control de velocidad

Teniendo en cuenta todo esto, hallad una expresión que nos dé la velocidad del vehículo ($v_v$) en función de la frecuencia que emite el radar ($f$) y la frecuencia que detecta ($f_r$). Podéis usar el hecho de que, puesto que el radar trabaja con ondas electromagnéticas, que se desplazan a la velocidad de propagación de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, tenemos $v_v \ll v = c$. Una vez hallada esta expresión, suponed que un radar emite ondas de frecuencia $f = 1{,}5 \cdot 10^9$ Hz y detecta las ondas rebotadas por un coche a una frecuencia 500 Hz más baja. ¿Acaso le tendrán que poner una multa?

**Solución**

Para hallar la expresión que nos piden, de momento consideremos la variación total de la frecuencia, $\Delta f$, que será:

$$f_r - f = \Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 \tag{129}$$

donde

$$\Delta f_1 = f_o - f \tag{130}$$

y

$$\Delta f_2 = f_r - f_o \tag{131}$$

Ahora, aprovechando que $v_v \ll c$, podemos usar la ecuación simplificada del efecto Doppler (ecuación 119) para hallar expresiones para $\Delta f_1$ y $\Delta f_2$:

$$f_o - f = \Delta f_1 \approx f\frac{v_v}{c} \tag{132}$$

$$f_r - f_o = \Delta f_2 \approx f_o\frac{v_v}{c} \tag{133}$$

y, por lo tanto, sustituyendo en la ecuación 129, $\Delta f$ será:

$$\Delta f \approx f\frac{v_v}{c} + f_o\frac{v_v}{c} = \frac{v_v}{c}(f + f_o). \tag{134}$$

Como lo que queremos es eliminar la frecuencia $f_o$, que no conocemos, y quedarnos sólo con las que conocemos, la emitida $f$ y la recibida $f_r$, despejamos $f_o$ de la ecuación 132:

$$f_o = \left(1 - \frac{v_v}{c}\right)f \tag{135}$$

y sustituimos este resultado en la ecuación 134:

$$\Delta f \approx \frac{v_v}{c}\left(2 - \frac{v_v}{c}\right)f. \tag{136}$$

Como $v_v/c$ es despreciable frente a 2, podemos eliminar este término y quedarnos simplemente con:

$$\Delta f \approx 2\frac{v_v}{c}f \tag{137}$$

y si queremos despejar la velocidad del coche, que es lo que nos interesa, utilizando la ecuación 129 nos queda:

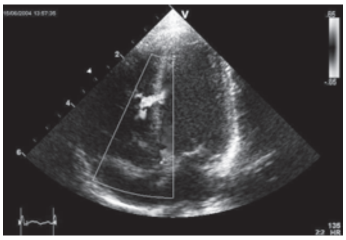
$$v_v = \frac{\Delta f}{2f}c = \frac{f_r - f}{2f}c. \tag{138}$$

Esta expresión nos da, finalmente, la velocidad del vehículo en función de la frecuencia emitida por el radar, $f$, y la frecuencia detectada, $f_r$.

La segunda parte del ejemplo, el cálculo numérico del caso particular, os la dejamos como ejercicio.

**Ejemplo. Ecografías Doppler**

El efecto Doppler se utiliza a menudo en ecocardiografía (la ecografía aplicada a la cardiología) para observar no sólo la anatomía del corazón, sino también para determinar la dirección y la velocidad del torrente sanguíneo. En ciertas condiciones un ecocardiograma puede determinar con precisión la dirección y la velocidad de la sangre y del tejido cardíaco en un punto determinado, siempre que las ondas de ultrasonidos que se emiten sean lo más paralelas posible al flujo sanguíneo. La medida de la velocidad permite evaluar el funcionamiento de las válvulas cardíacas y del corazón, posibles comunicaciones anómalas entre la parte derecha e izquierda del corazón y fugas de sangre a través de las válvulas (lo que se denomina *regurgitación valvular*) y también calcular el caudal cardíaco (volumen de sangre bombeado por el corazón en un minuto).



Ecocardiografía Doppler de un corazón con comunicación interventricular

### 6.4. Ondas de choque

En todo lo que acabamos de hacer sobre el efecto Doppler, siempre hemos considerado de manera implícita que la velocidad del emisor es menor que la velocidad de las ondas en el medio por donde se propagan y por donde se desplaza el emisor. Esto no siempre será así, y basta recordar que la velocidad del sonido en el aire es de unos 340 m/s (unos 1.220 km/h) para darse cuenta de que un avión lo bastante rápido puede superar fácilmente esta velocidad.

Si un emisor de ondas se mueve más rápidamente que la velocidad de propagación de las ondas que emite, delante suyo nunca habrá ondas propagándose, ya que las "adelanta" inmediatamente después de emitirlas. Así, las ondas se concentran detrás del emisor y forman una **onda de choque**, donde se acumulan los máximos de las ondas emitidas. Podemos observar el proceso esquemáticamente en la figura 23.

Figura 23. Onda de choque

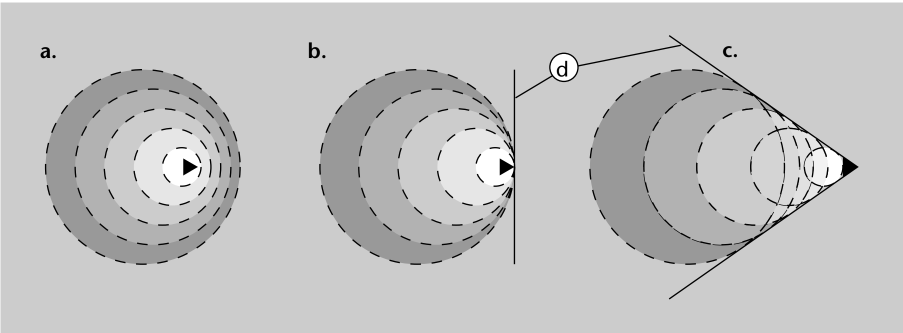



**Figura 23**

**a.** Un objeto emisor de ondas se mueve en un medio con una velocidad inferior a la velocidad de propagación de estas ondas. Las ondas generadas se propagan en todas direcciones.
**b.** El objeto alcanza una velocidad igual a la de propagación de las ondas. Ahora ya no hay ondas por delante, porque el objeto va tan rápido como ellas.
**c.** El objeto va más rápido que la velocidad de propagación de las ondas.
**d.** Las ondas se concentran detrás del emisor y forman una onda de choque.

La formación de ondas de choque es bastante común en el caso de ondas mecánicas, especialmente sonoras; en este caso, un observador oirá una fuerte explosión cuando la onda de choque llegue a su posición, lo que se denomina **explosión sónica**, producida por la acumulación de máximos.

Una magnitud que se utiliza a menudo en este contexto es el **número de Mach**, simbolizado por $M$ o por Ma, y que es igual al cociente entre la velocidad del emisor y la velocidad de propagación de la onda, es decir:

$$M = \frac{v_e}{v}. \tag{139}$$

Igualmente, se define el ángulo de Mach, que mide la abertura de la onda de choque generada y se puede expresar en función del número de Mach como

$$\mu = \text{arc sen}\,\frac{1}{M} \tag{140}$$

Fijaos que cuando un avión alcanza una velocidad igual a la del sonido en el aire, según la ecuación 139 el número de Mach es

$$M = \frac{v}{v} = 1 \quad (141)$$

Por ello, cuando un avión va a la velocidad del sonido se dice que "va a Mach 1" y en el momento de alcanzarla se dice que rompe la **barrera del sonido**. Si fuera a una velocidad igual al doble de la del sonido, iría a Mach 2, etc.

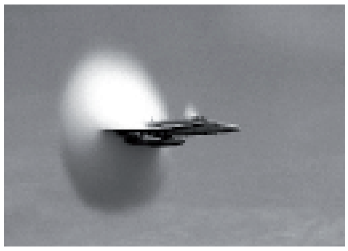
**Velocidad del sonido en el aire**

Recordad que la velocidad del sonido en el aire es de unos 340 m/s, es decir, 1.224 km/h, si bien el valor es ligeramente diferente en función de la temperatura y de la humedad.

**Clasificación de vuelos en aeronáutica**

En aeronáutica se suelen clasificar los vuelos en función del número de Mach de la siguiente forma:

- Subsónico: $M < 1$.
- Sónico: $M = 1$.
- Transónico: $0{,}8 < M < 1{,}2$.
- Supersónico: $1{,}2 \leq M < 5$.
- Hipersónico: $M \geq 5$.



Un F/A-18 Hornet está a punto de romper la barrera del sonido sobre las aguas del Pacífico. La "niebla" que se observa detrás del avión está producida por la condensación del vapor de agua, causada por la caída repentina de presión que tiene lugar detrás de la onda de choque cuando se está llegando a Mach 1. Este fenómeno recibe el nombre de *singularidad de Prandtl-Glauert* y todavía no está descrito perfectamente.

**Récords de velocidad**

Actualmente, el récord de velocidad en un vuelo tripulado atmosférico es de 3.530 km/h, conseguido con un avión Lockheed SR-71 Blackbird el año 1976. En vuelos atmosféricos no tripulados el récord lo tiene el estatorreactor de combustión supersónica (en inglés *scramjet*) X-43A de la NASA, que alcanzó 12.140 km/h el 2004. Los vehículos espaciales logran velocidades todavía superiores durante sus reentradas en la atmósfera: por ejemplo, el transbordador espacial llega a unos 28.000 km/h cuando vuelve a penetrar en la atmósfera terrestre, pero claro, en este caso ya no estamos hablando de aviones "normales". Por cierto, ¿a qué números de Mach corresponden todas estas velocidades? Como la mayoría de estos vuelos se realizan a grandes alturas, donde la temperatura del aire es muy baja y, en consecuencia, la velocidad del sonido es más pequeña, calculad los números de Mach suponiendo que los vuelos se producen a una altura de 11.000 metros, donde la velocidad del sonido es de 295 m/s (1.062 km/h).

### 6.4.1. Ondas de choque con luz: radiación Cherenkov

Aunque es menos habitual, las ondas de choque también se producen con radiación electromagnética, cuando una partícula cargada eléctricamente emite ondas electromagnéticas y se mueve en un medio a una velocidad superior a la de la luz. A primera vista esto nos puede parecer sorprendente, porque quizás habréis oído decir que nada puede ir más rápido que la luz.

**Cherenkov, Tamm y Frank**

La radiación Cherenkov recibe su nombre del físico Pável Alekséyevich Cherenkov, que la observó en 1934. En 1937 Ígor Tamm e Iliá Mijáilovich Frank dieron con la interpretación correcta, trabajos por los cuales recibieron el premio Nobel de física el año 1958.

Bien, esto sólo es cierto en parte. La afirmación correcta es que nada puede ir más rápido que la luz *en el vacío* (de hecho, esta afirmación es uno de los principios fundamentales de la teoría de la relatividad). Nada impide, sin embargo, que un objeto se pueda mover en un medio más rápidamente que la luz en ese mismo medio. La radiación electromagnética emitida en estas condiciones forma una onda de choque y recibe el nombre de **radiación Cherenkov**. Si es lo bastante intensa, la parte de radiación Cherenkov que se emite en frecuencias visibles se puede observar fácilmente como luz azul. Es precisamente esta radiación Cherenkov la que se puede ver como un brillo azulado que rodea a los reactores nucleares de piscina (los que tienen el núcleo sumergido en una gran piscina), provocada cuando partículas de alta energía procedentes de las reacciones de fisión atraviesan el agua que rodea al reactor a una velocidad superior a la de la luz en el agua.

Brillo azulado producido por la radiación Cherenkov en el reactor de la central nuclear de Gösgen, en Suiza

## 6.5. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos visto que el movimiento entre la fuente que emite ondas y el observador que las detecta no es irrelevante por lo que respecta a una característica fundamental de las ondas: la frecuencia.

En general, cuando emisor y receptor se alejan, la frecuencia detectada por el receptor disminuye, mientras que cuando se acercan, aumenta. Y, además, en el caso extremo en que el emisor se mueva más rápidamente que las propias ondas que emite se produce el fenómeno, más o menos espectacular, de las ondas de choque y las explosiones sónicas.

# 7. Transporte de energía en las ondas

Si recordáis la definición inicial que hemos dado de onda en el subapartado 1.1, quizá os estaréis preguntando por qué aún no hemos hablado de la energía que transportan las ondas. Al fin y al cabo, hemos dicho que el transporte de energía, pero no de materia, es su característica definitoria.

**Definición de onda**

Una onda es una perturbación que se propaga por el espacio y el tiempo, con transporte de energía y cantidad de movimiento pero sin transporte de materia.

Hasta ahora hemos estado describiendo con bastante detalle el comportamiento de las ondas desde un punto de vista puramente cinemático, es decir, sin considerar cuestiones de fuerzas y energía. Demos un paso adelante y planteemos ahora los aspectos energéticos: veremos cómo podemos describir la cantidad de energía que lleva una onda, y también cómo pierden energía las ondas y en qué circunstancias.

## 7.1. Energía de una onda

Consideremos, por simplicidad, una onda mecánica armónica que se desplaza en un medio de densidad $\rho$. Como la onda es armónica se puede describir mediante una función senoidal, tal y como hemos visto en el subapartado 3.1:

**El símbolo $\rho$ es la letra griega ro minúscula.**

$$f(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi). \qquad (142)$$

También habíamos visto que en una onda armónica cualquier punto de la onda se mueve con un movimiento vibratorio armónico simple. Ahora bien, la energía total en un movimiento vibratorio armónico simple es igual a la energía cinética máxima:

**Energía de un cuerpo que oscila**

Cuando un cuerpo oscila con un movimiento vibratorio armónico simple las energías cinética y potencial varían con el tiempo, pero si el sistema no pierde energía (por ejemplo, por rozamiento) la energía total es constante. En el punto central de vibración, la energía potencial es nula y, por lo tanto, toda la energía es cinética. La energía cinética es, en general, $(1/2)mv^2$.

$$E = E_{c_{\text{máx}}} = \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} \qquad (143)$$

Ahora, pues, necesitamos hallar la velocidad* de los puntos de una onda armónica y ver cuándo se hace máxima. Recordad que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. La posición viene determinada por la ecuación 41, que recordad que es:**

$$f(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi). \qquad (144)$$

Su derivada es:

$$v(x,t) = f'(x,t) = -\omega A\cos(kx - \omega t + \phi). \qquad (145)$$

*** ¡Atención, no confundáis esta velocidad, que es la velocidad con que vibran los puntos de la onda, con la velocidad de grupo ni la velocidad de fase!**

**** Atención, no confundáis esta $f(x,t)$ con la frecuencia $f$. Fijaos que cuando hablamos de la onda ponemos $(x,t)$, es decir, la dependencia de la función.**

Como se trata de una función coseno, su valor máximo se producirá cuando el argumento del coseno sea 0 o $\pm\pi$ y el coseno, en consecuencia, sea igual a $\pm 1$. Entonces la velocidad máxima, $v_{\text{máx}}$ es:

$$v_{\text{máx}} = \pm \omega A. \tag{146}$$

Sustituimos este resultado en la ecuación 143 y tenemos:

$$E = E_{c_{\text{máx}}} = \frac{1}{2} m (\omega A)^2. \tag{147}$$

Sólo nos falta ahora encontrar una expresión para la masa $m$ de un pequeño volumen de material. Como la densidad, $\rho$, es igual a la masa, $m$, por unidad de volumen, $V$, $\rho = m/V$, tenemos finalmente:

$$E = E_{c_{\text{máx}}} = \frac{1}{2} V \rho (\omega A)^2. \tag{148}$$

De esta expresión se puede deducir que la energía de la onda depende del volumen de material que está vibrando, cosa que a efectos prácticos no es especialmente satisfactoria, puesto que es muy difícil saber qué volumen vibra en cada momento. Por ello es mejor trabajar con la **densidad de energía**, $e$, igual a la energía por unidad de volumen, $\frac{E}{V}$.

La densidad de energía será, pues:

$$e = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \tag{149}$$

El resultado importante aquí es que la energía media de una onda armónica siempre es proporcional al cuadrado de su frecuencia y al cuadrado de su amplitud. Fijaos que esto quiere decir que una onda de frecuencia más alta transporta más energía que otra de frecuencia más baja de la misma amplitud; en concreto, si una onda tiene una frecuencia el doble de otra, transporta cuatro veces más energía. Quizás no os convencerá mucho el hecho de que esto lo hemos deducido concretamente para una onda mecánica (y por eso aparece la densidad $\rho$), pero lo cierto es que el resultado es general.

La **densidad de energía** de una onda armónica es proporcional al cuadrado de su amplitud y al cuadrado de su frecuencia.

### 7.2. Intensidad de una onda

Una magnitud más habitual que la densidad de energía para caracterizar a la energía transportada por una onda es la energía que llega, por unidad de área y de tiempo (es decir, la potencia por unidad de área, ya que la energía dividida por el tiempo es la potencia), a una superficie imaginaria perpendicular a la dirección de propagación, como la que podéis ver en la figura 24. Esta magnitud es la intensidad, normalmente simbolizada por $I$.

La **intensidad** de una onda es la potencia que llega, por unidad de área, a una superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

**Potencia**

La potencia $P$ se define como la energía o trabajo ($W$) por unidad de tiempo ($t$): $P = \frac{W}{t}$. Se mide en vatios (W). Un vatio equivale a un julio por segundo (J/s).

Hallemos, pues, una expresión para la intensidad, como la ecuación 149 que hemos encontrado para la densidad de energía. Por la definición de intensidad que acabamos de dar, volvamos a la expresión de la energía 148 (no a la de la densidad de energía) y dividámosla por el área y por el tiempo, porque debéis recordar que para obtener la intensidad queremos, precisamente, la energía por unidad de área y de tiempo:

$$I = \frac{\frac{1}{2}V\rho(\omega A)^2}{S_\perp \cdot \Delta t} \tag{150}$$

donde $S_\perp$ es el área perpendicular a la dirección de propagación. De la figura 24 podemos ver que precisamente el volumen total $V$ se puede expresar como:

$$V = S_\perp \cdot v\Delta t \tag{151}$$

de modo que podemos escribir:

$$I = \frac{\frac{1}{2}S_\perp \cdot v\Delta t\rho(\omega A)^2}{S_\perp \cdot \Delta t}. \tag{152}$$

Figura 24. Esquema para el cálculo de la intensidad

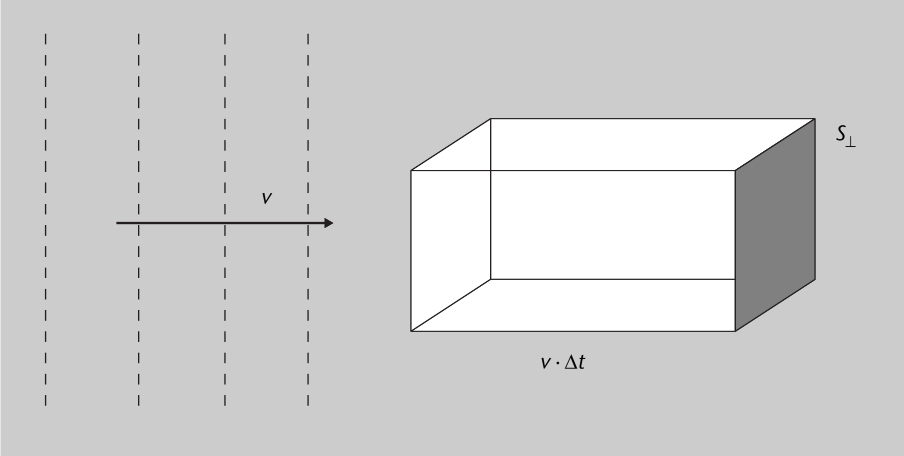



**Figura 24**

Una onda se propaga a velocidad $v$ y tiene una energía $E = (1/2)V\rho\omega^2A^2$. La intensidad que tiene la onda es la energía por unidad de tiempo y unidad de área perpendicular a la dirección de propagación. Simbolizamos como $S_\perp$ esta unidad de área. El volumen unitario correspondiente a esta unidad de área es $V = S_\perp \cdot v\Delta t$, ya que en la unidad de tiempo $\Delta t$ la onda recorre un espacio $v\Delta t$.

Así, simplificando, la expresión para la intensidad nos queda:

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2. \tag{153}$$

Esta magnitud es mucho más fácil de detectar y de medir que la densidad de energía y por eso es tan útil. Fijaos, sin embargo, que la dependencia con la frecuencia y la amplitud sigue siendo la misma: proporcional al cuadrado de ambas.

### 7.3. Atenuación geométrica de la energía de una onda

Si el medio por el cual se propaga una onda no absorbe energía, la intensidad de una onda plana es la misma en todas partes. En cambio, con ondas circulares o esféricas, la cosa no es así, es decir, aunque el medio no absorba energía, la intensidad de la onda va disminuyendo. ¿Por qué?

Supongamos una fuente que emite ondas en todas direcciones, como podéis observar en la figura 25. La potencia que atraviesa toda una esfera de radio $r_1$ tiene que ser la misma que la que atraviesa una esfera más grande de radio $r_2$, ya que no se pierde energía entre una esfera y la otra (esto es así porque suponemos que el espacio entre ambas esferas no absorbe energía). Por lo tanto, utilizando que la potencia es la intensidad por el área y que el área de una esfera es $4\pi r^2$:

$$I(r_1)4\pi r_1^2 = I(r_2)4\pi r_2^2 \tag{154}$$

donde $I(r_1)$ es la intensidad de la onda a la distancia $r_1$ e $I(r_2)$ la intensidad a la distancia $r_2$. Así, la intensidad a una distancia $r_2$ será:

$$I(r_2) = I(r_1)\frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{155}$$

¿Qué significa esto? Consideremos el radio $r_1$ como el punto de partida, nuestro origen; ahora fijaos que si vamos aumentando la distancia $r_2$ lo que pasa es que la intensidad a esta distancia $r_2$ es cada vez más pequeña, ya que depende de $1/r_2^2$. En general, pues, la intensidad de una onda esférica va disminuyendo de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente, es decir, disminuye como $1/r^2$. Expresado de forma más concisa:

$$I(r) \propto \frac{1}{r^2} \tag{156}$$

**Recordad**

El símbolo $\propto$ se lee "proporcional a". Se parece a la letra griega alfa minúscula ($\alpha$), pero no son lo mismo.

Esta disminución de la intensidad de una onda esférica recibe el nombre de **atenuación geométrica**.

Figura 25. Onda esférica

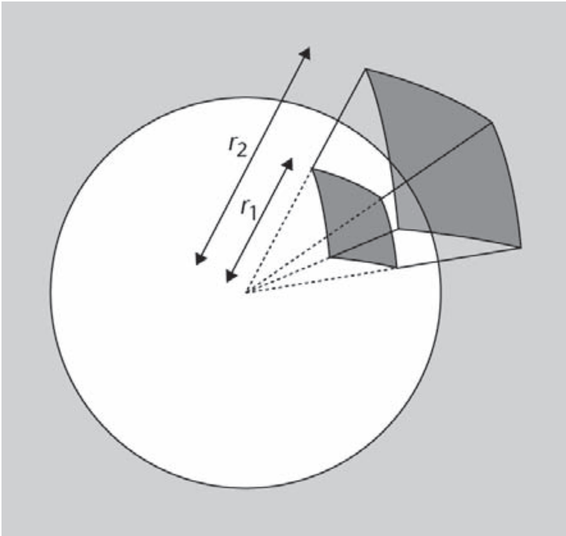



**Figura 25**

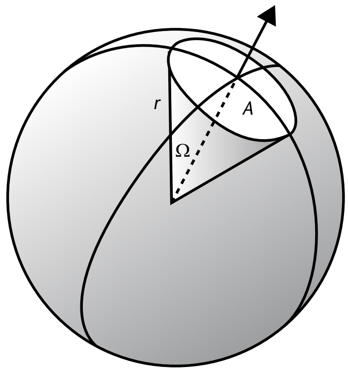
Una fuente emisora de ondas está emitiendo en todas las direcciones del espacio. La potencia que atraviesa una esfera de radio $r_1$ debe ser la misma que atraviesa una esfera más grande de radio $r_2$, puesto que no se pierde energía entre una esfera y la otra. Esto nos lleva a que la intensidad de la onda disminuye como $1/r^2$, tal y como explicamos en el texto.

**Actividad**

Demostrad que en el caso de ondas circulares en dos dimensiones se llega a un resultado similar, en que la intensidad disminuye como $1/r$, no como $1/r^2$. El proceso para hacer la demostración es equivalente al que acabamos de hacer para ondas esféricas, pero tened presente que ahora, en lugar de esferas, utilizaremos círculos.

### 7.3.1. Intensidad radiante

En aquellos casos en que no tenemos ondas planas, parece que el concepto de intensidad no nos permite caracterizar demasiado bien la onda, precisamente porque la intensidad varía a medida que nos alejamos o nos acercamos de la fuente emisora de ondas, como acabamos de ver. Para solucionar este hecho, en lugar de utilizar la intensidad, que tal y como hemos definido antes, al empezar el subapartado 7.2, es la potencia por unidad de área, se usa la potencia por unidad de ángulo sólido.




Recordad que el ángulo sólido es el equivalente del ángulo plano bidimensional en tres dimensiones. Es el cono que abarca un objeto visto desde un punto, es decir, cuán grande aparece para un observador que lo ve desde aquel punto. Se mide en estereorradianes (sr) y una esfera completa tiene (subtiende) $4\pi$ sr.

Esta magnitud, especialmente en el ámbito de la radiometría y la fotometría, recibe el nombre de **intensidad radiante** (en radiometría) e **intensidad luminosa** (en fotometría). Es especialmente útil en el caso de ondas esféricas porque tiene siempre el mismo valor independientemente de la distancia a que nos encontremos. Esto es así precisamente porque la potencia ahora es por unidad de ángulo sólido, que es una magnitud que no depende de la distancia.

**Irradiancia e iluminación**

Hay que ir con mucho cuidado para no liarse con las magnitudes referentes a la energía y la intensidad, ya que existe una confusión considerable con sus nombres según el campo en que se trabaje. Así, lo que genéricamente se denomina *intensidad*, tal y como lo hemos definido aquí como potencia por unidad de área, en radiometría y fotometría se denomina **irradiancia** e **iluminación**, respectivamente.

A la intensidad radiante o intensidad luminosa, a menudo también se la llama simplemente *intensidad*, pero si la llamamos *intensidad* habrá que tener bien presente que es ligeramente diferente de la intensidad que hemos definido antes al empezar el subapartado 7.2: esta es la potencia por unidad de ángulo sólido, mientras que la intensidad que hemos definido antes es la potencia por unidad de área.

En resumen, pues, pese a que en un medio una onda no pierda energía, en el caso de ondas esféricas o circulares su intensidad va disminuyendo a medida que se aleja de la fuente emisora, por razones puramente geométricas, puesto que la onda tiene que abarcar una superficie cada vez más grande. En el subapartado siguiente veremos precisamente qué les pasa a las ondas si, además, el medio por donde se propagan absorbe parte de la energía que tienen.

### 7.4. Ondas en medios materiales

Ya explicamos en el subapartado 1.2 que las ondas mecánicas necesitan un medio para propagarse y las ondas electromagnéticas, aunque no necesitan ninguno, a menudo también lo hacen. Ahora bien, hasta ahora hemos considerado que, en cualquier caso, las ondas no perdían nunca energía al viajar por el medio, que las ondas se podían propagar indefinidamente sin amortiguarse. Pero sucede que esto, en general, no es cierto.

Las ondas, al propagarse por un medio, pierden energía y esta energía es absorbida por el medio y se transforma en otras clases de energía, a menudo en calor. Tenemos muchos ejemplos de este fenómeno; pensad en los hornos microondas, por ejemplo, donde utilizamos ondas electromagnéticas para calentar comida. ¿Cómo se consigue? En un horno microondas se generan ondas electromagnéticas que atraviesan la comida; al atravesarla, las ondas pierden parte de su energía, energía que absorbe el medio (en este caso, la comida) y se transforma en calor, con el resultado de que la comida, después de un rato, está más caliente.

**Calentamiento adiabático**

El procedimiento por el cual la comida se calienta al hacer pasar microondas se denomina *calentamiento adiabático* y sólo se produce si en el material hay moléculas polares, como por ejemplo el agua.

**Pérdida de energía de la onda**

Atención, no debéis confundir la disminución de la energía de las ondas al propagarse por un medio con la disminución de la intensidad en ondas esféricas y circulares que hemos comentado en el subapartado 7.3. Son cosas diferentes: aquella disminución de intensidad es un fenómeno puramente geométrico y si consideramos toda la onda a una cierta distancia de la fuente, sigue teniendo la misma energía total que cuando se emitió. Ahora estamos considerando una disminución de la energía total de la onda, independientemente de si, además, la intensidad disminuye por cuestiones geométricas.

Ahora nos debemos preguntar si podemos describir esta pérdida de energía, esta atenuación, y encontrar alguna expresión que nos diga cómo disminuye la energía de una onda en función del espacio que recorre por el medio.

En muchos casos resulta que la energía que absorbe un medio por unidad de área, por unidad de tiempo y por unidad de longitud, es decir, la intensidad perdida por unidad de longitud recorrida, es aproximadamente proporcional a la intensidad de la onda en aquel punto (dicho de otro modo, la idea es que "más energía tienes, más energía pierdes"). Aquí hay que recordar que las variaciones de las magnitudes siempre las podemos expresar rigurosamente con derivadas. En este caso, pues:

$$-\frac{dI}{dx} = \alpha I \tag{157}$$

donde $\alpha$ es el **coeficiente de atenuación** del medio, un factor de proporcionalidad que tendrá un valor determinado en cada caso particular. Fijaos que hemos puesto un signo negativo porque la onda *pierde* energía. La integración de esta ecuación diferencial nos da una solución de tipo exponencial:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \tag{158}$$

donde $I_0$ es la intensidad en la fuente emisora, para $x = 0$. La gráfica de esta función la podéis ver en la figura 26. Se han representado dos casos, uno con $\alpha$ pequeño y otro con $\alpha$ grande.

Figura 26. Atenuación exponencial

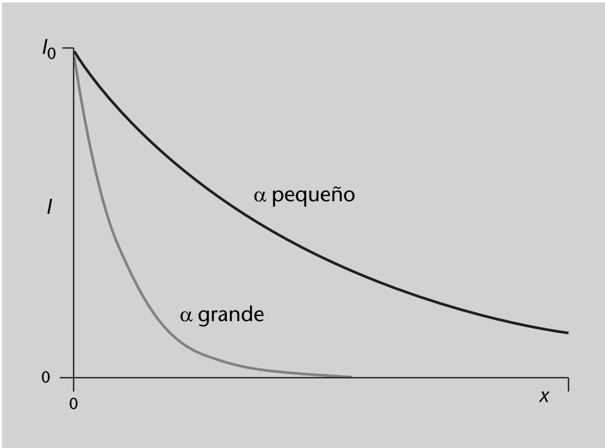



**Figura 26**

La intensidad de una onda disminuye exponencialmente a medida que recorre más longitud de medio.

Este resultado de una atenuación exponencial de una onda al atravesar un medio material sólo es aproximado, pero es lo suficientemente válido en muchos casos, como por ejemplo las ondas electromagnéticas en medios que son conductores eléctricos o las ondas en una cuerda, en que siempre está presente el rozamiento.

**Ejemplo. Atenuación exponencial de la intensidad**

Una fuente aproximadamente puntual emite un sonido con una potencia de $10^{-3}$ W. La frecuencia de este sonido es tal que para las condiciones ambientales particulares del problema, el valor de $\alpha$ es 0,005 $m^{-1}$. ¿Cuál es la intensidad del sonido 1 metro, a 10 metros y a 1 kilómetro?

**Solución**

Para resolver el problema hay que recordar que tenemos dos tipos de atenuación de la onda a medida que nos alejamos de la fuente emisora:

- una atenuación puramente geométrica, que se produce independientemente de las características del medio, que ya hemos explicado en el subapartado 7.3;
- una atenuación física provocada por la absorción de energía en el medio.

Sabemos que la fuente emite ondas de una potencia $10^{-3}$ W. Si no hubiese nada de absorción, a 1 metro de distancia esta potencia estaría repartida por una superficie igual a $4\pi r^2$, con $r = 1$. Por lo tanto, si no hubiese absorción, la intensidad, que es la potencia por unidad de área, sería:

$$I(1)_{\text{at. geom.}} = \frac{P}{A} = \frac{10^{-3}}{4\pi 1^2} = 8 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2 \qquad (159)$$

Sin embargo, en realidad la intensidad es más baja, ya que se ha producido una atenuación física causada por la abosrción de energía. Calculemos esta atenuación según la ecuación 158 y sabiendo que nos dicen que $\alpha = 0{,}005\ \text{m}^{-1}$:

$$I(1)_{\text{at. fis.}} = I_0 \text{e}^{-0{,}005\cdot 1} = 0{,}995 I_0 \qquad (160)$$

Es decir, encontramos que la atenuación hace que a 1 metro de distancia de la fuente, la intensidad sea 0,995 veces (es decir, un 99,5 %) la intensidad que habría sin atenuación. Así, la intensidad final a 1 metro de distancia será:

$$I(1) = I(1)_{\text{at. geom.}} \cdot 0{,}995 = 7{,}92 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2 \qquad (161)$$

Os invitamos a hacer vosotros los casos para 10 metros y 1 kilómetro. ¿Qué hechos destacables podéis observar a medida que nos alejamos de la fuente? Especialmente, observad que a 1 kilómetro de distancia la atenuación física (que a 1 metro solo nos reducía la intensidad en un 0,5 %) tiene un efecto muy importante, reduciendo la intensidad en un 99,3 %!

En definitiva, hemos visto que una onda puede perder energía debido a la absorción de parte de esta energía por el medio por donde se está propagando. En el caso más simple, esta atenuación se puede expresar como una ley exponencial en función de la distancia recorrida en el medio.

Para acabar, y a modo de referencia, en la tabla 2 resumimos las magnitudes principales en la descripción de la energía de una onda, junto con sus símbolos y unidades de medida en el Sistema Internacional.

Tabla 2

| Magnitud | Símbolo | Unidad (SI) | Nombre de la unidad |
|---|---|---|---|
| Energía | $E$ | J | Julio |
| Potencia | $P$ | W | Vatio |
| Densidad de energía | $e$ | J/m$^3$ | Julio por metro cúbico |
| Intensidad | $I$ | W/m$^2$ | Vatio por metro cuadrado |
| Ángulo sólido | $\Omega$ | sr | Estereorradián |
| Intensidad radiante | $I$ | W/sr | Vatio por estereorradián |
| Coeficiente de atenuación | $\alpha$ | m$^{-1}$ | Metro elevado a menos uno |
| Amplitud | $A$ | según el tipo de onda | – |

## 7.5. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos visto qué les pasa a las ondas desde el punto de vista energético. Hemos podido determinar que la energía que transporta una onda es proporcional al cuadrado de su frecuencia y al cuadrado de su amplitud. Aun así, la energía no es una magnitud útil a efectos prácticos y por ello hemos definido la intensidad, más fácil de medir y de trabajar, y que tiene la misma dependencia con la amplitud y la frecuencia que la energía.

También hemos visto que, pese a que en un medio una onda no pierda energía, en el caso de ondas esféricas o circulares su intensidad va disminuyendo a medida que se alejan de la fuente emisora, por razones puramente geométricas, puesto que la onda debe abarcar una superficie cada vez más grande. Si el medio por donde se propaga la onda absorbe parte de su energía, a esta atenuación geométrica hay que añadir la atenuación física, provocada por la transmisión de parte de la energía de la onda al medio. En concreto, hemos visto que en muchos casos esta atenuación física se puede describir aproximadamente con una ley exponencial.

# 8. Problemas resueltos

## 8.1. Enunciados

**1.** Una onda armónica se propaga en un medio con una frecuencia de 30 Hz y una longitud de onda de 60 cm. Su amplitud es de 2 mm. ¿Cómo la podéis describir matemáticamente? Es decir, ¿cuál es la ecuación de esta onda? Expresadla en unidades del Sistema Internacional.

**2.** Una onda sonora en el aire produce una variación de presión que se puede expresar como

$$p(x,t) = 0{,}75 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x - 340t)\right) \tag{162}$$

donde todas las magnitudes están expresadas en unidades del Sistema Internacional. Calculad:

**a)** la amplitud de la onda,

**b)** la longitud de onda,

**c)** la frecuencia de la onda,

**d)** la velocidad de propagación de la onda.

**3.** Una cierta onda estacionaria en una cuerda sujeta por sus dos extremos se puede expresar como

$$y(x,t) = 0{,}024\,\mathrm{sen}(52{,}3x)\cos(480t) \tag{163}$$

donde todas las magnitudes se expresan en unidades del Sistema Internacional. Determinad la velocidad de las ondas que se propagan en esta cuerda y cuál es la distancia entre los nodos de la onda estacionaria.

**4.** Suponed que a 10 m de un avión a reacción la intensidad de las ondas sonoras que emite es de $10^3$ W/m$^2$. ¿A qué distancia la intensidad del sonido sería igual a $10^{-3}$ W/m$^2$? (Suponed que las ondas son esféricas y que no hay absorción de energía por parte del aire.)

**5.** Por una cuerda accionada por medio de un vibrador de 120 Hz se propagan ondas transversales de longitud de onda 31 cm.

**a)** ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda?

**b)** Si la tensión de la cuerda es de 1,20 N, ¿cuál es la masa de un fragmento de 50 cm de la cuerda?

**6.** Una onda de frecuencia 120 Hz se propaga por una cuerda con una amplitud de 0,16 mm. ¿Qué cantidad de energía contiene la cuerda, la masa de la cual es de 80 gramos?

**7.** Un aguilucho vuela alejándose directamente de un observador de pájaros y en dirección a un acantilado, a una velocidad de 15 m/s. El aguilucho emite un chillido con una frecuencia de 800 Hz.

**a)** ¿Qué frecuencia del chillido oye el observador?

**b)** ¿Qué frecuencia oye el observador del chillido que ha rebotado primero en el acantilado?

**8.** Un chico que pasea se acerca a nosotros y se está alejando de una pared a 1 m/s mientras silba tranquilamente. Curiosamente notamos unos batidos a 4 pulsos por segundo.

**a)** ¿Cómo es que oímos estos batidos?

**b)** ¿Cuál es la frecuencia del silbido del chico?

**9.** Determinad la velocidad de un tren el silbato del cual, cuando pasa al lado de un receptor parado en el borde de la vía, disminuye la frecuencia en un 10 %.

## 8.2. Soluciones

**1.** Nos dicen que la onda tiene los valores siguientes:

- frecuencia: $f = 30$ Hz,
- longitud de onda: $\lambda = 0{,}6$ m,
- amplitud: $A = 0{,}002$ m,
- fase inicial: $\phi = 0$. Como no nos la especifican, podemos escoger el valor 0.

Para poder escribir la ecuación de una onda armónica (ecuación 41):

$$f(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{164}$$

necesitamos también $k$ y $\omega$. Para hallar $k$ utilizamos la relación (ecuación 43):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6} = 10{,}47\ \mathrm{m}^{-1} \tag{165}$$

Y para hallar $\omega$ utilizamos la relación

$$\omega = 2\pi f = 188{,}49\ \mathrm{rad/s} \tag{166}$$

Por lo tanto, la ecuación de esta onda armónica será:

$$f(x,t) = 0{,}002\,\mathrm{sen}(10{,}47x - 188{,}49t) \tag{167}$$

**2.**

**a)** Si recordáis cómo podemos expresar una onda armónica (ecuación 41):

$$f(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{168}$$

y lo comparáis con la expresión que nos han dado, vemos que:

- la amplitud es: $A = 0{,}75$ m,
- el número de onda es: $k = \pi/2\ \mathrm{m}^{-1}$,
- la frecuencia angular es: $\omega = 340\pi/2$ rad/s,
- la fase inicial es: $\phi = 0$.

En consecuencia, pues, la amplitud es igual a 0,75 m.

**b)** La longitud de onda, $\lambda$, la podemos calcular a partir de la relación (ecuación 43):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{169}$$

Puesto que $k$ ya la hemos hallado en el apartado 1, podemos determinar $\lambda$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\ \mathrm{m} \tag{170}$$

Así, la longitud de onda es igual a 4 metros.

**c)** La frecuencia la podemos calcular a partir de la frecuencia angular, que ya conocemos (ecuación 45):

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{340\pi/2}{2\pi} = 85\ \mathrm{s}^{-1} \tag{171}$$

**d)** Finalmente, la velocidad de propagación la podemos hallar a partir de la expresión (ecuación 49):

$$v = \lambda f \tag{172}$$

Como ya sabemos $\lambda$ y $f$, sustituimos sus valores y tenemos:

$$v = 4 \cdot 85 = 340\ \mathrm{m/s} \tag{173}$$

**3.** En el subapartado 5.2 ya habéis visto que la ecuación de una onda estacionaria es (ecuación 97):

$$y_s = 2A\,\mathrm{sen}(kx + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2) \tag{174}$$

Comparando con la ecuación que nos han dado, tenemos:

- $2A = 0{,}024$ m,
- $k = 52{,}3$ m$^{-1}$,
- $\omega = 480$ s$^{-1}$,
- $\phi = 0$.

La velocidad la podemos hallar a partir de la relación (ecuación 50):

$$v = \frac{\omega}{k} = 9{,}18\,\mathrm{m/s} \tag{175}$$

Para determinar dónde se encuentran los nodos de esta onda, primero podemos encontrar la longitud de onda, utilizando la expresión (ecuación 43):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}12\,\mathrm{m} \tag{176}$$

Y como cada nodo está separado por una longitud igual a la mitad de la longitud de onda, la distancia entre nodos será, pues, 0,06 m.

**4.** Una forma de plantear el problema es calcular cuál es la potencia total de las ondas sonoras emitidas por el avión, aprovechando que sabemos cuál es la intensidad a 10 metros. Como sabemos que no hay absorción, la potencia debe ser la misma a cualquier otra distancia, sólo que repartida por una superficie más o menos grande.

Así pues, a 10 metros tenemos una intensidad (llamémosla $I_{10}$) de $10^3$ W/m$^2$. Multiplicando la intensidad por el área tendremos la potencia. Y como las ondas son esféricas, el área es la superficie de una esfera, $4\pi r^2$:

$$P = I_{10} \cdot 4\pi r^2 = 10^3 \cdot 4\pi 10^2 = 1{,}26 \cdot 10^6\,\mathrm{W} \tag{177}$$

Estos $1{,}26 \cdot 10^6$ vatios son los mismos que habrá a cualquier otra distancia, en concreto a la distancia que corresponda a una intensidad de $10^{-3}$ W/m$^2$:

$$1{,}26 \cdot 10^6 = 10^{-3} \cdot 4\pi r^2 \tag{178}$$

De aquí podemos despejar $r$:

$$r = \sqrt{\frac{1{,}26 \cot 10^6}{4\pi 10^{-3}}} \approx 10.000\,\text{m} \tag{179}$$

Es decir, a una distancia de unos 10 km.

**5.**

**a)** Fijaos que el enunciado del problema ya nos está diciendo cuál es la frecuencia de las ondas, $f$ = 120 Hz, y también su longitud de onda, $\lambda$ = 31 cm. Así, sólo necesitamos utilizar la relación (ecuación 49):

$$v = \lambda f = 0{,}31 \cdot 120 = 37{,}2\,\text{m/s} \tag{180}$$

**b)** Recordad que, al derivar la ecuación de ondas, habíamos hallado que en las ondas se da una relación general entre la velocidad de propagación y las propiedades del medio (ecuación 38). En el caso de una cuerda tensa esta relación es, más específicamente (ecuación 39):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{181}$$

Dado que en el apartado *a* ya hemos calculado la velocidad de propagación, $v$, y nos dicen que la tensión $T$ es igual a 1,20 N, de la ecuación anterior podemos hallar la densidad lineal de masa, $\lambda$, despejándola:

$$\lambda = \frac{T}{v^2} = \frac{1{,}20}{(37{,}2)^2} = 8{,}67 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m} \tag{182}$$

**Recordad que $\lambda$ es la letra griega lambda minúscula.**

Ahora, con la densidad lineal de masa, es decir, con la masa por unidad de longitud de la cuerda, podemos encontrar directamente la masa, $m$, de una longitud, $l$, de 50 cm (igual a 0,5 m) de cuerda:

$$\lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \lambda \cdot l = 8{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}5 = 4{,}33 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \tag{183}$$

Es decir, 50 cm de cuerda tienen una masa 0,43 gramos.

**6.** Recordad que la energía transportada por una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y de la frecuencia, según la expresión (ecuación 147):

$$E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2. \tag{184}$$

En el caso que nos ocupa tenemos:

- la masa: $m = 0{,}08$ kg,
- la amplitud: $A = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ m,
- la frecuencia: $f = 120$ Hz, de donde podemos obtener la frecuencia angular, $\omega = 2\pi f = 754{,}98$ rad/s.

Con todo esto ya podemos determinar $E$:

$$E = \frac{1}{2} 0{,}08(754{,}98 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-4})^2 = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = 0{,}58\,\mathrm{mJ} \tag{185}$$

7.

**a)** Para obtener la frecuencia detectada por el observador primero debemos considerar en qué situación nos encontramos. En este caso se trata de un observador en reposo y un emisor en movimiento que se aleja del observador. Utilizamos entonces la ecuación general del efecto Doppler (ecuación 118):

$$f_o = f \frac{v + v_o}{v + v_e} \tag{186}$$

con:

- $f = 800$ Hz,
- $v = 340$ m/s (consideramos la velocidad del sonido),
- $v_o = 0$ m/s,
- $v_e = 15$ m/s, fijaos que es positiva porque, en el caso considerado, emisor y onda emitida van en sentidos contrarios.

Con todo esto, la ecuación anterior es:

$$f_o = 800 \frac{340 + 0}{340 + 15} = 766{,}20\,\mathrm{Hz} \tag{187}$$

es decir, una frecuencia ligeramente más baja.

**b)** Ahora la situación es muy parecida pero con una diferencia significativa: el emisor y la onda emitida van en el mismo sentido. Después esta onda emitida rebota en el acantilado y vuelve hacia atrás hasta el observador, pero como el acantilado está en reposo, no afecta en nada a la frecuencia de la onda. Fijaos que esto es diferente del caso del radar de la policía, que hemos estudiado en el apartado 6; en aquel caso la onda rebotaba en el coche, pero el coche estaba en movimiento y, por lo tanto, sí que modificaba la frecuencia de la onda.

Así tenemos:

- $f = 800$ Hz,
- $v = 340$ m/s (consideramos la velocidad del sonido),

- $v_o = 0$ m/s,
- $v_e = -15$ m/s, fijaos que es negativa porque, en el caso considerado, emisor y onda emitida van en el mismo sentido.

Con todo esto, la ecuación anterior es:

$$f_o = 800\frac{340+0}{340-15} = 836{,}92\,\text{Hz} \tag{188}$$

es decir, una frecuencia ligeramente más alta.

**8.**

**a)** La única posibilidad para que oigamos batidos es la superposición de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. En este caso, como el chico se acerca hacia nosotros, recibimos directamente de él una frecuencia ligeramente más alta. Pero, al mismo tiempo, el chico se aleja de la pared y la pared recibe una frecuencia ligeramente más baja, que rebota y finalmente también llega a nosotros. Estas dos ondas, con frecuencias ligeramente diferentes, la que nos viene directamente del chico y la que nos llega tras rebotar en la pared, son las que, superpuestas, producen los batidos.

**b)** Para hallar la frecuencia original del silbido partimos de la información que nos dan: la frecuencia de batido es igual a 4 $s^{-1}$. Según la ecuación 92 sabemos que la frecuencia de batido es igual a la diferencia entre las frecuencias angulares de las ondas superpuestas:

$$\omega_{\text{batido}} = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{189}$$

o bien, en términos de frecuencia:

$$\omega_{\text{batido}} = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi(f_1 - f_2) \tag{190}$$

Ahora necesitamos encontrar las dos frecuencias en función de la frecuencia original. Aplicamos la fórmula del efecto Doppler (ecuación 118):

$$f_o = f\frac{v+v_o}{v+v_e} \tag{191}$$

En nuestro caso tenemos una velocidad del observador, $v_o$, igual a cero, mientras que la velocidad del emisor, $v_e$, es positiva en un caso y negativa en el otro, siguiendo el convenio que hemos establecido de hacerla positiva cuando tiene sentido contrario al de la emisión de la onda considerada y negativa cuando tiene el mismo sentido que la onda considerada. Así, las dos frecuencias $f_1$ y $f_2$ serán:

$$f_1 = f\frac{v}{v + v_n} \tag{192}$$

$$f_2 = f\frac{v}{v - v_n} \tag{193}$$

De aquí:

$$\omega_{\text{batido}} = 2\pi\left(f\frac{v}{v + v_n} - f\frac{v}{v - v_n}\right) \tag{194}$$

Hacemos la suma dentro del paréntesis y nos queda:

$$\omega_{\text{batido}} = 2\pi\left(f\frac{v(v - v_n) - v(v + v_n)}{(v + v_n)(v - v_n)}\right) \tag{195}$$

**Recordad que**
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\omega_{\text{batido}} = 2\pi f v\left(\frac{2v_n}{v^2 - v_n^2}\right) \tag{196}$$

Recordad que lo que queremos hallar es $f$, de modo que lo aislamos de la expresión anterior y tenemos:

$$f = \frac{\omega_{\text{batido}}}{2\pi}\frac{v^2 - v_n^2}{2v_n v} \tag{197}$$

Todos los valores de la ecuación anterior ya los conocemos:

- $f_{\text{batido}} = \omega_{\text{batido}}/2\pi = 4\ \text{s}^{-1}$,
- $v_n = 1$ m/s,
- $v = 340$ m/s.

Así pues:

$$f = 4 \cdot \frac{340^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 340} = 680\,\text{Hz} \tag{198}$$

**9.** En primer lugar, hay que tener bien claro qué significa que la frecuencia haya disminuido en un 10 %. Si la frecuencia ha disminuido en un 10 % es que la diferencia entre la frecuencia emitida original, $f$, y la frecuencia observada, $f_o$, es un 10 % de la frecuencia original:

$$f - f_o = 0{,}1f \tag{199}$$

Por otro lado sabemos que, por el efecto Doppler, la frecuencia observada y la emitida están relacionadas por (ecuación 118):

$$f_o = f\frac{v + v_o}{v + v_e} \tag{200}$$

donde $v_o$ es la velocidad del observador y $v_e$, la del emisor. Como en nuestro caso el observador está en reposo ($v_o = 0$):

$$f_o = f\frac{v}{v + v_e} \tag{201}$$

Si despejamos $v_e$ de esta expresión, hallamos:

$$v_e = v\frac{f - f_o}{f_o}. \tag{202}$$

Si sustituimos el resultado de 199 tenemos:

$$v_e = v0{,}1\frac{f}{f_o}. \tag{203}$$

De hecho aún podemos simplificar más; si en 199 ponemos $f$ en función de $f_o$, tenemos:

$$0{,}9f = f_0 \tag{204}$$

Y de aquí:

$$v_e = v0{,}1\frac{f}{0{,}9f} = 0{,}11v \tag{205}$$

y como el sonido se propaga a 340 m/s, tenemos:

$$v_e = 0{,}11 \cdot 340 = 37{,}8\,\text{m/s} \tag{206}$$

# Apéndice. El teorema de Fourier

En su forma más simple (la única que nos interesa ahora), el teorema de Fourier establece que cualquier función periódica $f(x)$ se puede expresar como una suma infinita (una serie) de términos de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \tag{207}$$

donde $a_0$ y $a_n$ y $b_n$ son los denominados coeficientes de Fourier que se pueden calcular mediante las expresiones siguientes:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \geq 0 \tag{208}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx, \quad n \geq 1 \tag{209}$$

# Resumen

En este módulo hemos dado una visión general del movimiento ondulatorio. El objetivo era poder distinguir y analizar las características fundamentales de las ondas, de forma cualitativa pero también cuantitativa. En este sentido, el objetivo se resume en tener bien clara la definición de onda, "una perturbación que se propaga por el espacio y el tiempo, con transporte de energía y cantidad de movimiento pero sin transporte neto de materia", y su significado y saber que esto se puede describir de manera precisa con la ecuación de ondas.

Una vez establecida la ecuación de ondas, no nos hemos entretenido demasiado en ella, porque un análisis detallado es relativamente complejo y ya lo haréis cuando estudiéis, concretamente, las ondas electromagnéticas. Por eso hemos pasado a un caso particular que se puede analizar de forma muy simple: las ondas armónicas, las que se pueden describir con una función seno o coseno. Como el teorema de Fourier nos garantiza que cualquier onda se puede escribir como la suma de ondas armónicas, el estudio de esta clase de ondas resulta mucho más interesante de lo que podía parecer inicialmente.

Posteriormente hemos añadido algo más de complejidad a nuestro estudio y, en lugar de considerar sólo una onda, hemos considerado dos o más que se pueden encontrar en un punto del espacio. Es en este momento cuando hemos estudiado la superposición de ondas y hemos visto que las ondas se suman de un modo sencillo. Esta superposición da lugar a fenómenos interesantes, como los batidos, por ejemplo.

El siguiente paso ha sido imponer condiciones de contorno a las ondas, es decir, en lugar de suponer que se pueden propagar indefinidamente, nos hemos preguntado qué pasa cuando una onda se encuentra con una frontera que delimita dos medios. El resultado más general es que una parte de la energía que lleva la onda pasa al otro lado de la frontera y la otra parte "rebota" y vuelve al medio original. Además, en algunos casos concretos, que hemos estudiado, se producen ondas estacionarias.

A continuación hemos introducido en la discusión el papel del observador o receptor de las ondas y hemos visto que el estado de movimiento que tenga respecto a la fuente emisora de ondas no es en absoluto irrelevante, sino que determina cuál es la frecuencia observada de la onda.

Para acabar, hemos estudiado los aspectos energéticos asociados a las ondas y hemos visto que la energía que lleva una onda es proporcional al cuadrado de su amplitud y al cuadrado de su frecuencia. En lugar de la energía total o la densidad de energía, que son magnitudes difíciles de medir, hemos introducido la intensidad, mucho más habitual y práctica. También hemos considerado brevemente cómo pueden perder energía las ondas cuando se propagan por un medio que absorbe energía.

Con todo esto hemos intentado dar una serie de conceptos generales y fundamentales sobre las ondas que, posteriormente, podréis aplicar con más detenimiento a cualquier clase de ondas. En el módulo "Acústica" lo haréis brevemente con ondas mecánicas sonoras, pero, sobre todo, lo haréis con mucho más detalle cuando estudiéis las ondas electromagnéticas.

# Ejercicios de autoevaluación

**1.** La energía de una onda...
**a**) es proporcional a su amplitud.
**b**) es inversamente proporcional a su intensidad.
**c**) es proporcional al cuadrado de su amplitud.
**d**) es proporcional al cuadrado de su intensidad.

**2.** La longitud de onda de una onda sonora de frecuencia 850 Hz, suponiendo que la velocidad de propagación en el aire es 340 m/s, es...
**a**) 0,85 m.
**b**) 2,89 m.
**c**) 4,00 m.
**d**) 0,40 m.

**3.** Una onda tiene una longitud de onda de 20,93 cm y se propaga por un medio a una velocidad de 91,46 m/s. Su frecuencia es...
**a**) 436,98 Hz.
**b**) 4,36 Hz.
**c**) 0,23 Hz.
**d**) $2{,}29 \cdot 10^{-3}$ Hz.

**4.** Una onda esférica que se propaga en un medio no absorbente...
**a**) tiene siempre la misma intensidad.
**b**) tiene siempre la misma densidad de energía.
**c**) tiene siempre la misma energía.
**d**) tiene siempre la misma intensidad radiante.

**5.** La polarización es un fenómeno que se produce...
**a**) en todo tipo de ondas.
**b**) sólo en ondas transversales.
**c**) sólo en ondas mecánicas.
**d**) sólo en ondas planas.

**6.** Cuando una fuente emisora de ondas se mueve hacia nosotros, la frecuencia que nosotros detectamos de las ondas es...
**a**) menor que la emitida por la fuente.
**b**) mayor que la emitida por la fuente.
**c**) igual que la emitida por la fuente.
**d**) igual que la emitida por la fuente, pero con menor longitud de onda.

**7.** La velocidad de propagación de las ondas emitidas por una fuente en movimiento es...
**a**) igual a la suma de las velocidades de la fuente y de propagación.
**b**) diferente que si no se estuviera moviendo, pero la relación entre ambas es complicada.
**c**) la misma que si no se estuviera moviendo.
**d**) Todas las anteriores son falsas.

**8.** Se producen batidos cuando...
**a**) se superponen dos ondas de longitudes de onda ligeramente diferentes.
**b**) se superponen dos ondas de frecuencias iguales.
**c**) se superponen dos ondas de amplitudes ligeramente diferentes.
**d**) se superponen dos ondas ligeramente desfasadas.

# Solucionario

**1.** c; **2.** d; **3.** a; **4.** c; **5.** b; **6.** b; **7.** c; **8.** a

# Glosario

**amplitud** *f* Separación máxima respecto a la posición de equilibrio que asume una magnitud vibratoria oscilante.

**ángulo de fase** *m* Véase **fase inicial**

**efecto Doppler** *m* Modificación que experimenta la frecuencia de una onda cuando el emisor y el receptor se encuentran en movimiento relativo.

**fase** *f* Estado de una onda en un instante y posición determinados, expresado por el valor de la magnitud que la describe.

**fase inicial** *f* Valor de la fase de un fenómeno periódico en el instante inicial y en la posición inicial.
sin. **ángulo de fase**

**frecuencia** *f* Número de ciclos u oscilaciones que realiza una magnitud de un fenómeno periódico por unidad de tiempo.

**frecuencia angular** *f* Magnitud característica de un fenómeno periódico que es igual a la frecuencia multiplicada por $2\pi$.

**frente de onda** *m* Conjunto de todos los puntos adyacentes de una onda que se encuentran en el mismo estado de oscilación.

**longitud de onda** *f* Distancia mínima entre dos puntos de una onda que están en el mismo estado de oscilación.

**número de Mach** *m* Número adimensional que proporciona la relación entre la velocidad de un objeto que se mueve en un fluido y la velocidad del sonido en este fluido.

**número de onda** *m* Magnitud característica de un fenómeno periódico igual a $2\pi$ dividido por la longitud de onda.

**onda** *f* Perturbación que se propaga por el espacio y el tiempo, con transporte de energía y cantidad de movimiento pero sin transporte neto de materia.

**onda armónica** *f* Onda que se puede expresar matemáticamente mediante una función senoidal.

**polarización** *f* Condición de una onda transversal por la cual la magnitud característica de la onda mantiene una orientación determinada respecto a la dirección de propagación, sea constante o con una variación temporal bien definida.

# Bibliografía

**Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M.** (1963). *The Feynman lectures on Physics* (capítols 47–51). Reading, Massachusetts: Addison Wesley.

**French, A. P.** (1974). *Vibraciones y ondas*. Barcelona: Editorial Reverté.

**Isalgué Buxeda, A.** (1995). *Física de la llum i el so*. Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 41).

**José Pont, J.; Moreno Lupiáñez, M.** (1994). *Física i ciència-ficció* (capítulo 7). Barcelona: Edicions UPC ("Politext", 33).

**Tipler, P. A.; Mosca, G.** (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5.ª edición, volumen 1B). Barcelona: Editorial Reverté.