GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #1.
Tema: Operaciones con fracciones.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Simplificar: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=$

$R \Rightarrow 5.$

2.- Simplificar la siguiente expresión: $1-\dfrac{1}{2-\frac{1}{3}}=$

$R \Rightarrow \dfrac{2}{5}$

3. Simplificar la siguiente fracción: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=$

$R \Rightarrow \frac{50}{27}$

4.- Simplificar $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} =$

$R \Rightarrow \frac{14}{5}$

5.- Si a = 4 y b = 7, encontrar el valor de $\dfrac{a+\frac{a}{b}}{a-\frac{a}{}} =$

$R \Rightarrow \frac{4}{3}$

6.- Efectuar la siguiente división: $1/\dfrac{x+y}{x^2} =$

$R \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+y}$

7.- Efectuar la siguiente operación: $\dfrac{3a-9b}{x-5} \cdot \dfrac{xy-5y}{ax-3bx} =$

$R \Rightarrow \dfrac{3y}{x}$

8.- Simplificar: $\dfrac{4x^3+6x^2}{2x} =$

$R \Rightarrow 2x^2+3x; x \neq 0.$

9.- Simplificar: $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} =$

$R \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$

10.- Efectuar y simplificar:

(a) $\frac{6(a+1)}{a+8}-\frac{3(a-4)}{a+8}-\frac{2(a+5)}{a+8}=$ $R \Rightarrow 1$

(b) $\frac{7x-3y+6}{x+y}-\frac{2(x-4y+3)}{x+y}=$ $R \Rightarrow 5$

© $\frac{5x+2}{x-6}-\frac{3(x+4)}{x-6}-\frac{x-7}{x-6}=$ $R \Rightarrow \frac{x-3}{x-6}$

11.- Resolver y simplificar: $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}=$ $R \Rightarrow \frac{3-2x}{2-x}$

12.- Simplificar la fracción siguiente:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=$$ $R \Rightarrow \frac{xy}{x+y}$

13.- Simplificar: $\frac{x+\frac{1}{y}}{x-\frac{1}{y}}=$ $R \Rightarrow \frac{yx+1}{yx-1}$

14.- Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{ab+ac}=$ $R \Rightarrow \frac{1}{bc}$

(b) $\frac{2-\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}+1}=$ $R \Rightarrow \frac{35}{32}$

15.- Simplificar: $\dfrac{x-\frac{2}{y}}{x+\frac{3}{y}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{yx-2}{yx+3}$

16.- Simplificar la expresión: $\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{5}{x}+\frac{6}{y}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{3y-2x}{5y+6x}$

17.- Simplificar: $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}{1-\frac{1}{x}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{2y+3x}{y(x-1)}$

18.- Reducir a una simple expresión: $a+b-\dfrac{2ab}{a+b}=$ $R \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

19.- Efectuar la siguiente suma: $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{5}{x+2}=$ $R \Rightarrow \dfrac{7x-11}{(x-3)\cdot(x+2)}$

20.- Reducir la siguiente expresión a una fracción simple:

$\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{3y}-\dfrac{3x+2y}{12xy}=$ $R \Rightarrow \dfrac{1}{12y}$

21.- Efectuar la siguiente operación: $\dfrac{3a}{2xy}-\dfrac{2-5x}{y^3}+6=$

$R \Rightarrow \dfrac{3ay^2-4x+10x^2+12xy^3}{2xy^3}$

22.- Simplificar: $\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{x-3}{x-1}$

23.- Simplificar: $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a-b}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{-b}{2a-b}$

24.- Simplificar: $\dfrac{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{y}{x+y}-\dfrac{x}{x-y}}=$ $R \Rightarrow -1$

25.- Si $x=\dfrac{c-ab}{a-b}$ encontrar el valor de la expresión $a(x+b)$.

$R \Rightarrow \dfrac{a(c-b^2)}{a-b}$

26.- Si $x=\dfrac{c-ab}{a-b}$ encontrar el valor de la expresión $bx+c$

$R \Rightarrow \dfrac{a(c-b^2)}{a-b}$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #2.
Tema: Operaciones con Potencias.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver y simplificar:

(a) $3^{-2} =$ $\qquad R \Rightarrow \frac{1}{9}$

(b) $\frac{1}{5^{-2}} =$ $\qquad R \Rightarrow 25$

© $-3^{-2} =$ $\qquad R \Rightarrow -\frac{1}{9}$

(d) $(-3)^{-2} =$ $\qquad R \Rightarrow \frac{1}{9}$

(e) $\frac{-3}{4^{-1}} =$ $\qquad R \Rightarrow -12$

(f) $8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^0 =$ $R \Rightarrow 8$

(g) $6^0 + \left(-6\right)^0 =$ $R \Rightarrow 2$

(h) $\left(-7\right)\cdot\left(-3\right)^0 =$ $R \Rightarrow -7$

(i) $9^{-1} =$ $R \Rightarrow \frac{1}{9}$

(j) $7^{-2} =$ $\frac{1}{49}$

2.- Simplificar la expresión $\left(3^{-1}+2^{-1}\right)^{-2} =$ $R \Rightarrow \frac{36}{25}$

3.- Efectuar la siguiente operación: $\left(7\cdot 10^5\right)^3 \cdot \left(3\cdot 10^{-3}\right)^4 =$ $R \Rightarrow 7^3 \cdot 3^4 \cdot 10^3$

4.- Efectuar las siguientes operaciones:

(a) $5x^5 \cdot 2x^2 =$ $R \Rightarrow 10x^7$

(b) $\left(x^4\right)^6 =$ $R \Rightarrow x^{24}$

© $\frac{8y^8}{2y^2} =$ $R \Rightarrow 4y^6$

(d) $\frac{x^3}{x^6}\cdot\left(\frac{7}{x}\right)^2 =$ $R \Rightarrow \frac{49}{x^5}$

5.- Modificar la siguiente expresión de modo que no tenga exponentes negativos:

$\frac{3x^{-1}-y^{-2}}{x^{-2}+2y^{-1}} =$ $R \Rightarrow \frac{x\left(3y^2-x\right)}{y\left(y+2x^2\right)}$

6.- Simplificar:

(a) $\frac{a^{-3}b^2}{a^{-2}b^4} =$ $R \Rightarrow \frac{1}{ab^2}$

(b) $\frac{3x^{-4}}{y^2}\cdot\frac{4x}{9x^2y^{-1}}=$ $R \Rightarrow \frac{4}{3yx^5}$

7.- Efectuar los siguientes productos:

(a) $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy^2\right)=$ $R \Rightarrow 6x^3y^3$

(b) $\left(-xy^3\right)\cdot\left(4xyz\right)\cdot\left(2yz\right)=$ $R \Rightarrow -8x^2y^5z^2$

8.- Utilizar las propiedades de los exponentes para resolver el siguiente ejercicio:

$\left(2^3\cdot x^4\cdot 5^2\cdot y^7\right)^5=$ $R \Rightarrow \left(2^{15}\cdot x^{20}\cdot 5^{10}\cdot y^{35}\right)$

9.- Ejecutar los siguientes ejercicios y simplificar. No dar resultados con exponentes negativos.

(a) $\left(7x^{-3}y^5\right)^{-2}=$ $R \Rightarrow \frac{x^6}{49y^{10}}$

(b) $\left(5x^7y^{-8}\right)^{-3}=$ $R \Rightarrow \frac{y^{24}}{125x^{21}}$

10.- Evaluar las siguientes expresiones:

(a) $\frac{-12x^{10}y^9z^5}{3x^2y^3z^6}=$ $R \Rightarrow \frac{-4x^8y^6}{z}$

(b) $\frac{-16x^{16}y^6z^4}{-4x^4y^2z^7}=$ $R \Rightarrow \frac{4x^{12}y^4}{z^3}$

11.- Resolver el siguiente ejercicio y simplificar:

$\left(\frac{-5b^y}{3^2\cdot x^5}\right)^3\cdot\left(\frac{3x^7}{5b^y}\right)^2=$ $R \Rightarrow \frac{-5b^y}{81x}$

12.- Determinar el valor de $\left(0{,}0081\right)^{-\frac{3}{4}}=$ $R \Rightarrow \frac{1000}{27}$

13.- Simplificar: $\left[\frac{1.600\cdot 10.000}{2.000}\right]^{\frac{1}{3}}=$ $R \Rightarrow 20$

14.- Determinar el valor de: $\dfrac{5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{4}}} =$ $R \Rightarrow 5$

15.- Ejecutar la expresión siguiente, encontrando una fracción equivalente, con un denominador racional:

$$\left(5^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{8}}\right) \div \left(5^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{8}}\right) =$$

$$R \Rightarrow \frac{14 + 5^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} + 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{11}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #3.
Tema: Operaciones con raíces y radicales.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver y simplificar:

(a) $\sqrt[3]{-512} =$ $\qquad R \Rightarrow -8$

(b) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} =$ $\qquad R \Rightarrow \dfrac{3}{2}$

© $\sqrt[3]{-16} \div \sqrt[3]{-2} =$ $\qquad R \Rightarrow 2$

2.- Demostrar las igualdades:

(a) $(-8)^{\frac{2}{3}} = \left(-8^{\frac{1}{3}}\right)^2$

(b) $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4 =$

3.- Encontrar el valor numérico de cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $8^{\frac{2}{3}} =$ $\qquad R \Rightarrow 4$

(b) $25^{\frac{3}{2}} =$ $\qquad R \Rightarrow 125$

4.- Simplificar $\sqrt{12} - \sqrt{27} =$ $\qquad R \Rightarrow -\sqrt{3}$

5.- Simplificar $5\sqrt{12} + 3\sqrt{75} =$ $\qquad R \Rightarrow 25\sqrt{3}$

6.- Si a =3 y b = 2, encontrar $(6a - b)^{-\frac{5}{4}} =$ $\qquad R \Rightarrow \frac{1}{32}$

7.- Simplificar el cociente $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} =$ $\qquad R \Rightarrow x^{\frac{1}{4}}$

8.- Simplificar:

(a) $\sqrt{8x^3y} =$ $\qquad R \Rightarrow 2|x|\sqrt{2xy}$

(b) $\sqrt{\frac{2a}{4b^2}} =$ $\qquad R \Rightarrow \frac{\sqrt{2a}}{2|b|}$

© $\sqrt[4]{25x^2} =$ $\qquad R \Rightarrow \sqrt{5|x|}$

9.- Encontrar el producto $\sqrt[4]{x^3y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} =$ $\qquad R \Rightarrow x\sqrt[4]{y^3}$

10.- Ejecutar la siguiente expresión y escribir el resultado final sin exponentes negativos o exponentes ceros: $\left(\frac{64a^{-3} \cdot b^{\frac{4}{3}}}{27a^{-9} \cdot b^{-\frac{14}{3}}} \right)^{-\frac{2}{3}} =$ $\qquad R \Rightarrow \frac{9}{16a^4b^4}$

11.- Simplificar la expresión: $\sqrt[3]{-81x^3} - 2x\sqrt[3]{3} + 5x\sqrt[3]{24} =$ $\qquad R \Rightarrow 5x\sqrt[3]{3}$

12.- Encontrar la raíz cuadrada de la expresión $\frac{3}{2}(x-1) + \sqrt{2x^2 - 7x - 4} =$

Sugerencias para el profesor: Transformar expresión en producto, como sigue:

$$\frac{3}{2}(x-1)+\sqrt{2x^2-7x-4}=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\sqrt{2x^2-7x-4}=\frac{1}{2}\left(3x-3+2\sqrt{2x^2-7x-4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\right)=$$

Se transforma $3x-3=(2x+1)+(x-4)$; entonces la expresión original se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}\left[(2x+1)+(x-4)+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\right]=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-4}\right)^2$$

Ahora se toma la raíz cuadrada:
$R \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-4}\right).$

13.- Encontrar la raíz cúbica de la expresión $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=$

Sugerencias para el profesor: En este problema nos piden encontrar $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=$

Se empezará por factorizar $3\sqrt{3}$ de ambos términos en el radical:
$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}\left[3+\frac{11}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]}=\sqrt[3]{3\sqrt{3}\left[3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right]}=$$

Como, trabajando con exponentes, se puede demostrar que $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, entonces, la expresión original se puede escribir como:

$=\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{3+\dfrac{11}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}\right)=$ y ahora se debe observar que la expresión $3+\dfrac{11}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ es el resultado de un cubo perfecto, ya que $\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=3+\dfrac{11}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, lo que permite escribir que:

$\sqrt[3]{3+\dfrac{11}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}=1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ y por lo tanto:

$\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt{3}\cdot\left[1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. $R\Rightarrow\sqrt{3}+\sqrt{2}$

14.- Escribir las siguientes expresiones, sin denominador, y con exponentes fraccionarios:

(a) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} =$ $\qquad R \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$

(b) $\sqrt[3]{3} =$ $\qquad R \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}}$

© $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{xy^{-1}} =$ $\qquad R \Rightarrow x^{\frac{5}{6}} y^{-\frac{1}{3}}$

15.- Racionalizar el denominador de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \qquad R \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{3}{5}}} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x^1} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$$

16.- Escribir en forma radical, sin exponentes negativos y racionalizar los denominadores:

(a) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} =$ $\qquad R \Rightarrow \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x}$

(b) $\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{-\frac{2}{3}}} =$ $\qquad R \Rightarrow \sqrt[6]{x^5}$

17.- Racionalizar: $\dfrac{\sqrt[3]{3ax}}{\sqrt[3]{4a^2}} =$ $\qquad R \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{6a^2 x}}{2a}$

18.- Expresar el siguiente producto en su forma radical más simple, y racionalizar el denominador: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} =$ $\qquad R \Rightarrow \dfrac{\sqrt[12]{x}}{x}$

19.- Racionalizar el denominador de la siguiente expresión: $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$

$R \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

20.- Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}} =$ $R \Rightarrow \dfrac{x\sqrt{6y}+3y\sqrt{x}}{2x-3y}$

21.- Reducir $\dfrac{\left(2+\sqrt[3]{-1}\right)^2}{2+\sqrt{-1}} =$ a la forma $A+B\sqrt{-1}$.

$R \Rightarrow \frac{2}{5}+\frac{29}{5}\sqrt{-1}$

22.- Cambiar la siguiente expresión de modo que tenga denominador racional:

$\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} =$

Sugerencia para el profesor: $\dfrac{4}{9^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1} = \dfrac{4}{\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1} = \dfrac{4}{3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1} =$

Ahora, se multiplica numerador y denominador por $\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)$ y se simplifica

$R \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}}+1$

23.- Encontrar el producto $\sqrt[3]{2a^2x}\cdot\sqrt{2x} =$ $R \Rightarrow \sqrt[6]{32a^4x^5}$

24.- Multiplicar y simplificar: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) =$

$R \Rightarrow \sqrt{6}-3\sqrt{2}+2-2\sqrt{3}$

25.- Multiplicar y simplificar: $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right) =$

$R \Rightarrow 6+5\sqrt{6}$

26.- Encontrar el producto $\sqrt{3}\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) =$ $R \Rightarrow \sqrt{3}x^2-5\sqrt{3}$

27.- Encontrar los siguientes productos:

(a) $\sqrt{x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x}\right) =$ $R \Rightarrow \sqrt{2}x-x$

(b) $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\cdot\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $R \Rightarrow 2x-3\sqrt{xy}-2y$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #4.

Tema: Ecuaciones lineales.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1.- $3x-5=4$ $\qquad R \Rightarrow x=3$

2.- $6x-3=7+5x$ $\qquad R \Rightarrow x=10$

3.- $4x-5=x+7$ $\qquad R \Rightarrow x=4$

4.- $3x-8=7x+8$ $\qquad R \Rightarrow x=-4$

5.- $2x+5=7-x$ $\qquad R \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

6.- $7x-3=2(x+3)$ $\qquad R \Rightarrow x=\frac{9}{5}$

7.- (a) $4(6x+5)-3(x-5)=0$ $\qquad R \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

(b) $8+3x=-4(x-2)$ $\qquad R \Rightarrow x=0$

8.- $2(x+3)=(3x+5)-(x-5)$ $R \Rightarrow$ No tiene solución real. Conjuntoi vacío.

9.- $\frac{3}{4}x+\frac{7}{6}+1=0$ $R \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$

10.- $2\left(\frac{2}{3}y+5\right)+2(y+5)=130$ $R \Rightarrow y=33$

11.- $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}$ $R \Rightarrow x=-\frac{10}{3}$

12.- $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=12$ $R \Rightarrow x=\frac{72}{5}=14\frac{2}{5}$

13.- $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}=2x+1$ $R \Rightarrow x=-\frac{10}{3}$

14.- $\frac{1}{2x}-\frac{5}{16}=\frac{1}{x}$ $R \Rightarrow x=-\frac{8}{5}$

15.- Encontrar ***h*** en $A=\frac{h}{2}(b+B)$ $R \Rightarrow h=\frac{2A}{b+B}$

16.- Encontrar a en $\frac{1}{R}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $R \Rightarrow a=\frac{Rb}{b-R}$

17.- Resolver la ecuación $a(x+b)=bx+c; a\neq b.$ $R \Rightarrow x=\frac{c-ab}{a-b}; a\neq b$

18.- $\frac{x}{x+1}+\frac{5}{8}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{3}{4}$ $R \Rightarrow x=3$

19.- Resolver la ecuación $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{4-3x}=\frac{3}{6x-8}$ $R \Rightarrow x=\frac{7}{5}$

20.- Resolver la ecuación $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{5}{(x-1)(x-2)}$ $R \Rightarrow x=3$

21.- $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{6}{x^2-1}$ $R \Rightarrow x=1$

22.- Resolver la ecuación $\frac{2x}{3+x}+\frac{3+x}{3}=2+\frac{x^2}{3(x-3)}$ $R \Rightarrow x=1$

23.- Resolver $\sqrt{x-3}=4$ $R \Rightarrow x=19$

24.- Resolver la ecuación $\sqrt{3x+1}=5$ $R \Rightarrow x=8$

25.- Resolver $\sqrt{5}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}x-\sqrt{5}$ $R \Rightarrow x=-\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \Rightarrow -4-\sqrt{15}$

26.- $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$ $R \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

Sugerencia para el profesor: en el último problema aplicar primero la regla:

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, por lo que se puede escribir:

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}=\frac{4x-1+(2)}{4x-1-(2)} \Rightarrow$$

$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3}$ Elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}$$

Aplicando ahora, de nuevo, que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$$\frac{x+1+(x-1)}{x+1-(x-1)}=\frac{16x^2+8x+1+\left(16x^2-24x+9\right)}{16x^2+8x+1-\left(16x^2-24x+9\right)}$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8}$$

$$x=\frac{16x^2-8x+5}{16x-4} \Rightarrow 16x^2-4x=16x^2-8x+5 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #5.
Tema: Factorización.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Factorizar: $x(y+z)+u(y+z)=$ $R \Rightarrow (x+u)\cdot(y+z)$

2.- Factorizar:

(a) $4a^2b-2ab=$ $R \Rightarrow 2ab(2a-1)$

(b) $9ab^2c^3-6a^2c+12ac=$ $R \Rightarrow 3ac(3b^2c^2-2a+4)$

© $ac+bc+ad+bd=$ $R \Rightarrow (a+b)(c+d)$

3.- Factorizar los siguientes polinomios:

(a) $15ac+6bc-10ad-4bd=$ $R \Rightarrow (5a+2b)(3c-2d)$

(b) $3a^2c+3a^2d^2+2b^2c+2b^2d^2=$ $R \Rightarrow (c+d^2)(3a^2+2b^2)$

4.- Factorizar: $ax+by+ay+bx=$ $R \Rightarrow (a+b)(x+y)$

5.- Factorizar: $x^2+7x+12=$ $\qquad R\Rightarrow (x+3)(x+4)$

6.- Factorizar: $xy-3y+y^2-3x=$ $\qquad R\Rightarrow (x+y)(y-3)$

7.- Factorizar: $2ax-3by-2ay+3bx=$ $\qquad R\Rightarrow (x-y)(2a+3b)$

8.- Factorizar: $x^2-x-12=$ $\qquad R\Rightarrow (x-4)(x+3)$

9.- Factorizar: $x^2+7x+10=$ $\qquad R\Rightarrow (x+5)(x+2)$

10.- Factorizar: $(z+1)^2-b^2=$ $\qquad R\Rightarrow \left[(z+1)+b\right]\cdot\left[(z+1)-b\right]$

11.- Factorizar: $2x^2-3y^2=$ $\qquad R\Rightarrow \left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)$

12.- Factorizar: $16a^2-4(b-c)^2=$ $\qquad R\Rightarrow (4a+2b-2c)(4a-2b+2c)$

13.-Factorizar: $4x^2y^2-36x^2z^2=$

$$R\Rightarrow (2xy+6xz)(2xy-6xz)=4x^2(y+3z)(y-3z)$$

14.- Factorizar: $x^2-y^2=$ $\qquad R\Rightarrow (x+y)(x-y)$

15.- Simplificar: $(x+2y)(x-2y)\left(x^2+4y^2\right)=$ $\qquad R\Rightarrow x^4-16y^4$

16.- Factorizar: $25a^2+30ab+9b^2=$ $\qquad R\Rightarrow (5a+3b)^2$

17.- Factorizar: $x^3-8=$

Sugerencia para el profesor:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$R\Rightarrow x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$$

18.- Factorizar: $8a^3-27=$

Sugerencia para el profesor:

$$8a^3-27=(2a)^3-(3)^3=$$
$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=$$
$$(2a)^3-(3)^3=(2a-3)\left[(2a)^2+3(2a)+3^2\right]=$$

$$R \Rightarrow (2a-3)\left(4a^2+6a+9\right)$$

19.- Factorizar: $27x^3-8y^3=$

$R \Rightarrow (3x-2y)\left(9x^2+6xy+4y^2\right)$

20.- Encontrar los factores de: $125m^3n^6-8a^3=$

$$R \Rightarrow \left(5mn^2-2a\right)\left(25m^2n^4+10amn^2+4a^2\right)$$

21.- Factorizar $(x+y)^3+z^3=$

Sugerencias para el profesor: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$R \Rightarrow \left[(x+y)+z\right]\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]$$

22.- Factorizar $125x^3+64y^3=$

Sugerencias para el profesor: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$R \Rightarrow (5x+4y)\left(25x^2-20xy+16y^2\right)$

23.- Factorizar $5x^3+8y^3=$

Sugerencias para el profesor: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt[3]{5}x+2y\right)\left(\sqrt[3]{25}x^2-2\sqrt[3]{5}xy+4y^2\right)$$

24.- Factorizar:

(a) $2x^2+2y^2=$ $R \Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)$

(b) $a^3x+b^3x=$

Sugerencias para el profesor: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$R\Rightarrow(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)x$$

25.- Factorizar $a^4-b^4=$ $R\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

26.- Factorizar $2x^2y-8y^3=$ $R\Rightarrow 2y(x+2y)(x-2y)$

27.- Factorizar $16x^4y^2-256xy^5=$

$R\Rightarrow 2xy^2\left(8x^3-125y^3\right)=2xy^2\left[(2x)^3-(5y)^3\right]$ y como se debe recordar que:

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ entonces:

$$R\Rightarrow 2xy^2\left(8x^3-125y^3\right)=2xy^2(2x-5y)\left(4x^2+10xy+25y^2\right)$$

28.- Factorizar:

(a) $a^4+4a^2+4=$ $R\Rightarrow\left(a^2+2\right)^2$

(b) $9a^2-6ab^2+b^4=$ $R\Rightarrow\left(3a-b^2\right)^2$

29.- Factorizar: $a^4-a^2-12=$

Sugerencia para el profesor: $x^2+(c+d)x+cd=(x+c)(x+d)$; entonces:

$c+d=-1; c\cdot d=-12$

$$R\Rightarrow\left(a^2+3\right)\left(a^2-4\right)=\left(a^2+3\right)(a+2)(a-2)$$

30.- Factorizar: $49x^6-25y^6=$

$$R\Rightarrow 49x^6-25y^6=\left(7x^3\right)^2-\left(5y^3\right)^3=\left(7x^3+5y^3\right)\left(7x^3-5y^3\right)$$

31.- Factorizar: $128x^6 - 2y^6 =$

$$R \Rightarrow 2\left(64x^6 - y^6\right) = 2\left[\left(8x^3\right)^2 - \left(y^3\right)^2\right] = 2\left[\left(8x^3 + y^3\right)\left(8x^3 - y^3\right)\right]$$

Y como :

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Entonces:

$$R \Rightarrow 2(2x+y)\left(4x^2 - 2xy + y^2\right)(2x-y)\left(4x^2 + 2xy + y^2\right)$$

32.- Factorizar:

(a) $4a^4 - b^6 =$ $\qquad R \Rightarrow \left(2a^2 - b^3\right)\left(2a^2 + b^3\right)$

(b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 =$

$$R \Rightarrow a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = a^2 - (b-c)^2 =$$
$$= (a+b-c)(a-b+c)$$

33.- Factorizar: $6x^2 - 7x - 5 = 0$

Sugerencias para el profesor:

(a) Formar dos factores binómicos cuyo primer término es $6x : (6x........)(6x........) = 0$

(b) Colocar como signo del segundo término del primer binomio el signo del segundo término de la ecuación dada y como signo del segundo término del segundo binomio el producto de los signos del segundo y tercer término de la ecuación dada:
$(6x - ....)(6x +) = 0$.

© Se buscan ahora dos números que multiplicados den igual a $6 \cdot 5 = 30$ y restados algebraicamente den 7. Entonces, colocando el mayor en el primer factor:

$$x^2 + (c+d)x + cd = (x+c)(x+d)$$

$(6x - 10)(6x + 3) = 0$ Al efectuar este producto da el mismo resultado que la ecuación original; pero, multiplicado por 6. Entonces, el resultado es:

$$R \Rightarrow \frac{(6x-10)(6x+3)}{6}$$

34.- Factorizar: $6x^2-7x-3=0$

Sugerencias para el profesor:

O***tro método, más claro***. Se multiplica toda la ecuación por el coeficiente de x^2: $36x^2-6\cdot 7x-18=0$, lo que se puede escribir como: $(6x)^2-7(6x)-18=0$. Esto se puede escribir, entonces como el producto de dos factores $(6x-....)(6x+.....)$, y se buscan luego dos números cuya diferencia sea 7 y su producto sea 18. O sea:

$(6x-9)(6x+2)=0$; pero, como la principio se multiplicó toda la ecuación por 6, se deberá dividir ahora por 6. Entonces, el resultado es:

$$R \Rightarrow \frac{(6x-9)(6x+2)}{6}$$

35.- Factorizar:

(a) $2x^2+3x-2$ $R \Rightarrow (2x-1)(x+2)$

(b) $3x^2-5x-2$ $R \Rightarrow (3x+1)(x-2)$

© $6x^2+7x+2$ $R \Rightarrow (2x+1)(3x+2)$

(d) $5x^2+13x-6$ $R \Rightarrow (5x-2)(x+3)$

(e) $6x^2-6-5x$ $R \Rightarrow (3x+2)(2x-3)$

(f) $12x^2-x-6$ $R \Rightarrow (3x+2)(4x-3)$

(g) $4a^2+15a+9$ $R \Rightarrow (4a+3)(a+3)$

(h) $3+11a+10a^2$ $R \Rightarrow (2a+1)(5a+3)$

(i) $12m^2-13m-35$ $R \Rightarrow (3m-7)(4m+5)$

(j) $20y^2 + y - 1 =$ $R \Rightarrow (4y+1)(5y-1)$

(k) $8a^2 - 14a - 15 =$ $R \Rightarrow (2a-5)(4a+3)$

(l) $7x^2 - 44x - 35 =$ $R \Rightarrow (7x+5)(x-7)$

36- Factorizar: $18a^2 - 13a - 5 = 0$ $R \Rightarrow (a-1)(18a+5)$

37.- Factorizar: $15x^4 - 11x^2 - 12 = 0$ $R \Rightarrow (3x^2-4)(5x^2+3)$

Sugerencias para el profesor:

Multiplicar por 15: $(15x^2)^2 - 11(15x^2) - 180$

38.- Factorizar: $x^6 - 64 =$

$$R \Rightarrow (x^3+8)(x^3-8) = (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$$

39.- Factorizar:

(a) $12x^2y^2 + xy - 20$ $R \Rightarrow (3xy+4)(4xy-5)$

Sugerencias para el profesor:

Multiplicar por 12: $(12xy)^2 + 1(12xy) - 240$

40.- Encontrar el ***m.c.m.*** de: $x^2 + 2x + 1; x^2 - 1; x^2 - 3x + 2.$

Sugerencias para el profesor:

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$R \Rightarrow m.c.m. = (x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

41.- Encontrar el ***m.c.m.*** de $6x^2+24x+24; 4x^2-8x-12; 3x^2+9x+6.$

Sugerencias para el profesor:

$$6x^2+24x+24=6\left(x^2+4x+4\right)=6\left(x+2\right)^2=3\cdot 2\left(x+2\right)^2$$

$$4x^2-8x-12=4\left(x^2-2x-3\right)=4\left(x+1\right)\left(x-3\right)=2^2\left(x+1\right)\left(x-3\right)$$

$$3x^2+9x+6=3\left(x^2+3x+2\right)=3\left(x+1\right)\left(x+2\right)$$

$$R\Rightarrow m.c.m=\left(2\right)^2\left(3\right)\left(x+2\right)^2\left(x+1\right)\left(x-3\right)$$

42.- Encontrar el ***m.c.m.*** de $\left(x-1\right)^2;\left(1-x\right)^3;1-x^3:$

Sugerencias para el profesor:

$$\left(x-1\right)^2=\left(x-1\right)^2$$

$$\left(1-x\right)^3=\left(-1\right)^3\left(x-1\right)^3=-\left(x-1\right)^3$$

$$1-x^3=\left(-1\right)\left(x^3-1\right)=-\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

$$R\Rightarrow m.c.m.=\left(x-1\right)^3\left(x^2+x+1\right)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #6.
Tema: Simplificación de fracciones.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Simplificar: $\frac{x^2-y^2}{x+y}=$ $R \Rightarrow x-y$

2.- Efectuar y simplificar la operación indicada: $\frac{x^2-y^2}{2x}\cdot\frac{4x^2}{x+y}=$

$R \Rightarrow 2x\left(x-y\right)$

3.- Efectuar y simplificar: $\frac{3x+y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x\left(x-y\right)}-\frac{1}{x+y}=$ $R \Rightarrow \frac{2}{x}$

4.- Efectuar y simplificar la siguiente expresión: $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{4}{2-x}=$

$$R \Rightarrow \frac{7x+8}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}$$

5.- Simplificar: $\dfrac{\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}}{1+\dfrac{b^2}{a^2-b^2}}=$ $R \Rightarrow \dfrac{2}{a}$

6.- Combinar y simplificar las siguientes fracciones: $\dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{2}{y-x}-5=$

$$R \Rightarrow \frac{-x-2y-5x^2+5y^2}{x^2-y^2}$$

7.- Reducir a términos más bajos: $\dfrac{3x-6}{x^2-4}=$ $R \Rightarrow \dfrac{3}{x+2}$

8.- Combinar las siguientes fracciones: $\dfrac{12b-16a}{3a^2-3b^2}+\dfrac{5}{a+b}-\dfrac{1}{b-a}=$

$$R \Rightarrow \frac{2a}{3\left(a^2-b^2\right)}$$

9.- Simplificar: $\dfrac{4x+10}{4x^2+20x+25}=$

$4x^2+20x+25=\left(2x+5\right)^2$

$$R \Rightarrow \frac{2}{2x+5};x \neq -\frac{5}{2}$$

10.- Reducir a su expresión más baja: $\dfrac{4x-20}{50-2x^2}=$ $R \Rightarrow \dfrac{2}{x+5}$

11.- Simplificar: $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{2b^2+ab-a^2}=$

12.- Hacer la siguiente suma: $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x^2-5x+6}=$

$$R \Rightarrow \frac{2x^2-3x+6}{(x+2)(x-2)(x-3)}$$

13.- Hacer la siguiente división: $\left[\frac{2x-8}{x+1}\right] \div \left[\frac{3x^2-12x}{x^2-1}\right] =$

$$R \Rightarrow \frac{2(x-1)}{3x}$$

14.- Efectuar y simplificar: $\frac{2-x}{x^2-2x+1} - \frac{2x-3}{x^2-3x+2} =$

$$R \Rightarrow \frac{3x^2-9x+7}{(x-1)^2(x-2)}$$

15.- Resolver: $\frac{1}{x^2+x} - \frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x}; (x \neq 0,1,-1)$

$$R \Rightarrow -\frac{2}{3}$$

16.- Encontrar y simplificar el producto de $\frac{x^2-x}{x^2-x-2} \cdot \frac{x-2}{x^2} =$

$$R \Rightarrow \frac{x-1}{x^2+x}$$

17.- Combinar en una fracción simple: $\frac{2x}{x^2-6x+9} - \frac{8}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x+1} =$

$$R \Rightarrow \frac{19}{3}$$

18.- Reducir a su expresión menor: $\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}=$ $R \Rightarrow \frac{x-1}{x-3}$

19.- Reducir a su expresión menor: $\frac{a^3-8b^3}{2a^2-8b^2}=$ $R \Rightarrow \frac{a^2+2ab+4b^2}{2(a+2b)}$

20.- Dividir y simplificar: $\left[\frac{y^2+y-20}{y-3}\right] \div \left[\frac{y^2-16}{y^2+y-12}\right]=$

$$R \Rightarrow y+5;(y \neq 3,4,-4)$$

21.- Combinar las siguientes fracciones: $\frac{3}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}=$

$$R \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

22.- Multiplicar: $\frac{y^2+3y+2}{y-3} \cdot \frac{y^2-7y+12}{y^2+y-2}=$

$$R \Rightarrow \frac{y^2-3y-4}{y-1}$$

23.- Dividir: $\left[\frac{x-3}{x^2-7x+12}\right] \div \left[\frac{x^2-6x+9}{x^2-8x+16}\right]=$

$$R \Rightarrow \frac{x-4}{(x-3)(x-3)}=\frac{x-4}{(x-3)^2}$$

24.- Dividir: $\left[\frac{2y^2-11y+12}{6y^2-6y-12}\right] \div \left[\frac{3y^2-14y+8}{2y^2-6y+4}\right]=$

$$R \Rightarrow \frac{(2y-3)(y-1)}{3(y+1)(3y-2)}$$

25.- Dividir: $\left[\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{2a^3+16b^3}\right] \div \left[\dfrac{4a^2-b^2}{6a+12b}\right] =$

$$R \Rightarrow \frac{3(2a+b)}{(a^2-2ab+4b^2)(2a-b)}$$

26.- Multiplicar: $\left[\dfrac{x^3-y^3}{x^2-5x+6}\right] \cdot \left[\dfrac{x^2-4}{x^2-2xy+y^2}\right] =$

$$R \Rightarrow \frac{(x^2+xy+y^2)(x+2)}{(x-3)(x-y)}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #7.

Tema: Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver $x^2 - 8x + 15 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

$R \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 5$

2.- Resolver: $(3x-7)(x+2) = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3}; x_2 = -2$

3.- Resolver $3x^2 + 5x = 0$

$$R \Rightarrow x(3x+5) \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\frac{5}{3}$$

4.- Resolver $x^2 + 8x + 15 = 0$

$$R \Rightarrow (x+3)(x+5) \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -5$$

5.- Resolver $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$R \Rightarrow (x+2)(x+4) \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = -4$$

6.- Resolver $x^2 - 5x - 14 = 0$

$$R \Rightarrow (x-7)(x+2) \Rightarrow x_1 = 7; x_2 = -2$$

7.- Resolver: $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$R \Rightarrow (x-5)(x+2) \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = -2$$

8.- Resolver $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$R \Rightarrow (x+3)(x+2) \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -2$$

9.- Resolver $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$R \Rightarrow (2x-1)(x-1) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1$$

10.- Resolver $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$$R \Rightarrow (2x-3)(x-2) \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = 2$$

11.- Resolver los siguientes ejercicios:

(a) $x^2 - 3x = 0$ $\quad R \Rightarrow x(x-3) \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$

(b) $6x^2 + 5x - 4 = 0$

$$R \Rightarrow (3x+4)(2x-1) \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}; x_2 = \frac{1}{2}$$

12.- Resolver $5y^2 = 6y$

$$R \Rightarrow 5y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y(5y-6) = 0 \Rightarrow y_1 = 0; y_2 = \frac{6}{5}$$

13.- Resolver $4x^2 = 8x$

$$R \Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(4x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

14.- Resolver $4x^2 = 9x$

$$R \Rightarrow x(4x-9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{9}{4}$$

15.- Resolver $6x^2 = 2 - x$

$$R \Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (3x+2)(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1}{2}$$

16.- Resolver $2x^2 = x + 6$

$$R \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = 2$$

17.- Resolver $4x^2 = 4x - 1$

$$R \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

18.- Resolver $4x^2 = 100$

$$R \Rightarrow 4x^2 - 100 = 0 \Rightarrow 4(x-5)(x-5) \Rightarrow x_1 = x_2 = 5$$

19.- Resolver las siguientes ecuaciones mediante factorización:

(a) $2x^2+3x=0$

$$R \Rightarrow x(2x+3)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=-\frac{3}{2}$$

(b) $y^2-2y-3=y-3$

$$R \Rightarrow y(y-3)=0 \Rightarrow y_1=0; y_2=3$$

© $z^2-2z-3=0$

$$R \Rightarrow (z-3)(z+1)=0 \Rightarrow z_1=3; z_2=-1$$

(d) $2m^2-11m-6=0$

$$R \Rightarrow (2m+1)(m-6)=0 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}; m_2=6$$

20.- Resolver la ecuación $a^2x+4c^2x-10c-5a-4acx=0$

$$R \Rightarrow \left(a^2+4ac+4c^2\right)x=5(a+2c) \Rightarrow (a+2c)^2 x=5(a+2c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{a+2c}$$

21.- Resolver $\frac{x}{x-2}+\frac{x-1}{2}=x+1$

$$R \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x_1=3; x_2=-2$$

22.- Resolver la ecuación: $\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x}=2$

$$R \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (2x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 3$$

23.- Resolver $\frac{x+1}{x^2-5x+6} + \frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{6}{x^2-6x+8}$

$$R \Rightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} + \frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{(x-2)(x-4)} \Rightarrow$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow (2x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = 2$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #8.

Tema: Resolución de ecuaciones con radicales usando factorización

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver la ecuación $\sqrt{2x^2-9}=x$

$$R \Rightarrow 2x^2-9=x^2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_1=3; x_2=-3$$

2.- Resolver la ecuación $3\sqrt{x}+4=x$

$$R \Rightarrow 3\sqrt{x}=x-4 \Rightarrow \left(3\sqrt{x}\right)^2=\left(x-4\right)^2 \Rightarrow x^2-17x+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-1\right)\left(x-16\right)=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=16$$

3.- Resolver la ecuación $2y=\sqrt{2y+5}+1$

$$R \Rightarrow 2y-1=\sqrt{2y+5} \Rightarrow (2y-1)^2=\left(\sqrt{2y+5}\right)^2 \Rightarrow 2y^2-3y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2y+1)(y-2)=0 \Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}; y_2=2$$

4.- Resolver la ecuación $\sqrt{x^2-3x}=2x-6$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=(2x-6)^2 \Rightarrow 3x^2-21x+36=0 \Rightarrow \left(x^2-7x+12=0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow x_1=3; x_2=4$$

5.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x+2}+4=x$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x-4)^2 \Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-7)(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=7; x_2=2$$

6.- Encontrar la solución de la ecuación: $\sqrt{3-2x}=3-\sqrt{2x+2}$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt{3-2x}\right)^2=\left(3-\sqrt{2x+2}\right)^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{2x+2}\right)^2=(2x+4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow (2x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}; x_2=1$$

7.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x+7}+x=13$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}\right)^2=(13-x)^2 \Rightarrow x^2-27x+162=0 \Rightarrow (x-9)(x-18)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=9; x_2=18$$

8.- Resolver la ecuación: $\sqrt{11-x}-\sqrt{x+6}=3$

$$R \Rightarrow \left(\sqrt{11-x}\right)^2=\left(3+\sqrt{x+6}\right)^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{x+6}\right)^2=(-2-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x-50=0 \Rightarrow (x-10)(x+5)=0 \Rightarrow x_1=10; x_2=-5$$

9.- Resolver la ecuación $\sqrt{x^2+24x+3}=2x+3$

$$R\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+24x+3}\right)^2=\left(2x+3\right)^2\Rightarrow x^2-4x+2=0\Rightarrow\left(x-2\right)^2=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}\Rightarrow x_1=2-\sqrt{2};x_2=2+\sqrt{2}$$

10.- Resolver la ecuación $\sqrt{x+7}=2x-1$

$$R\Rightarrow\left(\sqrt{x+7}\right)^2=\left(2x-1\right)^2\Rightarrow 4x^2-5x-6=0\Rightarrow\left(4x+3\right)\left(x-2\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=-\frac{3}{4};x_2=2$$

11.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x^2-3x+27}=2x+3$

$$R\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-3x+27}\right)^2=\left(2x+3\right)^2\Rightarrow x^2+5x-6=0\Rightarrow\left(x+6\right)\left(x-1\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=-6;x_2=1$$

12.- Resolver la ecuación $\sqrt{5x-11}-\sqrt{x-3}=4$

$$R\Rightarrow\left(\sqrt{5x-11}\right)^2\left(\sqrt{x-3}+4\right)^2\Rightarrow\left(2\sqrt{x-3}\right)^2=\left(x-6\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-16x+48=0\Rightarrow\left(x-12\right)\left(x-4\right)=0\Rightarrow x_1=12;x_2=4$$

13.- Resolver la ecuación: $\sqrt{x+10}+\sqrt[4]{x+10}=2$

Sugerencia: $y=\sqrt[4]{x+10};y^2=\sqrt{x+10}$ Entonces, la ecuación original se transforma en la siguiente: $y^2+y-2=0$.

También: $y^2+y-2=\left(y+2\right)\left(y-1\right)=0.$ Luego $y_1=-2;y_2=1$

$R\Rightarrow$ Para y = -2, se tiene $\sqrt[4]{x+10}=-2\Rightarrow x+10=16\Rightarrow x_1=6$

Para y =1, se tiene $\sqrt[4]{x+10}=1 \Rightarrow x+10=1 \Rightarrow x_2=-9$

14.- Resolver la ecuación $x^2-x+2\sqrt{x^2-x-5}=8$

Sugerencia para el profesor: Resta 5 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2-x-5+2\sqrt{x^2-x-5}=3$$
$$\left(x^2-x-5\right)+2\sqrt{x^2-x-5}-3=0$$

Haciendo $y=\sqrt{x^2-x-5} \Rightarrow y^2=x^2-x-5$ por lo que se puede escribir:

$$y^2+2y-3=0 \Rightarrow (y+3)(y-1)=0 \Rightarrow y_1=-3; y_2=1$$

Resolviendo ahora para ***x:*** Se descarta el valor negativo -3 porque la raiz tiene signo positivo. Entonces:

$$R \Rightarrow \sqrt{x^2-x-5=1} \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=3; x_2=-2$$

14.- Resolver la ecuación $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$

Sugerencias para el profesor:

Hacer $\sqrt{\frac{x}{a}}=y; \sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y}$ Entonces, la ecuación original se transforma en:

$$2y+\frac{3}{y}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b} \Rightarrow yab\left(2y+\frac{3}{y}\right)=\left(\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}\right)yab \Rightarrow 2aby^2-6a^2y-b^2y+3ab=0$$
$$\Rightarrow (2ay-b)(by-3a)=0 \Rightarrow y_1=\frac{b}{2a}; y_2=\frac{3a}{b}$$

Sustituyendo $y_1=\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{x}{a}} \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow x_1=\frac{b^2}{4a}$

Sustituyendo ahora el otro valor de y:

$$y_2 = \frac{3a}{b} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{3a}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{9a^2}{b^2} \Rightarrow x_2 = \frac{9a^3}{b^2}$$

$$R \Rightarrow x_1 = \frac{b^2}{4a}; x_2 = \frac{9a^3}{b^2}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #9.

Tema: Resolución de cuadráticas por complementación de cuadrados.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- ***Ejercicio de complementación de cuadrados.*** Completar el cuadrado de: x^2+x-1

Solución: $x^2-x-1=x^2-x-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=x^2+x-1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow\left[x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

2.- Resolver $x^2-6x+8=0$

Sugerencia para el profesor: $x^2-6x=-8\Rightarrow 2hx=-6\Rightarrow h=-3\Rightarrow h^2=9$ Entonces, se suma 9 a ambos lados de la ecuación:

$$R\Rightarrow x^2-6x+9=-8+9=1\Rightarrow(x-3)^2=1\Rightarrow x-3=\pm1\Rightarrow x_1=4;x_2=2$$

3.- Resolver por complementación de cuadrados: $2x^2+8x+4=0$.

Sugerencias para el profesor: Dividir por $2 \Rightarrow x^2+4x+2=0 \Rightarrow x^2-4x=-2 \Rightarrow 2hx=4x \Rightarrow h=2 \Rightarrow h^2=4$

Sumar 4 a ambos lados de la ecuación: $x^2+4x+4=-2+4=2 \Rightarrow \left(x+2\right)^2=2 \Rightarrow$

$R \Rightarrow x+2=\sqrt{2}; x+2=-\sqrt{2} \Rightarrow x_1=\sqrt{2}-2; x_2=-\sqrt{2}-2$

4.- Resolver por complementación de cuadrados: $3x^2+6x-7=0$

Sugerencias para el profesor: $3x^2+6x=7 \Rightarrow x^2+2x=\frac{7}{3} \Rightarrow 2hx=2x \Rightarrow h=1 \Rightarrow h^2=1$

Se suma 1 a ambos lados de la ecuación: $x^2+2x+1=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3} \Rightarrow \left(x+1\right)^2=\frac{10}{3} \Rightarrow x+1=\pm\frac{10}{3} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{10}{3}}-1; x_2=-\sqrt{\frac{10}{3}}-1$

5.- Resolver por complementación de cuadrados: $-2x^2+3x+5=0$

Sugerencias para el profesor: Dividir primero por (-2):

$$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0 \Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x=\frac{5}{2} \Rightarrow 2hx=-\frac{3}{2}x \Rightarrow h=-\frac{3}{4} \Rightarrow h^2=\frac{9}{16}$$

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{5}{2}+\frac{9}{16}=\frac{49}{16} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{49}{16} \Rightarrow x-\frac{3}{4}=\pm\frac{7}{4}$$

$$R \Rightarrow x_1=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}; x_2=-1$$

6.- Resolver por complementación de cuadrados: $3x^2+5x-2=0$

Sugerencias para el profesor: Se divide primero toda la ecuación por 3:

$$x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x=\frac{2}{3} \Rightarrow 2hx=\frac{5}{3}x \Rightarrow h=\frac{5}{6} \Rightarrow h^2=\frac{25}{36}$$

Añadir ahora $\frac{25}{36}$ a ambos lados de la ecuación:

$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=\frac{2}{3}+\frac{25}{36}=\frac{49}{36}\Rightarrow\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{49}{36}\Rightarrow x+\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6}\Rightarrow$$

$$R\Rightarrow x_1=\frac{1}{3};x_2=-2$$

7.- Resolver por complementación de cuadrados: $x^2+2x-1=0$

Sugerencias para el profesor:

$$x^2+2x=1\Rightarrow h=1;h^2=1\Rightarrow x^2+2x+1=1+1=2\Rightarrow\left(x+1\right)^2=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}-1;x_2=-\sqrt{2}-1$$

8.- Resolver por complementación de cuadrados: $x^2-8x+20=0$

Sugerencias para el profesor:

$$x^2-8x=-20\Rightarrow 2hx=-8x\Rightarrow h=-4\Rightarrow h^2=16$$

$$x^2-8x+16=-20+16=-4\Rightarrow\left(x-4\right)=\pm\sqrt{-4}=\pm i\sqrt{4}=\pm 2i$$

$$R\Rightarrow x_1=4+2i;x_2=4-2i$$

9.- Resolver por complementación de cuadrados: $3t^2-2t+1=0$

Su***gerencias para el profesor***: Dividir primero por 3:

$$t^2-\frac{2}{3}t=-\frac{1}{3}\Rightarrow 2ht=-\frac{2}{3}t\Rightarrow h=-\frac{1}{3}\Rightarrow h^2=\frac{1}{9}$$

$$R\Rightarrow t_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i;t_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #10.

Tema: Resolución de cuadráticas utilizando la resolvente.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Resolvente de la ecuación $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

PREGUNTAS:

1.- Resolver $4x^2-7=0$

$R \Rightarrow x_1=\dfrac{\sqrt{7}}{2}; x_2=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

2.- Resolver $x^2+12x-85=0$

$R \Rightarrow x_1=-17; x_2=5$

3.- Resolver $x^2-5x+6=0$

$R \Rightarrow x_1=3; x_2=2$

4.- Resolver $x^2+5x+6=0$

$R \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = -3$

5.- Resolver $6x^2 - 7x - 20 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = -\frac{4}{3}$

6.- Resolver $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2}$

7.- Resolver $x^2 - 7x + 10 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = \frac{2}{3}$

8.- Resolver $6x^2 - x - 35 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = -\frac{7}{3}$

9.- Resolver $x^2 + 2x - 5 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{6}; x_2 = -1 - \sqrt{6}$

10.- Resolver $x^2 - 7x - 7 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{7 + \sqrt{77}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{77}}{2}$

11.- Resolver $3x^2 + 5x - 7 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{6}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{6}$

12.- Resolver $3x^2 + 4x - 5 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}; x_2 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$

13.- Resolver $t^2 - 8t + 3 = 0$

$R \Rightarrow t_1 = 4 + \sqrt{13}; t_2 = 4 - \sqrt{13}$

14.- Resolver $x^2 = 4x - 1$

$$R \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

15.- Resolver $x^2 - x + 1 = 0$

$$R \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

16.- Resolver la ecuación $z(z+1) = 1$

$$R \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}; z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

17.- Resolver $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 2$

$$R \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

18.- Resolver la ecuación :

$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

$$R \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{8x+1} \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+3} + \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{8x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3x + 4 + 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 8x + 1 \Rightarrow 3x + 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 8x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 5x - 3 \Rightarrow \left(2\sqrt{(x+1)(2x+3)}\right)^2 = (5x-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 50x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{17}$$

La segunda raiz = $-\frac{1}{17}$ no es una solución válida.

19.- Encontrar los valores de ***y*** en la ecuación: $6x^2 + 9y^2 - x - 6y = 0$

Sugerencia: Organizar la ecuación así: $9y^2 - 6y + (6x^2 + x) = 0$

$R \Rightarrow y_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-6x^2-x}}{3}; y_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-6x^2-x}}{3}$

20.- Encontrar el valor de y en la ecuación: $2x^2 + y^2 + 2xy - 2x = 0$

Sugerencia: $y^2 + (2x)y + (2x^2 - 2x) = 0$

$R \Rightarrow y_1 = -x + \sqrt{2x - x^2}; y_2 = -x - \sqrt{2x - x^2}$

21.- Resolver $3x^2 = x + 6$

Sugerencia; $3x^2 - x - 6 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{73}}{6}; x_2 = \dfrac{1-\sqrt{73}}{6}$

22.- Resolver $5x^2 - 6x + 7 = 0$

$R \Rightarrow x_1 = \dfrac{3+\sqrt{26}}{5}; x_2 = \dfrac{3-\sqrt{26}}{5}$

23.- Resolver la ecuación: $4 \cdot \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}} - \sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}} = \sqrt{2}$

Sugerencia: Hacer $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}}$; entonces la ecuación se transforma en:

$$4y + \frac{1}{y} = \sqrt{2} \Rightarrow 4y^2 - \left(\sqrt{2}\right)y - 1 = 0$$

De donde : $y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; y_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$R \Rightarrow$ Tomando ahora el valor de $y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}} \Rightarrow x_1 = 1$

Nota: Esta ecuación tiene una sola raíz por que y_2 ***es un valor negativo y no puede ser igual a una raíz cuadrada positiva.***

24.- Resolver $3x^2+5=0$

$R \Rightarrow x_1=\frac{i\sqrt{15}}{3}; x_2=-\frac{i\sqrt{15}}{3}$

25.- Resolver $2x^2-5x+8=0$

$R \Rightarrow x_1=\frac{5+i\sqrt{39}}{4}; x_2=\frac{5-i\sqrt{39}}{4}$

26.- Resolver $x^2+2x+4=0$

$R \Rightarrow x_1=-1+i\sqrt{3}; x_2=-1-i\sqrt{3}$

27.- Resolver $x^2+2x+5=0$

$R \Rightarrow x_1=-1+2i; x_2=-1-2i$

28.- Resolver $2x^2+5x+8=0$

$R \Rightarrow x_1=\frac{-5+i\sqrt{39}}{4}; x_2=\frac{-5-i\sqrt{39}}{4}$

29.- Resolver $x^2+2x+5=0$

$R \Rightarrow x_1=-1+2i; x_2=-1-2i$

30.- Resolver $4x^2=8x-7$

$R \Rightarrow x_1=1+\frac{i\sqrt{3}}{2}; 1-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

31.- Resolver $2x^2+8x+4=0$

$R \Rightarrow x_1=-2+\sqrt{2}; x_2=-2-\sqrt{2}$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #11.

Tema: Dadas las raíces encontrar la ecuación cuadrática.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Determinar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{2}{3}$

$$R \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right) \Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0$$

2.- Demostrar que la ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ es igual a $x^2 - x - 3 = 0$.

$$R \Rightarrow \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

3.- Encontrar la suma y el producto de las raíces de la ecuación: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Sugerencia; Aplicar la resolverte y encontrar entonces las raíces, las cuales son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{-2}}{3}; x_2 = \frac{1-\sqrt{-2}}{3}$$

$$R \Rightarrow Suma = \frac{2}{3}; producto = \frac{1}{3}$$

4.- Encontrar la suma y el producto de las raíces de la ecuación: $3x^2 + 13x - 10 = 0$

Sugerencia: Aplicando la resolverte se encuentran las raíces:;

$$x_1 = -5; x_2 = \frac{2}{2}$$

$$R \Rightarrow Suma = -\frac{13}{3}; \Pr oducto = -\frac{10}{3}$$

5.- Sin resolver la ecuación cuadrática, encontrar la suma y el producto de las raíces de la ecuación siguiente: $8x^2 = 2x + 3$

Sugerencia

La ecuación cuadrática general es: $ax^2 + bx + c = 0.$

$8x^2 - 2x - 3 = 0; \Rightarrow a = 8; b = -2; c = -3.$

Luego, se aplica: $$\left(x_1 + x_2\right) = -\frac{b}{a}; \left(x_1 \cdot x_2\right) = \frac{c}{a}$$

$$R \Rightarrow Suma = -\frac{b}{a} = \frac{1}{4}; producto = \frac{c}{a} = -\frac{3}{8}$$

6.- Encontrar la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a = 1; b = -3; c = 2$$

$$R \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2$$

(b) $2x^2 + 8x - 5 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a = 2; b = 8; c = -5$

$R \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

© $\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{8} = 0$
$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}; b = 5; c = -\sqrt{8}$

$R \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{\sqrt{2}}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2$

7.- Determinar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$

Sugerencia: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} : x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$R \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

8.- Encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = 3 + \sqrt{2}; x_2 = 3 - \sqrt{2}$

$$R \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

9.- Encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = 3 + 2\sqrt{3}; x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$

$$R \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$$

10.- Encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$

$$R \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

11.- Encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}; x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$

Sugerencia: $\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$

$$R \Rightarrow \alpha\beta x^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x + \alpha\beta = 0$$

12.- Encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces son los valores negativos de las raíces de la ecuación $x^2 + 7x - 2 = 0$.

Sugerencias:
$$-\frac{b}{a}=-7;\frac{c}{a}=-2$$
$$\left(-x_1\right)+\left(-x_2\right)=-\left(-7\right)=7;\left(-x_1\right)\cdot\left(-x_2\right)=-2$$

$$R\Rightarrow x^2-7x-2=0$$

13.- Encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$ si una de las raíces e el doble de la otra en la ecuación: $x^2-kx+18=0$.

Sugerencias: Para $x^2-kx+18=0\Rightarrow a=1;b=-k;c=18.$ Las raíces serán $x_1;x_2=2x_1$. La suma de las raíces es $x_1+2x_1=3x_1=-\frac{b}{a}=k;$ por lo tanto, $k=3x_1$. Por otro lado, el producto de las raíces es $x_1\cdot\left(2x_1\right)=2x_1^2=18\Rightarrow x_1=\pm3.$ Luego, $k=3\cdot\left(\pm3\right)=\pm9$

$$R\Rightarrow k=\pm9$$

14.- Encontrar el valor constante de k en la ecuación $2x^2-kx+3k=0,$ si la diferencia de las raíces es igual a $\frac{5}{2}$.

Sugerencias: $x^2-\frac{k}{2}x+\frac{3}{2}k=0.$

En la ecuación original $x_1+x_2=\frac{k}{2};x_1\cdot x_2=\frac{3}{2}k.$ Considerando la suma y la resta de las raíces:

$$x_1-x_2=\frac{5}{2}$$
$$x_1+x_2=\frac{k}{2}\Rightarrow x_1=\frac{5+k}{4}.$$

Resolviendo para x_2 al restar la e3cuación de suma de las raíces de la ecuación de diferencia de las raíces, tenemos:

$$x_1-x_2=\frac{5}{2}$$
$$x_1+x_2=\frac{k}{2}\Rightarrow -2x_2=\frac{5}{2}-\frac{k}{2}\Rightarrow x_2=\frac{k-5}{4}$$

Multiplicando ahora los dos valores de las raíces y simplificando:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{k+5}{4}\right) \cdot \left(\frac{k-5}{4}\right) = \frac{3}{2}k \Rightarrow k^2 - 24k - 25 = 0 \Rightarrow (k-25)(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 25; k_2 = -1$$

15.- Encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$ si en la ecuación $2x^2 - kx^2 + 4x + 5k = 0$ una raíz es la recíproca de la otra.

Sugerencias: Por la propiedad distributiva: $2x^2 - kx^2 + 4x + 5k = (2-k)x^2 + 4x + 5k = 0.$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por $(2-k)$: $x^2 + \frac{4}{2-k}x + \frac{5k}{2-k} = 0$

Como las raíces son recíprocas: $x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a} = \frac{5k}{2-k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$$R \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

16.- Encontrar las condiciones para que las raíces de la ecuación $ax^2 + px + q = 0$ sean: 1) Ambas positivas; 2) Opuestas en signo; pero, la mayor de las dos sea negativa:

Sugerencias: Partir de las siguientes igualdades:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

1) Si ambas raíces son positivas, su producto debe ser positivo y por lo tanto $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ deben tener el mismo signo. También, como $x_1 + x_2 > 0,$ la fracción $\frac{b}{a}$ debe ser negativa; por lo tanto, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ deben tener signos contrarios.
2) Si las raíces deben tener signos opuestos, $x_1 \cdot x_2 < 0$ y por lo tanto, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen signos opuestos. También, $x_1 + x_2$ tendrá el signo de la raíz mayor, y si se pide que la raíz mayor sea positiva la fracción $\frac{b}{a} > 0,$ por lo que b y a deberán necesariamente tener signos iguales.

$R \Rightarrow$ Las condiciones requeridas son que a y b tengan signos iguales y c y a tengan signos opuestos.

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #12.
Tema: Progresiones aritméticas
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

1.- Término general: $a_n = a_1 + (n-1)d$

2.- Suma de los primeros ***n*** términos: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

PREGUNTAS:

1.- Si el sexto término de una progresión aritmética es 8 y el término onceavo es -2, ¿cuál es el primer término? ¿ Cuál es la razón de crecimiento?

Sugerencias:

Sexto término: $a + (6-1)d = 8 \Rightarrow a + 5d = 8$

Onceavo término: $a + (11-1)d = -2 \Rightarrow a + 10d = -2$

Restando una ecuación de la otra: $5d = -10 \Rightarrow d = -2$. Sustituyendo este valor de d en la primera ecuación: $a = 18$

$R \Rightarrow a = 18; d = -2$

2.- Encontrar el término a_n en la secuencia de números : 1, 4, 7, 10,………..

$R \Rightarrow 1+(n-1)3$

3.- Encontrar el primer término de una progresión aritmética si el quinto término es 29 y la razón de crecimiento es $d = 3$.

$R \Rightarrow a = 17$

4.- Si el primer término de una serie aritmética es **-4** y el término doceavo es **32,** encontrar la diferencia común o razón de crecimiento.

$$R \Rightarrow d = \frac{36}{11}$$

5.- Encontrar el término doceavo de la siguiente secuencia aritmética: 2, 5, 8, …..

$R \Rightarrow a_{12} = 35$

6.- Dado que el primer término de una secuencia aritmética es **56** y el término décimo séptimo es **32**, encontrar el valor del décimo término y el del vigésimo quinto término.

$$R \Rightarrow a_1 = 56; d = -\frac{3}{2}; a_{10} = \frac{85}{2}; a_{25} = 20$$

7.- Si los términos $a_{54} = -61; a_4 = 64,$ encontrar a_{23}.

$$R \Rightarrow d = -\frac{5}{2}; a_1 = \frac{143}{2}; a_{23} = \frac{33}{2}$$

8.- Si el primer término de una progresión aritmética es igual a **7** y la diferencia común o razón de crecimiento es igual a **-2,** encontrar el término a_{15} y la suma de los primeros **15** términos.

$$R \Rightarrow a_{15} = -21; S = -105$$

9.- Encontrar la suma de los primeros 16 términos de la erie aritmética cuyo primer término es $\frac{1}{4}$ y su razón de crecimiento es $\frac{1}{2}$.

$$R \Rightarrow S_{16} = 64$$

10.- Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética: -9, -3, 3,……….

$$R \Rightarrow S_{20} = 960$$

11.- Encontrar la suma de la serie aritmética**: 5+9+13+……+401.**

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right] \Rightarrow 20.300,0$$

12.- Encontrar la suma de los primeros 100 números enteros positivos.

$$S_{100} = \frac{100}{2}\left(1+100\right) = 5.050.$$

13.- Encontrar la suma de los primeros 25 enteros pares

Sugerencias: $a_1 = 2; n = 25; d = 2; \Rightarrow a_{25} = 2 + \left(25-1\right)2 = 50$

$$S_{25} = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_{25}\right) = \frac{25}{2}\left(2+50\right) = 650$$

14.- ¿Cuántos términos de la secuencia aritmética -9, -6, -3, ….deben ser tomados para que la suma sea 66?.

Sugerencias: $a_1 = -9; d = 3; S_n = 66; S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + \left(n-1\right)d\right]$

$$R \Rightarrow \frac{n}{2}\left[-18 + \left(n-1\right)3\right] = 66 \Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow \left(n-11\right)\left(n+4\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 11; n - 4.$$

El valor negativo de ***n*** se rechaza. Entonces la solución es ***n = 11.***

15.- Encontrar la suma de los primeros ***p*** términos de la secuencia aritmética cuyo término $a_n = 3n - 1$.

Sugerencias: $a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2; S_p = \frac{p}{2}[2 + 3p - 1] = \frac{p}{2}(3p + 1)$

$$R \Rightarrow S_p = \frac{p}{2}(3p + 1)$$

16.- ¿ Cuántos términos de la secuencia 26, 21, 16,……… deben ser sumados para que esa sumatoria sea igual a 74?

Sugerencia: Usar $S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-2)d\right] =$

$$R \Rightarrow 74 = \frac{n}{2}\left[2(26) + (n-1)(-5)\right] \Rightarrow 5n^2 - 57n - 148 = (n-4)(5n-37) = 0 \Rightarrow$$
$$n = 4$$

Nota: Se rechaza el valor $n = \frac{37}{5}$ porque no es un número entero.

17.- Insertar 4 medios aritméticos entre 1 y 36.

Sugerencias: Los términos entre dos términos dados de una progresión aritmética son llamados medios entre los términos dados. Se deberá usar la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Si $a_1 = 1; a_n = 36; \Rightarrow n = 6; d = 7$.

$$R \Rightarrow a_2 = 8, a_3 = 15, a_4 = 22, a_5 = 29.$$

18.- Insertar 5 medios aritméticos entre 13 y 31.

Sugerencias: $a_1 = 13; a_n = 31; \Rightarrow n = 7; d = 3$

$$R \Rightarrow a_2 = 13; a_3 = 19; a_4 = 22; a_5 = 25; a_6 = 28$$

19.- Insertar 20 medios aritméticos entre **4** y **67**.

Sugerencias: $a_n = a_1 + (n-1)d; a_1 = 4; a_{22} = 67 \Rightarrow n = 22; d = 3$

$$R \Rightarrow 7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46,49,52,55,58,61,64.$$

20.- Determinar los primeros cuatro términos y el doceavo término de la progresión aritmética generada por la función: $F(x) = 2x + 3$.

Sugerencias: Encontrar los términos de la progresión dándole valores a x=1,2,3,4,12..

$$R \Rightarrow a_1 = 5; a_2 = 7; a_3 = 9; a_4 = 11; a_{12} = 27.$$

21.- Si una progresión aritmética es generada por la función lineal $F(x) = -3x + 14$; ¿cuáles son el primer término, el término 15 y la razón de crecimiento?.

$$R \Rightarrow a_1 = 11; a_{15} = -31; d = -3.$$

22.- La suma de tres números de una progresión aritmética es igual a **27** y la suma de los cuadrados de esos mismos números es igual a **293**. Encontrar los números.

Sugerencias: $(a-d) + a + (a+d) = 27; \Rightarrow a = 9.$ Entonces, los tres números son: $(9-d), 9, (9+d)$. Luego: $(9-d)^2 + 9^2 + (9+d)^2 = 293 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5$

$$R \Rightarrow 4; 9; 14.$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #13.
Tema: Progresiones geométricas.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

1.- Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

2.- Suma de los primeros ***n*** términos: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot \left(1 - r^n\right)}{\left(1 - r\right)}$

2.- Suma de los primeros ***n*** términos: $S = \dfrac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \dfrac{n}{2}\left[2a_1 + \left(n-1\right)d\right]$

PREGUNTAS:

1.- Si el primer término de una progresión geométrica es **9** y la razón común es $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$, encontrar los primeros **5** términos.

Sugerencias: Aplicarla para cada caso fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$R \Rightarrow a_1 = 9; a_2 = -6; a_3 = 4; a_4 = -\frac{8}{3}; a_5 = \frac{16}{9}$$

2.- Encontrar los siguientes tres términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4,………

Sugerencia: De la ecuación del término general despejar la razón geométrica de crecimiento **(r)** y luego aplicar la misma fórmula para calcular cada término requerido.

$$R \Rightarrow r = 2; a_4 = 8; a_5 = 16; a_6 = 32; a_7 = 64$$

3.- Encontrar los siguientes tres términos de la progresión geométrica: 27, -9, 3, -1,

$$R \Rightarrow r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{3}; a_5 = \frac{1}{3}; a_6 = -\frac{1}{9}; a_7 = \frac{1}{27}$$

4.- Encontrar el décimo término de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,……….

$$R \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = 2; a_1 = 3; a_{10} = 3\left(2\right)^{10-1} = 1536.$$

5.- El séptimo término de una progresión geométrica es igual a **192** y la razón geométrica de crecimiento es $r = 2.$ Encontrar los primeros cuatro términos.

$$R \Rightarrow a_7 = a_1 \cdot \left(2\right)^{7-1} \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3; a_2 = 6; a_3 = 12; a_4 = 24$$

6.- Si el octavo término de una progresión geométrica es **16** y la razón geométrica de crecimiento es **-3** , ¿cuál es el término **12**?.

$$R \Rightarrow a_8 = 16 \Rightarrow a_{12} = a_8 \cdot \left(r\right)^{12-8} = 16 \cdot \left(-3\right)^4 = 1296.$$

7.- El primer término de una progresión geométrica es **27**, el término enésimo es $\frac{32}{9}$ y la suma de los $\boldsymbol{n}$ términos es $\frac{665}{9}$. Encontrar $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{r}$**.**

Sugerencias:

a.- $a_n = \frac{32}{9} = a_1 \cdot r^{n-1} = 27 \cdot r^{n-1} \Rightarrow r\left(\frac{32}{9}\right) = 27 \cdot r^n.$

b.- $S_n = \frac{665}{9} = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{27\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{27r^n - 27}{r-1} = \frac{\frac{32}{9}r - 27}{r-1}$

Ahora, se puede escribir:

$$9\left(r-1\right)\cdot\frac{665}{9} = 9\left(r-1\right)\cdot\left[\frac{\frac{32}{9}r-27}{r-1}\right]$$

$$\left(r-1\right)\cdot 665 = 9\cdot\left[\frac{32}{9}r-27\right] \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo este valor de r en la ecuación $\frac{32}{9} = 27\cdot\left(r\right)^{n-1}$ se tiene

$$\frac{32}{9} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{32}{9}\cdot\frac{1}{27} = \frac{1}{27}\cdot\left[27\cdot r^{n-1}\right] = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$n-1 = 5 \Rightarrow n = 6.$$

$$R \Rightarrow r = \frac{2}{3}; n = 6.$$

8.- Encontrar la suma de los primeros 10 términos de la progresión geométrica: 15, 30, 60, 120,………….

Sugerencias: Escribir la progresión de la siguiente manera:

$$15; 15\cdot\left(2\right); 15\cdot\left(2^2\right); 15\cdot\left(2^3\right); .... \Rightarrow r = 2$$

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{\left(1-r\right)} \Rightarrow S_{10} = \frac{15\left(1-2^{10}\right)}{1-2} = \frac{15\left(1-1024\right)}{-1} = 15345.$$

$$R \Rightarrow S_{10} = 15345.$$

9.- Encontrar la suma de los primeros cuatro términos de la serie geométrica: $2;-\frac{1}{3};\frac{1}{18};.....$

Sugerencias:

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=-\frac{1}{6}$$

$$S_n=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

$$R\Rightarrow S_4=\frac{2\left[\left(-\frac{1}{6}\right)^4-1\right]}{\left(-\frac{1}{6}\right)-1}=\frac{185}{108}$$

10.- Encontrar la suma de los primeros ocho términos de la siguiente progresión geométrica: $4;\left(-\frac{4}{3}\right);\left(\frac{4}{9}\right);\left(-\frac{4}{27}\right);........$

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=-\frac{1}{3}$$

Sugerencias:

$$S_n=\frac{a_1\cdot\left(r^n-1\right)}{r-1}\Rightarrow S_8=\frac{4\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^8-1\right]}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{6560}{2187}$$

$$R\Rightarrow S_8=\frac{6560}{2187}$$

11.- Encontrar la suma de los primeros **7** términos de la progresión geométrica: $\frac{2}{3};-1;\frac{3}{2};.............$

Sugerencias:

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=-\frac{3}{2}$$

$$S_n=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^7 - 1\right]}{-\frac{2}{3} - 1} = \frac{463}{98}$$

12.- Encontrar la suma de los primeros 6 términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{3}$ y cuyo segundo término es -1.

Sugerencias:

a) $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{1/3} = -3$

b) $S_n = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r - 1}$

$$R \Rightarrow S_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left[(-3)^6 - 1\right]}{(-3) - 1} = -\frac{182}{3}$$

13.- Encontrar el séptimo término de una serie geométrica cuyo tercer término es $\frac{1}{8}$ y su razón es 2. Encontrar también la suma de los primeros siete términos.

Sugerencias:

a).- $a_n = a_1 \cdot (r)^{n-1} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{8} = a_1 \cdot (2)^{3-1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{32} \Rightarrow a_7 = \left(\frac{1}{32}\right) \cdot (2)^6 = 2$

$S_7 = \frac{1}{32} \cdot \frac{\left(2^7 - 1\right)}{2 - 1} = \frac{127}{32}$

b) $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$R \Rightarrow a_7 = 2 \Rightarrow S_7 = \frac{127}{32}$$

14.- Determinar el quinto término y la suma de los primeros **10** términos de la progresión geométrica siguiente: $2,\left(-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{9}{8}\right);........$

Sugerencias:

a) $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{-3/2}{2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow a_5=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{128}$

b) $S_n=a_1\cdot\frac{\left(1-r^n\right)}{\left(1-r\right)}\Rightarrow S_{10}=2\cdot\frac{\left[1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{10}\right]}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}\Rightarrow S_{10}=\frac{989527}{917504}$

$$R\Rightarrow a_5=\frac{81}{128};S_{10}=\frac{989527}{917504}$$

15.- El cuarto término de una progresión geométrica es $\frac{1}{2}$ y el sexto término es $\frac{1}{8}$. Encontrar el primer término y la razón de crecimiento.

Sugerencias:

a) $a_4=\frac{1}{2}=a_1\cdot r^3;a_6=\frac{1}{8}=a_1\cdot r^5\Rightarrow\frac{a_6}{a_4}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}=r^2\Rightarrow r=\pm\frac{1}{2}$

b) Hay dos posible soluciones. Si se toma la razón positiva, $r=\frac{1}{2}$, entonces:

$a_1=\frac{a_4}{r^3}=\frac{1/2}{\left(1/2\right)^3}=4$

Si se toma la razón negativa, $r=-\frac{1}{2}$, entonces:

$$a_1 = \frac{a_4}{r^3} = \frac{(1/2)}{(-1/2)^3} = -4$$

$$R \Rightarrow a_4^{\prime} = 4; a_4^{\prime\prime} = -4$$

16.- Insertar cuatro medios geométricos entre **160** y **5.**

Sugerencias:

a)

$$a_1 = 160 = a_1; a_6 = 5 = a_1 \cdot r^5; \frac{5}{160} = r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$R \Rightarrow 160; 80; 40; 20; 10; 5$$

17.- Encontrar tres medios geométricos entre 16 y 81.

Sugerencias: Son cinco términos en total, incluyendo los dos dados en los extremos.

a)

$$a_1 = 16; a_5 = 81; 81 = 16 \cdot (r)^4 \Rightarrow r = \pm\frac{3}{2}$$

$$R \Rightarrow \quad Si \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right); 16\left(\frac{3}{2}\right)^2; 16\left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow 24; 36; 54.$$

$$Si \Rightarrow r = -\frac{3}{2} \Rightarrow 16\left(-\frac{3}{2}\right); 16\left(-\frac{3}{2}\right)^2; 16\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow -24; 36; -54.$$

18.- Encontrar los primeros cuatro términos de la progresión geométrica generada por la función exponencial $f(x) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^x$ si el dominio de la función es el conjunto de números enteros positivos (0, 1, 2, 3, …….).

Sugerencias:

$$f(0) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 12$$

$$f(1) = 12\left(\frac{3}{2}\right) = 18$$

$$f(2) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 27$$

$$f(3) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{81}{2}$$

$$R \Rightarrow a_1 = 12; a_2 = 18; a_3 = 27; a_4 = \frac{81}{2}$$

19.- Encontrar tres números consecutivos de una progresión geométrica cuya suma es **19** y cuyo producto es **216.**

Sugerencias:

Los tres números consecutivos se pueden expresar como: $\frac{a}{r}; a; ar. Luego: \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$.

Por otro lado, consideramos la suma: $\frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow (3r-2)(2r-3) = 0 \Rightarrow$

$$r_1 = \frac{3}{2}; r_2 = \frac{2}{3}$$

$$R \Rightarrow 4; 6; 9$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #14.
Tema: Probabilidades.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Para eventos independientes:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Para eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A, o, B) = P(A) + P(B)$$

PREGUNTAS:

1.- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un **6** en un tiro de un solo dado?.

$$R \Rightarrow \frac{1}{6}$$

2.- Si se saca una carta de un paquete completo que ha sido barajado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un as de diamante en el primer intento?.

$$R \Rightarrow \frac{1}{52}$$

3.- Una caja contiene 7 metras rojas, 5 metras blancas y 4 metras negras. ¿ Cuál es la probabilidad de sacar una metra roja, al azar, en el primer intento?.¿ Y una metra negra?.

Sugerencias: $7+5+4=16$.

Para sacar una bola roja en un intento, la probabilidad es: $\frac{7}{16}$

Para sacar una bola negra en el primer intento, la probabilidad es: $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$$R \Rightarrow P(R)=\frac{7}{16};P(N)=\frac{1}{4}$$

4.- Calcular la probabilidad de los Dodgers ganar la Serie Mundial si los Yankees han ganado los primeros 3 juegos.

Sugerencias: La probabilidad de cada equipo ganar cualquier juego es $\frac{1}{2}$. La serie mundial consta de 7 juegos y gana quien gana 4 de ellos. La única manera de que los Dodfgers puedan ganar la Serie mundial es que ganen los próximos cuatro juegos. Los juegos se consideran eventos independientes. Entonces:

$$P(DDDD)=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$R \Rightarrow P(DDDD)=\frac{1}{16}$$

5.- En el lanzamiento de un solo dado, encontrar la probabilidad de lograr un 2 o un 5.

Sugerencias: $P(2)=\frac{1}{6};P(5)=\frac{1}{6}$. La probabilidad de que cualquiera de los dos eventos mutuamente excluyente ocurran, es la suma de las dos probabilidades individuales; o sea: $P(2)+P(5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

$$R \Rightarrow P(2)+P(5)=\frac{1}{3}$$

6.- Si una carta es sacada de un paquete nuevo, ¿cuál es la probabilidad de que sea un 10 o un 4?

Sugerencias:

$$P(4)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$
$$P(10)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

Entonces: $P(4,o,10)=P(4)+P(10)=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{2}{13}$

$$R\Rightarrow P(4,o,10)=\frac{2}{13}$$

7.- Si se tiene una bolsa que contiene dos bolas rojas, tres bolas blancas y seis bolas azules, ¿ cuál es la probabilidad de sacar una roja o una blanca en un solo intento?.

Sugerencias:

$$2+3+6=11; P(R)=\frac{2}{11}; P(B)=\frac{3}{11}$$
$$P(roja,o,blanca)=P(R)+P(B)=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{5}{11}$$
$$R\Rightarrow P(R,o;B)=\frac{5}{11}$$

8.- Una bolsa contiene 4 bolas blancas, 6 bolas negras, 3 bolas rojas y 8 bolas verdes. Si una boila es sacada de la bolsa, encontrar la probabilidad de que sea bien blanca o verde.

Sugerencias: $4+6+3+8=21.$

$$P(B)=\frac{4}{21}; P(V)=\frac{8}{21}\Rightarrow P(B)+P(V)=\frac{4}{21}+\frac{8}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$R\Rightarrow P(B)+P(V)=\frac{4}{7}$$

9.- Una caja contiene 6 bolas blancas, 4 bolas negras y 2 bolas rojas. Usando solo un intento de sacar una bola, encontrar la probabilidad de: (a) Sacar una roja; (b) sacar una negra; (c) sacar bien sea una negra o una blanca.

Sugerencias: $6+4+2=12$

$$P(R)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};P(N)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$P(N)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

$$R\Rightarrow (a)P(R)=\frac{1}{6};(b)P(N)=\frac{1}{3};(c)P(N,o,B)=\frac{5}{6}$$

10.- Determinar la probabilidad de que se den un 6 o un 7 al lanzar dos dados y sumar los dos resultados.

Sugerencias:

Llamar evento **A** cuando se obtiene un **6**. Llamar evento **B** cuando se obtiene un **7**. Entonces podemos escribir que:

$$P(A,o,B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

El evento **A** se produce cuando se presentan los siguientes resultados:

$$\{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}=5(resultados)$$

El evento **B** se produce cuando se presentan los siguientes resultados:

$$\{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}=6(resultados)$$

$$P(A)=\frac{5}{36};P(B)=\frac{6}{36}$$

$$P(A)+P(B)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{11}{36}$$

$$R\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{11}{36}$$

11.- Una moneda es lanzada tres veces consecutivas. ¿ Cuál es la probabilidad de que se presentarán dos caras y un sello?

Sugerencias:

Los resultados posibles son:
(CCC)
(CCS)
(CSS)
(CSC)
(SCC)
(SSC)
(SSS)

Son entonces 8 resultados posibles. Si todos estos resultados se consideran igualmente posibles, se le puede asignar la probabilidad de ocurrencia a cada uno de $\frac{1}{8}$. Si ahora buscamos por los resultados que tengan dos caras y un sello, encontramos que existen 3, entonces la probabilidad buscada será: $\frac{3}{8}$.

$$R \Rightarrow P(CCS) = \frac{3}{8}$$

12.- Si se lanzan dos dados al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sean 6 en cada dado?
ncias
Sugerencias: Cada resultado en cada dado es independiente, por lo tanto la probabilidad de que salgan dos 6 simultáneamente será igual al producto de las probabilidades de que salga 6 en cada dado.

$$R \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

13.- ¿ Cuál es la probabilidad de sacar dos 1 al lanzar un mismo dado dos veces consecutivas?.

Sugerencias: Eventos independientes.

$$R \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

14.- Si un par de dados se lanzan dos veces consecutivas, encontrar la probabilidad de que la suma de los resultados sea 5 en cada lanzamiento.

Sugerencias:

En cada lanzamiento caben las siguientes posibilidades: $\{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2)\} = 4(resultados)$. Entonces la probabilidad de que los resultados sumen 5 en cada lanzamiento es: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
La probabilidad de que salga 5 en cada uno de los dos lanzamientos consecutivos es entonces: $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$.

$$R \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

15.- Una bolsa contiene **4** metras negras y **5** metras azules. Una metra es sacada y luego se vuelve a reubicar en la bolsa; después de lo cual otra metra es sacada. ¿ Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda sea azul?.

Sugerencia: $4 + 5 = 9(metras)$

Llamar:

C = Evento de que la primera metra sea negra.

D = Evento de que la segunda metra sea azul.

$$P(C, y, D) = P(CD) = P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

$$R \Rightarrow P(C, y, D) = \frac{20}{81}$$

16.- Una caja contiene **4** metras negras, **3** metras rojas y **2** metras blancas. ¿ Cuál es la probabilidad que una metra negra, luego una metra roja y después una metra blanca sean sacadas , sin reemplazar ninguna?.

Sugerencias: $4+3+2=9(metras)$

$$P(N)=\frac{4}{9};P(R)=\frac{3}{8};P(B)=\frac{2}{7}$$

Por ser eventos independientes:

$$P(N\cap R\cap B)=P(N)\cdot P(R)\cdot P(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$$

$$P(N\cap R\cap B)=\frac{1}{21}$$

17.- Se trata de una caja que contiene **5** bolas blancas, **4** bolas negras, y **7** bolas rojas. Si dos bolas son sacadas de la caja, una después de la otra, y ninguna es reemplazada, encontrar la probabilidad de:

(a) Ambas bolas sean blancas.
(b) La primera bola sea blanca y la segunda roja.
(c) Si una tercera bola es sacada, encontrar la probabilidad de que sean sacadas en el orden blanco, negro y rojo.

Sugerencias: $5+4+7=16(bolas)$. Todos los eventos envueltos en este problema son ***dependientes***.

$$R\Rightarrow$$

(a) Dos bolas blancas = $\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{12}$
(b) La primera blanca y la segunda roja = $\frac{5}{16}\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{48}$
(c) Blanca, negra, roja = $\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{7}{14}=\frac{1}{24}$

18.- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que **4** cuando se lanza un dado común?.

$$R \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

19.- Una bolsa contiene **10** metras rojas, **15** metras verdes, y **5** metras amarillas. Si se saca una sola metra de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad (a) de que la metra sea roja, y (b) de que la metra no sea roja.

Sugerencias:

Si la metra es roja: $P(R) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Si la metra no es roja: $P(NR) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$R \Rightarrow P(R) = \frac{1}{3}; P(NR) = \frac{2}{3}$$

20.- Un aparato contador de autos colocado en la bifurcación de una autopista revela que de **5000** autos que pasan por la bifurcación en una semana, **3000** cruzan a la derecha. Encontrar la probabilidad de que los autos tomen (a) a la derecha, (b) a la izquierda.

$$R \Rightarrow (a) = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5}; (b) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

21.- Partiendo de 20 boletos numerados del 1 al 20, se saca uno al azxar. Encontrar la probabilidad de que su número sea un múltiplo de 3 o de 7.

Sugerencias: Tanto que sea múltiplo de 3 como que sea múltiplo de **7** son eventos mutuamente excluyentes (***no pueden ocurrir simultáneamente***), la probabilidad de que ocurran será la suma de sus probabilidades individuales, o sea: $P(3) + P(7)$.

$$R \Rightarrow P(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(7) = \{7; 14\} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(3) + P(7) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

22.- ¿ Cuál es la probabilidad de que sumen 11 los dos números que aparecen en un lanzamiento de dos dados?

Sugerencias: La única posibilidad de que sumen **11** es que se presenten los siguientes resultados: $\{(5,6);(6,5)\}$. Todas las posibilidades son: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$$R \Rightarrow P\left(\sum\ 11\right)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

23.- ¿ Cuál es la probabilidad de hacer un **7** en un lanzamiento de un par de dados?

Sugerencia: Caben todas estas posibilidades: $\{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}=6(\textit{posibilidades})$

$$R \Rightarrow P\left(\sum 7\right)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

24.- En un lanzamiento simultáneo de dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor que **5**?.

Sugerencias: Si consideramos los eventos de que las sumas sean 2, 3 o 4, éstos eventos (tod*os menores que 5*) son entre si mutuamente excluyentes , no pueden aparecer al mismo tiempo; entonces, se puede escribir que: $P\left\{\left(\sum 2\right)\cup\left(\sum 3\right)\cup\left(\sum 4\right)\right\}=P\left(\sum 2\right)+P\left(\sum 3\right)+P\left(\sum 4\right)=$

Luego: $P\left(\sum 2\right)=\frac{1}{36};P\left(\sum 3\right)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};P\left(\sum 4\right)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$$R \Rightarrow P\left(\sum < 5\right)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

25.- Encontrar la probabilidad de que al hacer un lanzamiento de dos dados al mismo tiempo la suma de los resultados sean mayores que **7** o que el mismo número aparezca en cada cara?.

Sugerencias: Si la suma es mayor que **7**, existen las siguientes posibilidades:

$$G=\begin{bmatrix}(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);(5,3);(5,4);(5,5);\\(5,6);(4,4);(4,5);(4,6);(3,5);(3,6);(2,6)\end{bmatrix}=15(resultados)$$

Si las caras son iguales, las posibilidades son:

$$D=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}=6(resultados)$$

Ahora, de los resultados D, $(4,4);(5,5);(6,6)=3(resultados)>7$., por lo que coinciden en las dos clasificaciones, lo que nos obligaría a restar su probabilidad de ocurrencia.

$$R\Rightarrow P(G\cup D)=P(G)+P(D)=\frac{15}{36}+\frac{6}{36}-\frac{3}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

26.- Encontrar la probabilidad de lograr 4 o menos en un solo lanzamiento de un par de dados

Sugerencias: Los resultados que suman 4 o menos son:

$$\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(3,1)\}=6(resultados)$$

$$R\Rightarrow P\left(\sum\leq 4\right)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #15.

Tema: Logaritmos y exponenciales.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

$$\lg_b(P \cdot Q) = \lg_b(P) + \lg_b(Q)$$

$$\lg_b(P/Q) = \lg_b P - \lg_b Q$$

$$\lg_b(P^n) = n \lg_b P$$

$$\lg_b(\sqrt[n]{P}) = \frac{1}{n} \lg_b(P)$$

PREGUNTAS:

1.- Escribir $5^3 = 125$ en forma logarítmica.

$$R \Rightarrow \lg_5(125) = \lg_5(5^3) = 3$$

2.- Encontrar $\lg_{10}(100) =$

$$R \Rightarrow \lg_{10}(100) = \lg_{10}(10 \cdot 10) = \lg_{10}(10^2) = 2$$

3.- Encontrar el logaritmo base 10 de de 3^2.

Sugerencias: Recordar que $\lg_b\left(x^y\right) = y \cdot \lg_b x$

Entonces: $\lg_{10}\left(3^2\right) = 2\lg_{10}\left(3\right) = 2\left(0,4771\right) = 0,9542$

$$R \Rightarrow \lg_{10}\left(3^2\right) = 0,9542.$$

4.- Escribir $\frac{1}{2} = \lg_9\left(3\right)$ en forma exponencial.

$$R \Rightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

5.- Si $\lg_3 N = 2$ encontrar N.

$$R \Rightarrow N = 3^2 = 9$$

6.- Encontrar, sin calculadora, el valor de ***x*** si $\lg_4\left(64\right) = x.$

$$R \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 3$$

7.- Encontrar, sin calculadora, $\lg_3\left(729\right) =$

$$R \Rightarrow 729 = 3^6 \Rightarrow \lg_3\left(729\right) = 6$$

8.- Encontrar el valor de N si $\lg_8\left(N\right) = \frac{2}{3}$.

$$R \Rightarrow N = 8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$$

9.- Expresar el logaritmo de 7 en base 3 en términos de logaritmos comunes (base 10).

Sugerencias: $R \Rightarrow \lg_3(7) = x \Rightarrow 3^x = 7 \Rightarrow \lg\left(3^x\right) = \lg(7) \Rightarrow x\lg 3 = \lg 7 \Rightarrow$
$x = \lg_3 7 = \dfrac{\lg 7}{\lg 3}$

$$R \Rightarrow x = \lg_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3}$$

10.- ¿ Cuál es el valor de ***b*** en la relación $\lg_b\left(\dfrac{1}{25}\right) = -2.?$

Sugerencias:

$$\lg_b x = y \Rightarrow b^y = x \Rightarrow b^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 5$$

$$R \Rightarrow b = \pm 5$$

11.- Expresar el logaritmo de $\dfrac{\sqrt{a^3}}{c^5 b^2}$ en términos de $\lg a; \lg b; \lg c.$

Sugerencias:

$$\lg_b(P \cdot Q) = \lg_b(P) + \lg_b(Q)$$

$$\lg_b(P/Q) = \lg_b P - \lg_b Q$$

$$\lg_b\left(P^n\right) = n\lg_b P$$

$$\lg_b\left(\sqrt[n]{P}\right) = \frac{1}{n}\lg_b(P)$$

Por lo tanto:

$$\lg\left(\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}\right)=\lg\left(a^{\frac{3}{2}}\right)-\lg\left(c^5b^2\right)=\frac{3}{2}\lg(a)-\left(\lg c^5+\lg b^2\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lg a-5\lg c-2\lg b=$$

$$R\Rightarrow\frac{3}{2}\lg a-5\lg c-2\lg b$$

12.- Si $\lg_{10}(3)=0,4771$ y $\lg_{10}(4)=0,6021,$ encontrar $\lg_{10}(12).$

$$R\Rightarrow\lg_{10}(12)=\lg_{10}(3\cdot4)=\lg_{10}(3)+\lg_{10}(4)=0,7771+0,6021=1,0792$$

13.- Dado $\lg_{10}(2)=0,3010,$ encontrar $\lg_{10}(32).$

$$R\Rightarrow\lg_{10}(32)=\lg_{10}\left(2^5\right)=5\cdot\lg_{10}(2)=5\cdot0,3010=1,5050.$$

14.- Si $\lg_b(2)=0,69$ y $\lg_b(3)=1,10,$ encontrar $\lg_b(6)$ y $\lg_b(8).$

$$R\Rightarrow\lg_b(6)=\lg_b(2\cdot3)=\lg_b(2)+\lg_b(3)=0,69+1,10=1,79.$$

$$\lg_b(8)=\lg_b\left(2^3\right)=3\cdot\lg_b(2)=3\cdot0,69=2,07.$$

15.- Dado que $\lg_{10}(2)=0,3010$ y $\lg_{10}(3)=0,4771,$ encontrar $\lg_{10}\left(\sqrt{6}\right).$

$$R\Rightarrow\lg_{10}\left(\sqrt{6}\right)=\lg_{10}(6)^{\frac{1}{2}}=\lg_{10}(2\cdot3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\lg_{10}2+\lg_{10}3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(0,3010+0,4771\right)=0,3890$$

16.- Encontrar el valor de $a^{\lg_a(X)}=$
Solución:

$$a^y=X\Rightarrow\lg_a X=y\Rightarrow a^{\lg_a X}=a^y=X$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #16.

Tema: Funciones y ecuaciones logarítmicas.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

$$\lg_b(P \cdot Q) = \lg_b(P) + \lg_b(Q)$$

$$\lg_b(P/Q) = \lg_b P - \lg_b Q$$

$$\lg_b(P^n) = n \lg_b P$$

$$\lg_b\left(\sqrt[n]{P}\right) = \frac{1}{n}\lg_b(P)$$

PREGUNTAS:

1.- El gráfico de una función exponencial f contiene el punto (2,9), ¿ cuál es la base de la función f?.

Sugerencias: La ecuación exponencial podemos expresarla como: $y = f(x) = b^2$

$$f(x) = b^x \Rightarrow 9 = f(2) = b^2 \Rightarrow b = 3$$

$$R \Rightarrow b = 3.$$

2.- Si f es una función logarítmica con base 4, encontrar $f(4);\, f\left(\frac{1}{4}\right);\, f(8).$

Sugerencias: Partir de la definición de ecuación logarítmica:

$$\lg_x(a) = n \Rightarrow a = x^n.$$

$$y = f(x) = \lg_4(x)$$

Entonces, para

$$f(4) \Rightarrow \lg_4(4) = 1 \Rightarrow n = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \lg_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$f(8) \Rightarrow \lg_4(8) = \frac{3}{2}$$

$$R \Rightarrow (1);(-1);\left(\frac{3}{2}\right).$$

3.- Resolver la ecuación $\lg_3\left(x^2 - 8x\right) = 2$

Sugerencias:

$$\lg_3\left(x^2 - 8x\right) = 2 \Rightarrow x^2 - 8x = 3^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-9)(x+1) = 0$$

$$R \Rightarrow x_1 = 9; x_2 = -1.$$

4.- Resolver la ecuación: $2^x = 7.$

Sugerencias:

$$\lg\left(2^x\right) = \lg(7) \Rightarrow x\lg(2) = \lg(7) \Rightarrow x = \frac{\lg(7)}{\lg(2)} = \frac{0,8451}{0,3010} = 2,808$$

$$R \Rightarrow x = 2,808.$$

5.- Resolver la ecuación $7^{(2x-1)} - 5^{(3x)} = 0.$

Sugerencias:

$$7^{(2x-1)} - 5^{3x} = 0 \Rightarrow 7^{(2x-1)} = 5^{3x} \Rightarrow (2x-1)\lg(7) = 3x\lg(5) \Rightarrow$$

$$(2x-1)(0,8451) = 3x(0,6990) \Rightarrow\Rightarrow 1,692x - 0,8451 = 2,097x \Rightarrow$$

$$x = -2,077.$$

$$R \Rightarrow x = -2,077$$

6.- Resolver la ecuación $2^{3x} = 4^{(x+1)}$

Sugerencias:

$$3x \cdot \lg(2) = (x+1) \cdot \lg(4) \Rightarrow 3x \cdot \lg(2) = (x+1) \cdot \lg(2^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \cdot \lg(2) = 2(x+1)\lg(2) \Rightarrow 3x = 2x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$R \Rightarrow x = 2$$

7.- Resolver la ecuación $5^{2x} = 7^{(x+1)}$.

Sugerencias:

$$2x \cdot \lg(5) = (x+1) \cdot \lg(7) \Rightarrow x\lg(7) + \lg(7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \lg(5^2) = x \cdot \lg(7) + \lg(7)$$

$$R \Rightarrow x = \frac{\lg(7)}{\lg(25) - \lg(7)} = \frac{0,8451}{1,3979 - 0,8451} = \frac{0,8451}{0,5528} = 1,529$$

8.- Resolver la ecuación exponencial $2^{0,4x} = 7.$

Sugerencias:

$$0,4x\cdot\lg(2)=\lg(7)\Rightarrow x=\frac{\lg(7)}{0,4\cdot\lg(2)}=\frac{0,8451}{(0,4)\cdot(0,3010)}$$

$$\Rightarrow\frac{0,8451}{0,1204}=7,02$$

$$R\Rightarrow x=7,02$$

9.- Resolver $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63.$

Sugerencias:

Multiplicar ambos lados de la ecuación por $x^{\frac{3}{2n}}$:

$$8x^{\frac{3}{2n}}\left(x^{\frac{3}{2n}}\right)-8x^{-\frac{3}{2n}}\left(x^{\frac{3}{2n}}\right)=63x^{\frac{3}{2n}}\Rightarrow 8x^{\frac{3}{n}}-8x^{0}=63x^{\frac{3}{n}}$$

$$8x^{\frac{3}{n}}-63x^{\frac{3}{2n}}-8=0\Rightarrow\left(x^{\frac{3}{2n}}-8\right)\left(8x^{\frac{3}{2n}}+1\right)=0$$

$$x_1^{\frac{3}{2n}}=8\Rightarrow x^{\frac{3}{2n}\cdot\frac{2n}{3}}=8^{\frac{2n}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2n}{3}}\Rightarrow x_1=2^{2n}$$

$$8x_2^{\frac{3}{2n}}=-1\Rightarrow x_2^{\frac{3}{2n}}=-\frac{1}{8}\Rightarrow\left(x_2\right)^{\frac{3}{2n}\cdot\frac{2n}{3}}=\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2n}{3}}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2^{2n}}$$

$$R\Rightarrow x_1=2^{2n};x_2=\frac{1}{2^{2n}}$$

10. Expresar y en función de x, si $\lg_b(y)=2x++\lg_b(x)$

Sugerencias:

$$\lg_b(y)-\lg_b(x)=2x\Rightarrow \lg_b\left(\frac{y}{x}\right)=2x\Rightarrow \frac{y}{x}=b^{2x}$$

$$\Rightarrow y=x\cdot b^{2x}.$$

$$R\Rightarrow y=x\cdot b^{2x}$$

11.- Encontrar x de la ecuación $a^x\cdot c^{-2x}=b^{(3x+1)}$.

Sugerencias: Tomar logaritmos y despejar x.

$$R\Rightarrow x=\frac{\lg(b)}{\lg(a)-2\lg(c)-3\lg(b)}$$

12.- Resolver la siguiente ecuación: $2\lg x-\lg 10x=0.$

Sugerencias:

$$2\lg x-(\lg 10+\lg x)=0\Rightarrow \lg x-\lg 10=0\Rightarrow \lg x-1=0\Rightarrow$$

$$\lg x=1\Rightarrow x=10$$

$$R\Rightarrow x=10$$

13.- Resolver $\lg(40x-1)-\lg(x-1)=3.$

Sugerencias:

$$\lg\frac{(40x-1)}{(x-1)}=3\Rightarrow \frac{(40x-1)}{x-1}=1000\Rightarrow x=\frac{999}{960}=\frac{333}{320}$$

$$R\Rightarrow x=\frac{333}{320}$$

14.- Resolver la siguiente ecuación $\lg_2(x-1)+\lg_2(x+1)=3$

Sugerencias:

$$(x-1)(x+1)=2^3=8 \Rightarrow x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9$$
$$R \Rightarrow x_1=3; x_2=-3$$

15.- Resolver la ecuación $\lg(2)+2\lg(x)=\lg(5x+3)$

Sugerencias:

$$\lg(2)+2\lg(x)=\lg(5x+3) \Rightarrow \lg 2(x^2)=\lg(5x+3) \Rightarrow 2x^2=5x+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2-5x-1=0 \Rightarrow (2x-1)(x-3)=0$$

$$R \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}; x_2=3$$

16.- Encontrar el valor de x en la ecuación: $2\lg(3-x)=\lg(2)+\lg(22-2x)$

Sugerencias:

$$\lg(3-x)^2=\lg 2(22-2x)=\lg(44-4x)$$
$$(3-x)^2=44-4x \Rightarrow x^2-2x-35=0 \Rightarrow (x-7)(x+5)=0$$

$$R \Rightarrow x_1=7; x_2=-5$$

17.- Resolver la ecuación: $2\lg(x)-\lg(30-2x)=1$

Sugerencias:

$$\lg\left(x^2\right)-\lg\left(30-2x\right)=1\Rightarrow \lg\frac{x^2}{\left(30-2x\right)}=1\Rightarrow \frac{x^2}{30-2x}=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+20x-300=0\Rightarrow \left(x+30\right)\left(x-10\right)=0$$

$$R\Rightarrow x_1=-30; x_2=10$$

18.- Resolver la ecuación $\lg\left(x^2+3x\right)+\lg\left(5x\right)=1+\lg\left(2x\right)$

Sugerencias:

$$\lg\left(x^2+3x\right)+\lg\left(5x\right)-\lg\left(2x\right)=1\Rightarrow \lg\frac{\left(x^2+3x\right)\left(5x\right)}{\left(2x\right)}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(5x^2+15x\right)}{2}=10\Rightarrow 5x^2+15x-20=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+4\right)\left(x-1\right)=0$$

$$R\Rightarrow x_1=-4; x_2=1.$$

19.- Resolver la ecuación $x^{\lg x}=100x$

Sugerencias:

Aplicando logaritmos:

$$\lg\left(x^{\lg(x)}\right)=\lg\left(100x\right)\Rightarrow \lg\left(x\right)\cdot\lg\left(x\right)=\lg\left(100\right)+\lg\left(x\right)\Rightarrow \left[\lg\left(x\right)\right]^2=2+\lg\left(x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\lg\left(x\right)\right]^2-\lg\left(x\right)-2=0\Rightarrow \left[\lg\left(x\right)-2\right]\cdot\left[\lg\left(x\right)+1\right]=0$$

$$\lg\left(x\right)=2; \lg\left(x\right)=-1$$

$$R\Rightarrow x_1=100; x_2=\frac{1}{10}\Rightarrow \left[100\cup\frac{1}{10}\right].$$

20.- Resolver la ecuación: $27^{x^2+1} = 243.$

Sugerencias: Tanto 27 como 243 son múltiplos de 3, entonces se puede aplicar logaritmos con base 3.

$$\lg_3\left(27^{x^2+1}\right) = \lg_3(243) \Rightarrow \left(x^2+1\right)\lg(27) = 5 \Rightarrow \left(x^2+1\right)3 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

$$R \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}; x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

21.- Resolver la ecuación $2^{(x+1)} = 7^{(x+2)}$

Sugerencias: Aplicar logaritmos en ambos lados de la ecuación:

$$(x+1)\lg(2) = (x+2)\lg(7) \Rightarrow x\left[\lg(2)\right] - x\left[\lg(7)\right] = 2\lg(7) - \lg(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\lg(7) - \lg(2)}{\lg(2) - \lg(7)} = \frac{\lg(49) - \lg(2)}{\lg(2) - \lg(7)} = \frac{\lg\left(\frac{49}{2}\right)}{\lg\left(\frac{2}{7}\right)}$$

$$R \Rightarrow x = \frac{\lg\left(\frac{49}{2}\right)}{\lg\left(\frac{2}{7}\right)}$$

22.- Encontrar el valor de $\boldsymbol{t}$ en la siguiente ecuación: $I = \left(\frac{E}{R}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$

Sugerencias:

La ecuación puede modificarse así: $\frac{RI}{E} = 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \Rightarrow e^{-\frac{Rt}{L}} = 1 - \frac{RI}{E}$,

aplicando ahora logaritmos con base ***e:***

$$-\frac{Rt}{L} = \lg_e\left[1 - \frac{RI}{E}\right] \Rightarrow t = \frac{-L\lg_e\left[1 - \frac{RI}{E}\right]}{R}$$

$$t = \frac{-L}{R} \cdot \lg_e\left[1 - \frac{RI}{E}\right]$$

23.- Encontrar ***x*** en la ecuación $\lg(x+1) + \lg x = 1{,}3010.$

Sugerencias:

$$\lg\left[x(x+1)\right] = 1{,}3010 \Rightarrow x(x+1) = anti\lg(1{,}3010) = 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$R \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 4$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #17.

Tema: Series. Secuencias. Términos generales.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Determinar el término general de la secuencia:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{12},\frac{1}{30},\frac{1}{56},\frac{1}{90,},..................$$

Sugerencias: Establecer el orden de partición de cada término e identificarlo con su ordinal correspondiente.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2};\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4};\frac{1}{30}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6};\frac{1}{56}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8};............$$

$$R\Rightarrow\frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

Nota: *n* es el ordinal.

2.- Determinar el término general de la secuencia:

$\frac{1}{5^3}, \frac{3}{5^5}, \frac{5}{5^7}, \frac{7}{5^9}, \frac{9}{5^{11}}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$R \Rightarrow a_n = \frac{2n-1}{5^{2n+1}}$$

3.- Establecer la convergencia o divergencia de la serie:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{4}} + \ldots\ldots\ldots$$

Sugerencias: Para establecer la convergencia o divergencia de una serie dada, es necesario encontrar primero el término general, el cual, por observación es para este caso:

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

Luego, para determinar la convergencia o divergencia, Si podemos probar que se cumple la relación siguiente: $\frac{1}{1+\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, entonces $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ es divergente. Esto es cierto, porque $1+\sqrt{n} < n; (n > 1)$.

$R \Rightarrow$ *Divergente.*

4.- Establecer la convergencia o divergencia de la serie:

$$sen\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}sen\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}sen\frac{\pi}{6} + \frac{1}{16}sen\frac{\pi}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sugerencias: El término general es $a_n = \frac{1}{n^2} \cdot sen\frac{\pi}{2n}$. Entonces, para dterminar la convergencia o divergencia: $\frac{1}{n^2} sen\frac{\pi}{2n} < \frac{1}{n^2}$, lo cual es verdad porque $sen\frac{\pi}{2n} < 1 (n > 1)$.

$$R \Rightarrow Convergente.$$

5.- Estudiar la serie:

$$1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sugerencias: Para estudiar el comportamiento de una serie, se debe encontrar primero los términos a_n y a_{n+1}, para ello:

$$a_1=1;a_2=\frac{2!}{2^2};a_3=\frac{3!}{3^3};a_4=\frac{4!}{4^4};\ldots\ldots a_n=\frac{n!}{n^n};a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{[n+1]}}$$

Ahora, se encuentra la realción $\dfrac{a_{(n+1)}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\dfrac{n^n}{(n!)}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$

Luego, se encuentra el límite de esa expresión, como sigue:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{(n+1)^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}=\frac{1}{2,71}<1$$

$$R\Rightarrow Convergente$$

6.- Estudiar la serie: $1-\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^4}{2^2\cdot4^2}-\dfrac{3^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

Sugerencias:

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{3^2}{2^2}; a_3 = \frac{3^4}{2^2 \cdot 4^2}; ....a_n = \frac{3^{(2n-2)}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot ....(2n-2)^2}; a_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)-2}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot ...(2n-2)^2 \cdot \left[2(n+1)-2\right]^2} = \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot ....(2n-2)^2 \cdot (2n)^2} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot ......(2n-2)^2 \cdot (2n)^2} \cdot \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot ....(2n-2)^2}{3^{2n-2}} = \frac{3^2}{4n^2}$$

Ahora, se toma el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^2}{4n^2}\right] = 0$$

$$R \Rightarrow Convergente$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #18.
Tema: Permutaciones. Variaciones.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Permu**taciones:**

Es el arreglo de un conjunto de objetos distintos en un orden específico.. El número de permutaciones de n objetos distintos, tomados todos al mismo tiempo es igual a $P_{(n,n)} = n!$.

Si es el caso de permutaciones de n objetos distintos tomados en grupos de r objetos, al mismo tiempo , donde $0 \le r \le n$, están dados por la ecuación (también llamadas ***VARIACIONES***):

$$P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

El número de arreglos que se pueden hacer con 12 objetos, tomados de 3 en 3, es igual a:

$$P(12,3)=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12!}{9!}=12\cdot 11\cdot 10=1.320(veces)$$

PREGUNTAS:

1.- Encontrar el valor de $P(9,4)$.

$$R\Rightarrow P(9,4)=\frac{9!}{(9-4)!}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3.024.$$

2.- Evaluar cada uno der los siguientes símbolos:

(a) $5!=$ $\quad R\Rightarrow 120$

(b) $\frac{7!}{4!}=$ $\quad R\Rightarrow 210.$

© $P(6,2)=$ $\quad R\Rightarrow 30.$

(d) $P(9,2)=$ $\quad R\Rightarrow 72$,

3.- Calcular el número de permutaciones (variaciones) de las letras ***a, b, c, d,*** tomadas en grupos de 2 al mismo tiempo.

$$R\Rightarrow P(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=4\cdot 3=12.$$

4.- Calcular el número de diferentes arreglos que se pueden hacer con ***a, b, c,, d,*** tomadas en grupos de 4 al mismo tiempo.

$$R\Rightarrow P(4,4)=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$

5.- ¿ Cuántos arreglos (variaciones) de dos letras cada uno, pueden hacerse con ***a, b, c, d, e .*** **?.**

$$R \Rightarrow P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

6.- Determinar el número de permutaciones de grupos de 3 elementos tomados de un conjunto de 4 elementos (a, b, c, d).

Sugerencias:

$$P_a^b = \frac{b1}{(b-a)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

$$R \Rightarrow 24$$

7.- ¿ De cuantas maneras diferentes pueden colocarse 3 libros en un tramo de una biblioteca?

$$R \Rightarrow P_n = n! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

8.- De un total de 10 personas se deberán escoger 3 candidatos para diferentes puestos públicos. ¿ De cuántas maneras diferentes podrá ser ésto hecho?

Sugerencias:

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

$$R \Rightarrow 720(veces)$$

9.- Un club necesita elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 5 candidatos. ¿Cuántos diferentes equipos de 3 pueden elegirse sin que ninguno ocupe más de un puesto?

Sugerencias:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$$

$$R \Rightarrow 60$$

10.- De un grupo de 26 miembros se deberán elegir un presidente y un secretario. ¿ De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de los dos puestos?

Sugerencias:

$$Variaciones = P_2^{26} = \frac{26!}{(26-2)!} = 26 \cdot 25 = 650$$

$$R \Rightarrow 650$$

11.- ¿Cuántos números telefónicos de 4 dígitos diferentes cada uno, pueden ser hechos de los siguientes dígitos: 0, 1, ,2 3, 4, 5, 6, 7, 8, ,9?.

Sugerencias:

Cada arreglo de los mismos 4 dígitos produce un número telefónico nuevo; por lo tanto, estamos hablando de avariaciones:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-4)!} = 5040$$

$$R \Rightarrow 5040.$$

12.- ¿ En cuántas maneras diferentes pueden ser agrupadas las letras de la palabra ¨ MONDAY¨?.

$$R \Rightarrow Permutacion : 6! = 720$$

13.- ¿ En cuántas maneras pueden agruparse las letras de la palabra "BANANA¨.

Sugerencias: Las N se repiten 2 veces y las A se repiten 3 veces. Entonces:

$$R \Rightarrow P_{n_1, n_2, n_3}^{n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots\ldots} = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

12.- Encontrar el número de permutaciones que se pueden hacer con las 7 letras de la palabra "algebra".

Sugerencias: La letra "a" se repite dos veces.

$$R \Rightarrow \frac{7!}{2!} = 2.520$$

13.- ¿Cuántos arreglos pueden hacerse con las letras de la palabra **“Tennessee**”?.

$$R \Rightarrow \frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1} = 3.780$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #19.
Tema: Combinaciones.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!} =$$

Ejem**plo:** Encontrar el número de comités de 4 miembros cada uno que se pueden formar de un grupo de 9 personas.

$$C(9,4) = \frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!} = 126$$

PREGUNTAS:

1.- Encontrar el valor de $C(n,0)$.

$$R \Rightarrow C(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2.- Evaluar cada uno de los siguientes símbolos:

(a) $C(6,3)$.

$$R \Rightarrow \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$$

(b) $C(18,16)$

$$R \Rightarrow C(18,16) = \frac{18!}{(18-16)!16!} = 153.$$

3.- ¿Cuántos juegos de 5 cartas diferentes pueden hacerse de un paquete de 52 cartas?

$$R \Rightarrow C(52,5) = \frac{52!}{(52-5)!5!} = 2.598.960$$

4.- ¿ De cuántas diferentes maneras pueden caer dos dados?

$$R \Rightarrow 6 \cdot 6 = 36$$

5.- ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar comités de 3 personas de un grupo de 10 personas?.

$$R \Rightarrow C(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$$

6.- ¿ Cuántos equipos de béisbol de 9 jugadores pueden ser seleccionados de 12 jugadores, independientemente de la posición que juega cada uno?.

$$R \Rightarrow C(12,9) = \frac{12!}{9!3!} = 220$$

7.- Una fábrica produce 7 tipos de productos diferentes, y los empaqueta de tres en tres. ¿ Cuántos paquetes diferentes pueden hacer con los 7 productos?.

$$R \Rightarrow C(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!3!} = 35$$

8.- Un hombre y su esposa deciden entretener a 24 amigos, haciendo 4 cenas para 6 invitados cada una. ¿ De cuántas maneras los invitados a la primera cena pueden ser seleccionados?.

Sugerencias:

En el primer grupo se considera sólo una cena y se deberán seleccionar 6 personas de un conjunto de 24 a ser invitados.

$$R \Rightarrow C(24,6) = \frac{24!}{(24-6)!6!} = 134.596.$$

9.- Una dama tiene 12 amigos. Ella desea invitar a tres de ellos a jugar cartas. ¿ De cuántas maneras posibles ella puede invitarlos sin repetir grupos?.

$$R \Rightarrow C(12,3) = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$$

10.- En una reunión de trabajo 12 personas deben ser sentadas en 7 sillas y un banco con capacidad para sentar a 5 personas. ¿ De cuántas maneras pueden sentarse las personas en el banco, sin importar el orden en que lo hagan?

$$R \Rightarrow C(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!51} = 792$$

11.- ¿ Cuántas sumas de dinero diferente se pueden obtener al seleccionar dos monedas de una caja que contiene un penny, un níckel, un dime, un quarter, y la mitad de un dólar?.

$$R \Rightarrow C(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$$

12.- ¿De cuántas maneras 5 premios pueden ser entregados a 4 muchachos, siendo cada uno de los muchachos elegible para todos los premios?

Sugerencias: Cualquiera de los premios puede ser entregado de 4 maneras diferentes; y entonces alguno de los premios restantes puede también ser entregado de 4 maneras diferentes, y como el seguindo premio puede ser recibido por el muchacho que ya ha recibido el primero,, entonces dos premios pueden ser entregados en $4^2(veces)$, tres premios serían $4^3(veces)$ y por lo tanto cinco premios serían 4^5.

$R \Rightarrow 4^5.$

13.- ¿De cuántas maneras 5 libros pueden ser seleccionados de un grupo de 12, si (a) cuando un libro específico es siempre incluido, (b) cuando un libro específico es siempre excluido?.

Sugerencias:

(a) Ya que el libro específico debe ser incluido en cada selección, se tendrán que seleccionar 4 de los 11 restantes: $R_1 \Rightarrow C(11,4) = 330$

(b) Ya que un libro específico debe ser excluido, se deberán seleccionar 5 libros de los 11 restantes: $R_2 \Rightarrow C(11,5) = 462.$

14.- ¿ Cuántos grupos pueden ser formados de un total de 10 objetos, tomnando al menos tres al mismo tiempo?.

Sugerencias:

$$C(10,3)+C(10,4)+C(10,5)+C(10,6)+C(10,7)+C(10,8)+C(10,9)+C(10,10)=$$
$$=120+210+252+210+120+45+10+1=968.$$
$$R \Rightarrow 968$$

15.- Un hombre tiene 6 amigos; ¿ en cuántas diferentes maneras él puede invitarlos a cenar?.

Sugerencias:

$$C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)=$$
$$6+15+20+15+6+1=63$$

$$R \Rightarrow 63$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #20.

Tema: Identidades trigonométricas.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

1.- $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2.- $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha$

3.- $sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$

4.- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$

5.- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

PREGUNTAS:

1.- Probar que $4 + (tg\theta - ctg\theta)^2 = \sec^2\theta - \csc^2\theta.$

Sugerencias: Desarrollar el binomio al cuadrado:

$$tg^2\theta - 2\cdot tg\theta\cdot ctg\theta + ctg^2\theta = tg^2\theta - 2 + ctg^2\theta$$

Luego:

$$4+\left(tg\theta-ctg\theta\right)^2=4+tg^2\theta-2+ctg^2\theta=2+tg^2\theta+ctg^2\theta\Rightarrow$$
$$1+tg^2\theta+1+ctg^2\theta=\sec^2\theta+\csc^2\theta$$

Ya que $1+tg^2\theta=\sec^2\theta;1+ctg^2\theta=\csc^2\theta$

Entonces: $4+\left(tg\theta-ctg\theta\right)^2=\sec^2\theta+\csc^2\theta$ 2.-

2.- Probar que $tg\theta\left(sen\theta+ctg\theta\cdot\cos\theta\right)=\sec\theta$

Sugerencias: Aplicar la propiedad distributiva:

$$tg\theta\left(sen\theta+ctg\theta\cdot\cos\theta\right)=tg\theta\cdot sen\theta+tg\theta\cdot ctg\theta\cdot\cos\theta=tg\theta\cdot sen\theta+\cos\theta$$
$$=\frac{sen\theta}{\cos\theta}\cdot sen\theta+\cos\theta=\frac{sen^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

3.- Reducir la expresión $\frac{tgx-ctgx}{tgx+ctgx}=$ auna que contenga solo *senx*.

Sugerencias:

$$\frac{tgx-ctgx}{tgx+ctgx}=\frac{\frac{senx}{\cos x}-\frac{\cos x}{senx}}{\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}}=\frac{\frac{senx\left(senx\right)}{senx\left(\cos x\right)}-\frac{\cos x\left(\cos x\right)}{\cos x\left(senx\right)}}{\frac{senx\left(senx\right)}{senx\left(\cos x\right)}+\frac{\cos x\left(\cos x\right)}{\cos x\left(senx\right)}}=$$

$$\frac{\frac{sen^2x-\cos^2x}{senx\cdot\cos x}}{\frac{sen^2x+\cos^2x}{senx\cdot\cos x}}=\frac{sen^2x-\cos^2x}{sen^2x+\cos^2x}=sen^2x-\left(1-sen^2x\right)=$$
$$=2sen^2x-1$$

4.- Encontrar $sen105^{o}$ sin usar las tablas trigonométricas.

Sugerencias: $105^{o} = 60^{o} + 45^{o}$

$$sen105^{o} = sen\left(60^{o} + 45^{o}\right) = sen60^{o}\cos 45^{o} + \cos 60^{o}\, sen45^{o} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen105^{o} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5.- Encontrar $\cos 15^{o}$ sin utilizar las tablas trigonométricas.

Sugerencias: $15^{o} = 45^{o} - 30^{o}$

$$\cos 15^{o} = \cos\left(45^{o} - 30^{o}\right) = \cos 45^{o}\cdot\cos 30^{o} + sen45^{o}\cdot sen30^{o} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \Rightarrow \cos 15^{o} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

6.- Encontrar $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

Sugerencias: $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{3}\cdot sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\Rightarrow R \Rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

7.- Encontrar el seno y el coseno de 75º.

Sugerencias: $75^{o} = 45^{o} + 30^{o}$

$$sen75^{o} = sen45^{o}\cdot\cos 30^{o} + \cos 45^{o}\cdot sen30^{o} =$$

$$sen75^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

$$\cos 75^{o} = \cos 45^{o} \cdot \cos 30^{o} - sen45^{o} \cdot sen30^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\cos 75^{o} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

8.- Encontrar una expresión para $tg\left(u+v\right) =$

Sugerencias:

$$tg\left(u+v\right) = \frac{sen\left(u+v\right)}{\cos\left(u+v\right)} = \frac{senu \cdot \cos v + \cos u \cdot senv}{\cos u \cdot \cos v - senu \cdot senv} =$$

$$= \frac{\dfrac{senu \cdot \cos v + \cos u \cdot senv}{\cos u \cdot \cos v}}{\dfrac{\cos u \cdot \cos v - senu \cdot senv}{\cos u \cdot \cos v}} = \frac{tgu + tgv}{1 - tgu \cdot tgv}$$

9.- Encontrar: $sen15^{o}; \cos 15^{o}; tg15^{o}; ctg15^{o}.$

Sugerencias: $15^{o} = 45^{o} - 30^{o}$

$$sen15^{o} = sen\left(45^{o} - 30^{o}\right) = sen45^{o} \cdot \cos 30^{o} - \cos 45^{o} \cdot sen30^{o} =$$

$$sen15^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^{o} = \cos\left(45^{o} - 30^{o}\right) = \cos 45^{o} \cdot \cos 30^{o} + sen45^{o} \cdot sen30^{o} =$$

$$\cos 15^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

$$tg15^{o} = \frac{tg45^{o} - tg30^{o}}{1 + tg45^{o} \cdot tg30^{o}} = \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$ctg15^o = \frac{ctg45^o \cdot ctg30^o + 1}{ctg30^o - ctg45^o} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

10.- Encontrar el seno de 195º partiendo de 225º y 30º.

Sugerencias: $195^o = 225^o - 30^o$

$$sen195^o = sen\left(225^o - 30^o\right) = sen225^o \cdot \cos 30^o - \cos 225^o \cdot sen30^o =$$

$$sen195^o = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

11.- Encontrar la fórmula de $sen\left(3\alpha\right)$ en términos de $sen\alpha$.

Sugerencias:

$$sen\left(3\alpha\right) = sen\left(\alpha + 2\alpha\right) = sen\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot sen2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\alpha\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) + \cos\alpha\left(2sen\alpha \cdot \cos\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\alpha \cdot \cos^2\alpha - sen^3\alpha + 2sen\alpha \cdot \cos^2\alpha = 3sen\alpha \cdot \cos^2\alpha - sen^3\alpha =$$

$$\Rightarrow 3sen\alpha\left(1 - sen^2\alpha\right) - sen^3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$$

12.- Simplificar la expresión

$$2sen\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) - 3\cos\left(\pi + \theta\right) - tg\left(-\theta\right) + ctg\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

Sugerencias:

$$sen\left(\alpha - \beta\right) = sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\cos\left(\alpha + \beta\right) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$ctg\left(\alpha + \beta\right) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}$$

Aplicando las fórmulas de arriba:

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\theta-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot sen\theta=(-1)\cdot\cos\theta-(0)\cdot sen\theta$$
$$=-\cos\theta.$$

$$\cos(\pi+\theta)=\cos\pi\cdot\cos\theta-sen\pi\cdot sen\theta=(-1)\cdot\cos\theta-(0)\cdot sen\theta=-\cos\theta$$

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot ctg\theta-1}{ctg\theta+ctg\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{(0)\cdot ctg\theta-1}{ctg\theta+(0)}=\frac{-1}{ctg\theta}=-tg\theta$$

$$R\Rightarrow\cos\theta$$

13.- Probar que $sen\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=sen\frac{\pi}{2}\cdot\cos t+\cos\frac{\pi}{2}\cdot sent=(1)\cdot\cos t+(0)\cdot sent=\cos t$$

14.- Probar que $\sec^2\theta-tg^2\theta=1$ es una identidad.

$$sen^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\frac{sen^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow tg^2\theta+1=\sec^2\theta\Rightarrow\sec^2\theta-tg^2\theta=1$$

Es una identidad, porque partimos de una identidad.

15.- Probar que $\cos^4 B-sen^4B=\cos^2 B-sen^2B.$

$$\cos^4 B-sen^4B=\left(\cos^2 B-sen^2B\right)\cdot\left(\cos^2 B+sen^2B\right)=\left(\cos^2 B-sen^2B\right)\cdot(1)$$
$$\Rightarrow\cos^4 B-sen^4B=\cos^2 B-sen^2B$$

16.- Probar la identidad $1+sen\left(2x\right)=\left(senx+\cos x\right)^{2}$

$$\left(senx+\cos x\right)^{2}=sen^{2}x+2\cdot senx\cdot\cos x+\cos^{2}x=\left(sen^{2}x+\cos^{2}x\right)+2\cdot senx\cdot\cos x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+sen\left(2x\right)$$

17.- Probar la identidad $csc\left(2x\right)=\dfrac{\csc x}{2\cos x}$

$$\frac{\csc x}{2\cos x}=\frac{\frac{1}{sen}}{2\cdot\cos x}=\frac{1}{2\cdot senx\cdot\cos x}=\frac{1}{sen\left(2x\right)}=\csc\left(2x\right)$$

18.- Probar que $\dfrac{\cos^{3}x-\cos x+senx}{\cos x}=tgx-sen^{2}x.$

$$\frac{\cos^{3}x-\cos x+senx}{\cos x}=\frac{\cos^{3}x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{senx}{\cos x}=\cos^{2}x-1+tgx=$$
$$=1-sen^{2}x-1+tgx=tgx-sen^{2}x$$

19.- Demostrar que $tgx+ctgx=\csc x\cdot\sec x.$

$$\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}=\frac{senx\cdot senx+\cos x\cdot\cos x}{senx\cdot\cos x}=\frac{sen^{2}x+\cos^{2}x}{senx\cdot\cos x}=$$
$$=\frac{1}{senx\cdot\cos x}=\frac{1}{senx}\cdot\frac{1}{\cos x}=csc\left(x\right)\cdot\sec\left(x\right)$$

20.- Probar que $\dfrac{1}{\sec\left(A\right)-tg\left(A\right)}=\sec\left(A\right)+tg\left(A\right)$

$$\frac{1}{\sec(A)-tg(A)}=\frac{1}{\sec(A)-tg(A)}\cdot\frac{\sec(A)+tg(A)}{\sec(A)+tg(A)}=\frac{\sec(A)+tg(A)}{\sec^2(A)-tg^2(A)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sec(A)+tg(A)}{1}=\sec(A)+tg(A)$$

21.- Probar la identidad $\dfrac{1-\cos\theta}{sen\theta}=\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta}$

$$\frac{1-\cos\theta}{sen\theta}=\frac{1-\cos\theta}{sen\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{sen\theta\cdot(1+\cos\theta)}=$$

$$=\frac{sen^2\theta}{sen\theta\cdot(1+\cos\theta)}=\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}$$

22.- Probar que $\dfrac{\cos A}{\csc A-1}+\dfrac{\cos A}{\csc A+1}=2tgA$

$$sen^2A+\cos^2A=1\Rightarrow\frac{sen^2A}{sen^2A}+\frac{\cos^2A}{sen^2A}=\frac{1}{sen^2A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+ctg^2A=csc^2A\Rightarrow\csc^2A-1=ctg^2A$$

$$\frac{\cos A}{\csc A-1}+\frac{\cos A}{\csc A+1}=\frac{(\csc A+1)\cdot\cos A+(\csc A-1)\cdot\cos A}{(\csc A-1)\cdot(\csc A+1)}=$$

$$=\frac{\csc A\cdot\cos A+\cos A+\csc A\cdot\cos A-\cos A}{\csc^2A-1}=\frac{2\cdot\csc A\cdot\cos A}{ctg^2A}=$$

$$=\frac{2ctg(A)}{ctg^2(A)}=\frac{2}{ctg(A)}=2\cdot tg(A)$$

23.- Probar $\dfrac{1-senx}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{1+senx}$.

Multiplicando en cruz:

$$\left(1-senx\right)\cdot\left(1+senx\right)=\cos x\cdot\cos x\Rightarrow 1-sen^2x=\cos^2 x\Rightarrow$$
$$\cos^2 x=\cos^2 x.$$

Las dos fracciones son iguales porque el producto en cruz es igual.

24.- Probar $\sec A\cdot\csc A=tgA+ctgA.$

$$tgA+ctgA=\frac{senA}{\cos A}+\frac{\cos A}{senA}=\frac{sen^2A+\cos^2 A}{\cos A\cdot senA}=\frac{1}{\cos A\cdot senA}=\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{senA}=\sec A\cdot\csc A$$

25.- Probar que $sen\left(45^{o}+x\right)+sen\left(45^{o}-x\right)=\sqrt{2}\cdot\cos x$

$$A=sen\left(45^{o}+x\right)=sen45^{o}\cdot\cos x+\cos 45^{o}\cdot senx=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot senx=$$
$$B=sen\left(45^{o}-x\right)=sen45^{o}\cdot\cos x-\cos 45^{o}\cdot senx=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot senx=$$
$$\sum\left(A+B\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x=\sqrt{2}\cdot\cos x$$

26.- Probar que $\dfrac{\cos\left(2\theta\right)}{\cos\theta}=\dfrac{1-tg^2\theta}{\sec\theta}.$

$$\frac{\cos\left(2\theta\right)}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{\cos^2\theta-sen^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1-tg^2\theta}{\sec\theta}$$

27.- Probar que $\dfrac{\cos\theta}{1-sen\theta}=\dfrac{1+sen\theta}{\cos\theta}.$

$$\frac{\cos\theta}{1-sen\theta}=\frac{\cos\theta}{1-sen\theta}\cdot\frac{1+sen\theta}{1+sen\theta}=\frac{\cos\theta\cdot\left(1+sen\varsigma\right)}{1-sen^2\theta}=$$
$$\frac{\cos\theta\cdot\left(1+sen\theta\right)}{\cos^2\theta}=\frac{1+sen\theta}{\cos\theta};\left[\cos\theta\neq 0\right]$$

28.- Probar que $sen^2\theta + tg^2\theta = \sec^2\theta - \cos^2\theta.$

$$A = sen^2\theta + tg^2\theta = sen^2\theta + \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{sen^2\theta\cdot\cos^2\theta + sen^2\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$A = \frac{sen^2\theta\left(\cos^2\theta + 1\right)}{\cos^2\theta} = tg^2\theta\left(1 - sen^2\theta + 1\right) = tg^2\theta\cdot\left(2 - sen^2\theta\right).$$

$$A = tg^2\theta\cdot\left(2 - sen^2\theta\right).$$

$$B = \sec^2\theta - \cos^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \cos^2\theta = \frac{1-\cos^4\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\left(1-\cos^{2\theta}\right)\cdot\left(1+\cos^2\theta\right)}{\cos^2\theta} =$$

$$B = \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\left(1+\cos^2\theta\right) = tg^2\theta\cdot\left(1+1-sen^2\theta\right) = tg^2\theta\left(2-sen^2\theta\right) =$$

$$B = tg^2\theta\cdot\left(2-sen^2\theta\right)$$

$$A = B$$

29.- Probar que $\dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1} = ctg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \Rightarrow \cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left[1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{1+\cos x}{2} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Partiendo de la misma ecuación, se puede también demostrar que:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

De donde:

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\Rightarrow ctg\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Ahora se toma el primer miembro de la identidad que se quiere demostrar:

$$\frac{\sec x+1}{\sec x-1}=\frac{\frac{1}{\cos x}+1}{\frac{1}{\cos x}-1}=\frac{\frac{1+\cos x}{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)^2=ctg^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

30.- Probar que $tg\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right]=\sec\theta+tg\theta$.

$$tg\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right]\Rightarrow tg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

Hacer $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{2}\theta_1$

Entonces, refiriéndose al problema anterior:

$$tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}}\Rightarrow\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta 1}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}}=\frac{1-\cos\theta 1}{\sqrt{1-\cos^2\theta_1}}\Rightarrow tg\,\frac{1}{2}\theta_1=\frac{1-\cos\theta_1}{sen\theta_1}=$$

Recordando que $\theta_1=\frac{\pi}{2}+\theta$

$$tg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=$$

Pero:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta-sen\frac{\pi}{2}\cdot sen\theta=(0)\cdot\cos\theta-1\cdot sen\theta=-sen\theta$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=sen\frac{\pi}{2}.\cos\theta+\cos\frac{\pi}{2}\cdot sen\theta=1\cdot\cos\theta+(0)\cdot sen\theta=\cos\theta$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de arriba:

$$tg\,\frac{1}{2}\theta_1=tg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{1+sen\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{sen\theta}{\cos\theta}=$$

$$=\sec\theta+tg\theta$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #21.
Tema: Identidades trigonométricas -B.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

1.- $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2.- $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha$

3.- $sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$

4.- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$

5.- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

6.- $\left(a^3 - b^3\right) = \left(a-b\right)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$

7.- $\left(a^3 + b^3\right) = \left(a+b\right)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$

PREGUNTAS:

1.- Probar que $\dfrac{sen^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)}=\frac{sen^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot(1-\cos\alpha)=\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}\cdot(1-\cos\alpha)=$$
$$\Rightarrow(1-\cos\alpha)$$

2.- Probar que $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-sen\alpha}=1+sen\alpha$

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-sen\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(1+sen\alpha)}{(1-sen\alpha)(1+sen\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{1-sen^2\alpha}\cdot(1+sen\alpha)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot(1+sen\alpha)=1+sen\alpha$$

3.- Probar que $tg\alpha(1+sen\alpha)=\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{1-sen\alpha}$

$$\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{1-sen\alpha}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{1-sen\alpha}\cdot\frac{(1+sen\alpha)}{(1+sen\alpha)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha(1+sen\alpha)}{1-sen^2\alpha}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot(1+sen\alpha)=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot(1+sen\alpha)=tg\alpha(1+sen\alpha)$$

4.- Probar que $sen^4\alpha-sen^2\alpha=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha$

$$sen^2\alpha\cdot\left(sen^2\alpha-1\right)=\cos^2\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-1\right)\Rightarrow(-1)sen^2\alpha\cdot\left(1-sen^2\alpha\right)=$$
$$(-1)\cos^2\alpha\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)\Rightarrow\Rightarrow sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha\Rightarrow1=1$$

5.- Probar que $sen^4\alpha-\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha.$

$$\Rightarrow\left(1-\cos^2\alpha\right)^2-\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha$$

6.- Probar que $\cos^4\alpha-sen^4\alpha=1-2sen^2\alpha$

$$\Rightarrow \left(1-sen^2\alpha\right)^2 - sen^4\alpha = 1-2sen^2\alpha + sen^4\alpha - sen^4\alpha = 1-2sen^2\alpha$$

7.- Probar que $\dfrac{sen\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = sen\alpha \cdot \sec\alpha + 1.$

$$\frac{sen\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = sen\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + 1 = sen\alpha \cdot \sec\alpha + 1$$

8.- Probar que $\dfrac{1+2sen\alpha\cos\alpha}{1-2sen^2\alpha} = \dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$

$$\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha} = \frac{1+\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\dfrac{\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha - sen\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha - sen\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha - sen\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha + sen\alpha} = \frac{\left(\cos\alpha + sen\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\left(\cos^2\alpha + 2sen\alpha\cos\alpha + sen^2\alpha\right)}{\left(1-sen^2\alpha\right) - sen^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2sen\alpha\cos\alpha}{1-2sen^2\alpha}$$

9.- Probar que $\dfrac{sen^3\alpha - \cos^3\alpha}{sen\alpha - \cos\alpha} = 1 + sen\alpha\cos\alpha$

Aplicar la fórmula de factorización: $a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$$\frac{sen^3\alpha - \cos^3\alpha}{sen\alpha - \cos\alpha} = \frac{\left(sen\alpha - \cos\alpha\right)\left(sen^2\alpha + sen\alpha\cos\alpha + \cos^2\varepsilon\right)}{sen\alpha - \cos\alpha} = 1 + sen\alpha\cos\alpha$$

10.- Probar que $\dfrac{sen^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - sen\alpha\cos\alpha} = sen\alpha + \cos\alpha$

Aplicar la fórmula de factorización: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$\frac{sen^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-sen\alpha\cos\alpha}=\frac{(sen\alpha+\cos\alpha)\left(sen^2\alpha-sen\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{1-sen\alpha\cos\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(sen\alpha+\cos\alpha)(1-sen\alpha\cos\alpha)}{1-sen\alpha\cos\alpha}=sen\alpha+\cos\alpha$$

11.- Probar que $\dfrac{sen\alpha+tg\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1+sen\alpha}{\cos\alpha+ctg\alpha}$.

$$A=\frac{sen\alpha+tg\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{sen\alpha+\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha+sen\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{sen\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}=tg\alpha$$

$$B=\frac{1+sen\alpha}{\cos\alpha+ctg\alpha}=\frac{1+sen\alpha}{\cos\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}}=\frac{1+sen\alpha}{\dfrac{\cos\alpha(sen\alpha+1)}{sen\alpha}}=\frac{1}{ctg\alpha}=tg\alpha$$

$$A=B$$

12.- Probar que $\dfrac{sen^2\alpha+tg^2\alpha}{sen^2\alpha}=\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$A=\frac{sen^2\alpha+tg^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{sen^2\alpha+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{sen^2\alpha}=\frac{sen^2\alpha\left(\cos^2\alpha+1\right)}{sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$B=\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\Rightarrow A=B$$

13.- Probar que $\dfrac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1+tg\alpha} = \dfrac{1-tg\alpha}{\sec^2\alpha}$

Multiplicando en cruz:

$$\sec^2\alpha\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) = \left(1-tg\alpha\right)\cdot\left(1+tg\alpha\right)$$

$$1-tg^2\alpha = 1-tg^2\alpha$$

14.- Probar que $\dfrac{sen^2\alpha + tg^2\alpha}{sen^2\alpha} = \dfrac{ctg^2\alpha + \csc^2\alpha}{ctg^2\alpha}$

Multiplicando en cruz:

$$ctg^2\alpha\cdot\left(sen^2\alpha + tg^2\alpha\right) = \cos^2\alpha + 1$$

$$sen^2\alpha\cdot\left(ctg^2\alpha + \csc^2\alpha\right) = \cos^2\alpha + 1$$

15.- Probar que $\cos^5\alpha\cdot sen\alpha - \cos^3\alpha\cdot sen\alpha - sen^5\alpha\cdot\cos\alpha + sen^3\alpha\cdot\cos\alpha = 0$

$$\cos^5\alpha\cdot sen\alpha - \cos^3\alpha\cdot sen\alpha = sen^5\alpha\cdot\cos\alpha - sen^3\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\right) = sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(sen^4\alpha - sen^2\alpha\right)$$

$$\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right) = sen^2\alpha\cdot\left(sen^2\alpha - 1\right)$$

$$\left(1-sen^2\alpha\right)\cdot\left(-sen^2\alpha\right) = sen^4\alpha - sen^2\alpha = sen^2\alpha\cdot\left(sen^2\alpha - 1\right)$$

16.- Probar que $sen^2\alpha\cdot tg\alpha + \cos^2\alpha\cdot ctg\alpha + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha = tg\alpha + ctg\alpha$

$$A = sen^2\alpha\cdot tg\alpha + \cos^2\alpha\cdot ctg\alpha + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$A = sen^2\alpha\cdot\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} + 2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$A = \frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\cdot sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{sen\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2}{sen\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$B = tg\alpha + ctg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{sen\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$A = B$$

17.- Probar que

$$A = (sen\alpha + \cos\alpha + 1)\cdot(sen\alpha + \cos\alpha - 1) = B = 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$A = \left[(sen\alpha + \cos\alpha) + 1\right]\cdot\left[(sen\alpha + \cos\alpha) - 1\right] = (sen\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 =$$

$$A = sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha - 1 = 1 + 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha - 1 = 2 \cdot sen\alpha \cos\alpha$$

$$A = B$$

18.- Probar que:

$$\cos^4\alpha + sen^4\alpha = 1 - 2 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

$$\cos^4\alpha + 2 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + sen^4\alpha = 1 \Rightarrow \left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 = 1$$

$$1 = 1$$

19.- Probar que $(1 + sen\alpha - \cos\alpha)^2 = 2 \cdot (1 + sen\alpha) \cdot (1 - \cos\alpha).$

$$A = \left[1 + (sen\alpha - \cos\alpha)\right]^2 = 1 + 2(sen\alpha - \cos\alpha) + (sen\alpha - \cos\alpha)^2 =$$

$$A = 1 + 2sen\alpha - 2\cos\alpha + \left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2sen\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$A = 2(1 + sen\alpha - \cos\alpha - sen\alpha \cdot \cos\alpha) = 2(1 + sen\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

20.- Probar que $2\left(\cos^6\alpha + sen^6\alpha\right) + 1 = 3\left(\cos^4\alpha + sen^4\alpha\right)$

$$A = 2\left[\left(\cos^2\alpha\right)^3 + \left(sen^2\alpha\right)^3\right] + 1 =$$

Se aplicará entonces que

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \Rightarrow a = \cos^2\alpha; b = sen^2\alpha$$

$$A=2\left[\left(\cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)\left(\cos^4\alpha-sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+sen^4\alpha\right)\right]+1=$$
$$A=2\left[(1)\left(\cos^4\alpha-sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+sen^4\alpha\right)\right]+\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=$$
$$A=3\left(\cos^4\alpha+sen^4\alpha\right)=B$$

21.- Probar que $\cos^6\alpha+sen^6\alpha+3\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha=1$

$$A=\left(\cos^2\alpha\right)^3+\left(sen^2\alpha\right)^3+3\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha=$$

Se hace $a=\cos^2\alpha;b=sen^2\alpha$ y se aplica $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$A=\left(\cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)\left(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha+sen^4\alpha\right)+3\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha=$$
$$A=(1)\left(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha+sen^4\alpha\right)+3\cos^2\alpha sen^2\alpha=$$
$$A=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha+sen^4\alpha+3\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha=$$
$$A=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha+sen^4\alpha=$$
$$A=\left(\cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)^2=1=B$$

22.- Probar que

$$sen^6\alpha+\cos^6\alpha-2sen^4\alpha-\cos^4\alpha+sen^2\alpha=0$$

$$sen^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(sen^4\alpha-sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=$$
$$=sen^4\alpha-sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$

Luego:

$$A = sen^4\alpha - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2sen^4\alpha - \cos^4\alpha + sen^2\alpha =$$

$$A = -sen^4\alpha - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + sen^2\alpha = sen^2\alpha\left(1 - sen^2\alpha\right) - sen^2\cos^2\alpha =$$

$$A = sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 0 = B$$

23.- Probar que $\left(1 - \cos\alpha \cdot \cos\beta\right)^2 - sen^2\alpha \cdot sen^2\beta = \left(\cos\alpha - \cos\beta\right)^2$

$$A = \left(1 - \cos\alpha \cdot \cos\beta\right)^2 - sen^2\alpha \cdot sen^2\beta =$$

$$A = 1 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \left[\left(1 - \cos^2\alpha\right)\left(1 - \cos^2\beta\right)\right] =$$

$$A = 1 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - 1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta =$$

$$A = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\beta = \left(\cos\alpha - \cos\beta\right)^2 = B$$

24.- Probar que $tg\alpha + ctg\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{sen^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$

$$A = tg\alpha + ctg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{sen\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{sen^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}} = \frac{1}{sen\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$A = B$$

25.- Probar que $\dfrac{\left(2\cos^2\alpha - 1\right) \cdot \sec\alpha}{\cos\alpha - sen\alpha} = 1 + tg\alpha.$

Recordar que $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$.

$$A=\frac{\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cdot\sec\alpha}{\cos\alpha-sen\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\cdot\sec\alpha}{\cos\alpha-sen\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+sen\alpha}{\cos\alpha+sen\alpha}=$$

$$A=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}\cdot\sec\alpha\left(\cos\alpha+sen\alpha\right)=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\left(\cos\alpha+sen\alpha\right)}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$A=1+tg\alpha=B$$

26.- Probar que $\sec^3\alpha\cdot\left(sen\alpha-sen^3\alpha\right)=tg\alpha$

$$A=\sec^3\alpha\left(sen\alpha-sen^3\alpha\right)=\sec^3\alpha\cdot sen\alpha\left(1-sen^2\alpha\right)=\sec^3\alpha\cdot sen\alpha\cdot\cos^3\alpha=$$

$$A=\sec\alpha\cdot sen\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha=B$$

27.- Probar que $\left(1+tg\alpha\right)^2+\left(1-tg\alpha\right)^2=2\sec^2\alpha$

Recordar

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$$

Luego:

$$A=\left(1+tg\alpha\right)^2+\left(1-tg\alpha\right)^2=1+2tg\alpha+tg^2\alpha+1-2tg\alpha+tg^2\alpha=$$

$$A=2+tg^2\alpha=2\left(1+tg^2\alpha\right)=2\cdot\sec^2\alpha=B$$

28.- Probar que $\cos^2\alpha+tg^2\alpha=\sec^2\alpha-sen^2\alpha.$

Recordar que

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha\Rightarrow tg^2\alpha=\sec^2\alpha-1$$

$$A=\cos^2\alpha+tg^2\alpha=\cos^2\alpha+\sec^2\alpha-1=\sec^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=\sec^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$A=B$$

29.- Probar que $\sec^2\alpha\cdot\csc^2\alpha = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2$

$$A = \sec^2\alpha\cdot\csc^2\alpha = \left(1+tg^2\alpha\right)\cdot\left(1+ctg^2\alpha\right) = 1 + ctg^2\alpha + tg^2\alpha + 1 =$$
$$A = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2 = B$$

30.- Probar que $\left(tg\alpha - sen\alpha\right)^2 + \left(1-\cos\alpha\right)^2 = \left(\sec\alpha - 1\right)^2$

Recordar que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$$A = \left(tg\alpha - sen\alpha\right)^2 + \left(1-\cos\alpha\right)^2 =$$
$$A = tg^2\alpha - 2tg\alpha\cdot sen\alpha + sen^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha =$$
$$A = \left(tg^2\alpha + 1\right) + \left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2tg\alpha\cdot sen\alpha - 2\cos\alpha =$$
$$A = \sec^2\alpha + 1 - 2\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot sen\alpha - 2\cos\alpha = \sec^2\alpha + 1 - 2\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha} - 2\cos\alpha =$$
$$A = \sec^2\alpha + 1 - 2\left(\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sec^2\alpha - 2\sec\alpha + 1 = \left(\sec\alpha - 1\right)^2 = B$$

31.- Probar que $\left(ctg\alpha - 1\right)^2 = \csc\alpha\cdot\left(\csc\alpha - 2\cos\alpha\right)$.

$$A = \left(ctg\alpha - 1\right)^2 = ctg^2\alpha - 2ctg\alpha + 1 = \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} - 2\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} + 1 =$$
$$A = \frac{\cos^2\alpha - 2\cdot\cos\alpha\cdot sen\alpha + sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{\left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2\cos\alpha\cdot sen\alpha}{sen^2\alpha} =$$
$$A = \frac{1 - 2\cos\alpha\cdot sen\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} - 2\frac{\cos\alpha\cdot sen\alpha}{sen^2\alpha} = \csc^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot \csc\alpha =$$
$$A = \csc\alpha\left(\csc\alpha - 2\cos\alpha\right) = B$$

32.- Probar que $\left(2\sec\alpha - tg\alpha\right)^2 - \left(\sec\alpha - 2tg\alpha\right)^2 = 3$

Recordar que $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$

$$A=\left(2\sec\alpha-tg\alpha\right)^2-\left(\sec\alpha-2tg\alpha\right)^2=$$
$$A=4\sec^2\alpha-4\sec\alpha\cdot tg\alpha+tg^2\alpha-\left(\sec^2\alpha-4\sec\alpha\cdot tg\alpha+4tg^2\alpha\right)=$$
$$A=4\sec^2\alpha-4sen\alpha+tg^2\alpha-\sec^2\alpha+4sen\alpha-4tg^2\alpha=$$
$$A=3\left(\sec^2\alpha-tg^2\alpha\right)=3\left(tg^2\alpha+1-tg^2\alpha\right)=3=B$$

33.- Probar que $\dfrac{sen\alpha-\csc\alpha}{\cos\alpha-\sec\alpha}=ctg^3\alpha$

$$A=\frac{sen\alpha-\csc\alpha}{\cos\alpha-\sec\alpha}=\frac{sen\alpha-\dfrac{1}{sen\alpha}}{\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{sen^2\alpha-1}{sen\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\left(sen^2\alpha-1\right)}{sen\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)}=$$
$$A=\frac{\cos\alpha\left(-\cos^2\alpha\right)}{sen\alpha\left(-sen^2\alpha\right)}=ctg^3\alpha=B$$

34.- Probar que $\dfrac{1}{\sec\alpha-tg\alpha}=\sec\alpha+tg\alpha$

$$A=\frac{1}{\sec\alpha-tg\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-tg\alpha}\cdot\frac{\left(\sec\alpha+tg\alpha\right)}{\left(\sec\alpha+tg\alpha\right)}=\frac{\left(\sec\alpha+tg\alpha\right)}{\sec^2\alpha-tg^2\alpha}=$$
$$A=\frac{\left(\sec\alpha+tg\alpha\right)}{\sec^2\alpha-\left(\sec^2\alpha-1\right)}=\sec\alpha+tg\alpha=B$$

35.- Probar que $\left(1+tg\alpha+\sec\alpha\right)\cdot\left(1+tg\alpha-\sec\alpha\right)=2tg\alpha$

$$A=\left(1+tg\alpha+\sec\alpha\right)\cdot\left(1+tg\alpha-\sec\alpha\right)=\left(1+tg\alpha\right)^2-\sec^2\alpha=$$

$$A=1+2tg\alpha+tg^2\alpha-\sec^2\alpha=\left(1+tg^2\alpha\right)-\sec^2\alpha+2tg\alpha=2tg\alpha=B$$

36.- Probar que $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=tg\alpha\cdot tg\beta$

$$A=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{sen\beta}}=\frac{\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\beta+sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot sen\beta+\cos\beta\cdot sen\alpha}{sen\alpha\cdot sen\beta}}=$$

$$A=\frac{sen\alpha\cdot sen\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=tg\alpha\cdot tg\beta=B$$

37.- Probar que $\left(3sen\alpha-4sen^3\alpha\right)^2+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)^2=1$

$$A=\left(3sen\alpha-4sen^3\alpha\right)^2;B=\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)^2;C=1\Rightarrow A+B=C$$

$$A=\left(3sen\alpha-4sen^3\alpha\right)^2=sen^2\alpha\cdot\left(3-4sen^2\alpha\right)^2=sen^2\alpha\cdot\left[3-4\left(1-\cos^2\alpha\right)\right]^2=$$

$$A=sen^2\alpha\cdot\left[-1+4\cos^2\alpha\right]^2=sen^2\alpha\cdot\left(1-8\cos^2\alpha+16\cos^4\alpha\right)=$$

$$A=sen^2\alpha-8sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+16sen^2\alpha\cdot\cos^4\alpha$$

$$B=\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)^2=\cos^2\alpha\cdot\left(4\cos^2\alpha-3\right)^2=\cos^2\alpha\cdot\left[4\left(1-sen^2\alpha\right)-3\right]^2=$$

$$B=\cos^2\alpha\cdot\left[1-4sen^2\alpha\right]^2=\cos^2\alpha\cdot\left(1-8sen^2\alpha+16sen^4\alpha\right)=$$

$$B=\cos^2\alpha-8\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha+16\cos^2\alpha\cdot sen^4\alpha$$

$$A+B=\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-16sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+16sen^2\alpha\cdot\cos^4\alpha+16\cos^2\alpha\cdot sen^4\alpha=$$

$$A+B=1-16sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+16sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$

$$A+B=1-16sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+16sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1=C$$

$$A+B=C$$

38.- $\sec^4\alpha - \sec^2\alpha = tg^4\alpha + tg^2\alpha$

$$A = \sec^4\alpha - \sec^2\alpha = \left(1+tg^2\alpha\right)^2 - \left(1+tg^2\alpha\right) =$$
$$A = 1 + 2tg^2\alpha + tg^4\alpha - 1 - tg^2\alpha = tg^4\alpha + tg^2\alpha = B$$

39.- Probar que $\left(1 - sen\alpha - \cos\alpha\right)^2 \cdot \left(1 + sen\alpha + \cos\alpha\right)^2 = 4sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$$A = \left(1 - sen\alpha - \cos\alpha\right)^2 \cdot \left(1 + sen\alpha + \cos\alpha\right)^2 =$$
$$A = \left\{\left[1 - \left(sen\alpha + \cos\alpha\right)\right]\cdot\left[1 + \left(sen\alpha + \cos\alpha\right)\right]\right\}^2 =$$
$$A = \left[1 - \left(sen\alpha + \cos\alpha\right)^2\right]^2 = 1 - 2\left(sen\alpha + \cos\alpha\right)^2 + \left(sen\alpha + \cos\alpha\right)^4 =$$

Ahora:
$$\left(sen\alpha + \cos\alpha\right)^2 = sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha = 1 + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\left(sen\alpha + \cos\alpha\right)^4 = \left(1 + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha\right)^2 = 1 + 4sen\alpha\cdot\cos\alpha + 4sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

Luego:

$$A = 1 - 2\left(1 + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha\right) + \left(1 + 4sen\alpha\cdot\cos\alpha + 4sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right) =$$
$$A = 1 - 2 - 4sen\alpha\cdot\cos\alpha + 1 + 4sen\alpha\cdot\cos\alpha + 4sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$
$$A = 4sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = B$$

40.- Probar que

$$\cos\alpha\cdot\left(2 + tg\alpha\right)\cdot\left(1 + 2tg\alpha\right) = 2\sec\alpha + 5sen\alpha$$

$$A = \cos\alpha\cdot\left(2 + tg\alpha\right)\cdot\left(1 + 2tg\alpha\right) = \cos\alpha\cdot\left(2 + \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(1 + 2\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$
$$A = \cos\alpha\cdot\left(\frac{2\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\cos\alpha + 2sen\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$
$$A = \frac{2\cos^2\alpha + 4sen\alpha\cdot\cos\alpha + sen\alpha\cdot\cos\alpha + 2sen^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$A=\frac{2\left(\cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)}{\cos\alpha}+\frac{5\left(sen\alpha\cdot\cos\alpha\right)}{\cos\alpha}=2\sec\alpha+5sen\alpha=B$$

41.- Probar que

$$\left(sen\alpha+\cos\alpha\right)^3-\left(sen\alpha-\cos\alpha\right)^3=sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(4sen\alpha+2\csc\alpha)$$

$$A=\left(sen\alpha+\cos\alpha\right)^3=sen^3\alpha+3sen^2\alpha\cdot\cos\alpha+3sen\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^3\alpha$$

$$B=\left(sen\alpha-\cos\alpha\right)^3=sen^3\alpha-3sen^2\alpha\cdot\cos\alpha+3sen\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^3\alpha$$

$$A-B=6sen^2\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^3\alpha=sen\alpha\cdot\cos\alpha\left(6sen\alpha+\frac{2\cos^2\alpha}{sen\alpha}\right)=$$

$$A-B=sen\alpha\cdot\cos\alpha\left(6sen\alpha+\frac{2\left(1-sen^2\alpha\right)}{sen\alpha}\right)=sen\alpha\cdot\cos\alpha\left(4sen\alpha+2\csc\alpha\right)$$

42.- Probar que $\left(4\cos^2\alpha-1\right)^2\cdot tg^2\alpha+\left(3-4\cos^2\alpha\right)^2=\sec^2\alpha$

$$A=\left(16\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\left(9-24\cos^2\alpha+16\cos^4\alpha\right)=$$

$$A=16\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha-8sen^2\alpha+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+9-24\cos^2\alpha+16\cos^4\alpha=$$

$$A=16\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)-8\left(1-\cos^2\alpha\right)+\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+9-24\cos^2\alpha+16\cos^4\alpha=$$

$$A=16\cos^2\alpha-16\cos^4\alpha-8+8\cos^2\alpha+\sec^2\alpha-1+9-24\cos^2\alpha+16\cos^4\alpha=\sec^2\alpha$$

43.- Probar que $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha+\cos\beta}-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha-\cos\beta}=\frac{\cos\beta}{sen\beta+\cos\alpha}-\frac{\cos\beta}{sen\beta-\cos\alpha}$

$$A=\frac{\cos\alpha\left(sen\alpha-\cos\beta\right)-\cos\alpha\left(sen\alpha+\cos\beta\right)}{sen^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$A=\frac{\cos\alpha\cdot sen\alpha-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\alpha-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{sen^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$A=\frac{-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{sen^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$A=\frac{-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{1-\cos^2\alpha-1+sen^2\beta}=\frac{-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{sen^2\beta-\cos^2\alpha}$$

$$B=\frac{\cos\beta\left(sen\beta-\cos\alpha\right)-\cos\beta\left(sen\beta+\cos\alpha\right)}{sen^2\beta-\cos^2\alpha}=$$

$$B=\frac{\cos\beta\cdot sen\beta-\cos\beta\cdot\cos\alpha-\cos\beta\cdot sen\beta-\cos\beta\cdot\cos\alpha}{sen^2\beta-\cos^2\alpha}=$$

$$B=\frac{-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{sen^2\beta-\cos^2\alpha}$$

$$A=B$$

44.- Probar que $\dfrac{tg\alpha}{tg\alpha-tg\beta}+\dfrac{ctg\alpha}{ctg\alpha-ctg\beta}=1$

$$A=\frac{tg\alpha\left(ctg\alpha-ctg\beta\right)+ctg\alpha\left(tg\alpha-tg\beta\right)}{\left(tg\alpha-tg\beta\right)\cdot\left(ctg\alpha-ctg\beta\right)}=\frac{1-tg\alpha\cdot ctg\beta+1-ctg\alpha\cdot tg\beta}{1-tg\alpha\cdot ctg\beta-ctg\alpha\cdot tg\beta+1}=$$

$$A=\frac{2-\left(tg\alpha\cdot ctg\beta+ctg\alpha\cdot tg\beta\right)}{2-\left(tg\alpha\cdot ctg\beta+ctg\alpha\cdot tg\beta\right)}=1=B$$

45.- Probar que $\dfrac{2tg^2\alpha\cdot\sec^2\beta+2\sec^2\beta}{tg^2\beta\cdot\sec^2\alpha+\sec^2\alpha}=$

$$A=\frac{2\sec^2\beta\left(tg^2\alpha+1\right)}{tg^2\beta\cdot\sec^2\alpha+\sec^2\alpha}=\frac{2\left(tg^2\beta+1\right)\cdot\sec^2\alpha}{tg^2\beta\cdot\sec^2\alpha+\sec^2\alpha}=$$

$$A=2\cdot\frac{tg^2\beta\cdot\sec^2\alpha+\sec^2\alpha}{tg^2\beta\cdot\sec^2\alpha+\sec^2\alpha}=2=B$$

46.- Probar que $\dfrac{sen\alpha-sen\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{sen\alpha+sen\beta}=0$

$$\frac{\left(sen\alpha-sen\beta\right)\cdot\left(sen\alpha+sen\beta\right)+\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\cdot\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}{\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\cdot\left(sen\alpha+sen\beta\right)}=$$

$$\frac{sen^2\alpha-sen^2\beta+\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\cdot\left(sen\alpha+sen\beta\right)}=\frac{\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\left(sen^2\beta+\cos^2\beta\right)}{\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\cdot\left(sen\alpha+sen\beta\right)}=$$

$$=\frac{1-1}{\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\cdot\left(sen\alpha+sen\beta\right)}=0$$

47.- Probar que $\sec^2\alpha-\sec^2\alpha=\dfrac{ctg^2\beta-ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha\cdot ctg^2\beta}$

$$\frac{\dfrac{1}{tg^2\beta}-\dfrac{1}{tg^2\alpha}}{\dfrac{1}{tg^2\alpha\cdot tg^2\beta}}=\frac{\dfrac{tg^2\alpha-tg^{2\beta}}{tg^2\alpha\cdot tg^2\beta}}{\dfrac{1}{tg^2\alpha\cdot tg^2\beta}}=$$

$$tg^2\alpha-tg^2\beta=\sec^2\alpha-1-\sec^2\beta+1=\sec^2\alpha-\sec^2\beta$$

48.- Probar que $3\cdot\left(sen^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(sen^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1$

$$A = 3\cdot\left[\left(1-\cos^2\alpha\right)^2+\cos^4\alpha\right]-2\cdot\left[\left(sen^2\alpha\right)^3+\cos^6\alpha\right]=$$

$$A = 3\cdot\left[1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\cos^4\alpha\right]-2\cdot\left[\left(1-\cos^2\alpha\right)^3+\cos^6\alpha\right]=$$

$$A = \left[3-6\cos^2\alpha+6\cos^4\alpha\right]-2\cdot\left[1-3\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha-\cos^6\alpha+\cos^6\alpha\right]=3-2=1$$

49.- Probar que $\dfrac{sen\alpha+tg\alpha}{ctg\alpha+\csc\alpha}=sen\alpha\cdot\cos\alpha$

$$A=\frac{sen\alpha+\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}+\dfrac{1}{sen\alpha}}=\frac{\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha+sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+1}{sen\alpha}}=\frac{\dfrac{sen\alpha\left(\cos\alpha+1\right)}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+1}{sen\alpha}}=\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$A=sen\alpha\cdot\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=sen\alpha\cdot tg\alpha$$

50.- Probar que $\left(3-4sen^2\right)\cdot\left(1-3tg^2\alpha\right)=\left(3-tg^2\alpha\right)\cdot\left(4\cos^2\alpha-3\right)$

$$A=\left(3-4sen^2\alpha\right)\cdot\left(1-3tg^2\alpha\right)=\left(3-4sen^2\alpha\right)\cdot\left(1-3\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$A=3-9\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}-4sen^2\alpha+12\cdot\frac{sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$A=\frac{3\cos^2\alpha-9sen^2\alpha-4sen^2\alpha\cos^2\alpha+12sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$A=\frac{3\left(1-sen^2\alpha\right)-9sen^2\alpha-4sen^2\alpha\left(1-sen^2\alpha\right)+12sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$A=\frac{3-3sen^2\alpha-9sen^2\alpha-4sen^2\alpha+4sen^4\alpha+12sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$A=\frac{3-16sen^2\alpha+16sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$B=\left(3-tg^2\alpha\right)\cdot\left(4\cos^2\alpha-3\right)=\left(3-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(4\cos^2\alpha-3\right)=$$

$$B=\left(3-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2}\right)\cdot\left(4-4sen^2\alpha-3\right)=\left(3-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\left(1-4sen^2\alpha\right)=$$

$$B=3-12sen^2\alpha-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+4\frac{sen^4\alpha}{\cos^2\eta}=\frac{3\cos^2\alpha-12sen^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-sen^2\alpha+4sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$B=\frac{3\left(1-sen^2\alpha\right)-12sen^2\alpha\cdot\left(1-sen^2\alpha\right)-sen^2\alpha+4sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$B=\frac{3-16sen^2\alpha+16sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$A=B$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #22.
Tema: Identidades trigonométricas - C.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

	$\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$	$(\pi\pm\alpha)$	$\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$	$(-\alpha)$	$(2\pi k\pm\alpha)$ $(k\in Z)$
cos	$\mp sen\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm sen\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
sen	$\cos\alpha$	$\mp sen\alpha$	$-\cos\alpha$	$-sen\alpha$	$\pm sen\alpha$
tg	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$\pm tg\alpha$
ctg	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$\pm ctg\alpha$
csc	$\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$	$\pm\csc\alpha$
sec	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$

1.- $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2.- $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha$
$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha$

3.- $sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$

4.- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$

5.- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha$

PREGUNTAS:

1.- Probar que $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)} = \dfrac{sen(\alpha-\pi)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{sen(\pi+\alpha)}$

$$A = \frac{(\cos\alpha)\cdot(sen\alpha)}{-\cos\alpha} = -sen\alpha$$

$$B = \frac{(-sen\alpha)\cdot(-sen\alpha)}{(-sen\alpha)} = -sen\alpha$$

$$A = B$$

2.- Probar que $\dfrac{3ctg(\pi-\alpha)}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)} - \dfrac{5tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)} = 2$

$$A = \frac{3ctg(\pi-\alpha)}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-3ctg\alpha}{ctg\alpha} = -3$$

$$B = \frac{5tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)} = \frac{5ctg\alpha}{-ctg\alpha} = -5$$

$$A - B = 3-(-5) = 2$$

3.- Probar que $\dfrac{sen\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot tg(\pi-\beta)}{tg(\pi+\beta)\cdot\cos(\pi-\alpha)} = \dfrac{ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos(\pi-\beta)\cdot tg(\pi+\alpha)}$

$$A=\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot tg\left(\pi-\beta\right)}{tg\left(\pi+\beta\right)\cos\left(\pi-\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha\cdot\left(-tg\beta\right)}{tg\beta\cdot\left(-\cos\alpha\right)}=-1$$

$$B=\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\pi-\beta\right)\cdot tg\left(\pi+\alpha\right)}=\frac{tg\alpha\cdot\cos\beta}{-\cos\beta\cdot tg\alpha}=-1$$

$$A=B$$

4.- Probar que $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sen\left(\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\pi-\alpha\right)$

$$A=sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sen\left(\pi-\alpha\right)=\cos\alpha\cdot sen\alpha$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\pi-\alpha\right)=\left(-sen\alpha\right)\cdot\left(-\cos\alpha\right)=sen\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$A=B$$

5.- Probar que $sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot -sen\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=sen\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$$A=sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-sen\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha$$

$$B=sen\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha$$

$$A=B$$

6.- Probar que $tg\left(180^{o}-\alpha\right)\cdot ctg\left(180^{o}+\alpha\right)=tg\left(270^{o}-\alpha\right)\cdot ctg\left(90^{o}+\alpha\right)$

$$A=tg\left(180^{o}-\alpha\right)\cdot ctg\left(180^{o}+\alpha\right)=tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

$$B=tg\left(270^{o}-\alpha\right)\cdot ctg\left(90^{o}+\alpha\right)=\left(-ctg\alpha\right)\cdot\left(-tg\alpha\right)=1$$

$$A=B$$

7.- Probar que $\csc\left(90^{o}+\alpha\right)\cdot\csc\left(180^{o}-\alpha\right)=\sec\left(90^{o}+\alpha\right)\cdot\sec\left(180^{o}-\alpha\right)$

$$A=\csc\left(90^{o}+\alpha\right)\cdot\csc\left(180^{o}-\alpha\right)=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

$$B=\sec\left(90^{o}+\alpha\right)\cdot\sec\left(180^{o}-\alpha\right)=\left(-\csc\alpha\right)\cdot\left(-\sec\alpha\right)=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

$$A=B$$

8.- Probar que $\dfrac{ctg\left(180^{o}-\alpha\right)}{ctg\left(270^{o}-\alpha\right)}=\dfrac{tg\left(90^{o}+\alpha\right)}{tg\left(180^{o}-\alpha\right)}$

$$A=\frac{ctg\left(180^{o}-\alpha\right)}{ctg\left(270^{o}-\alpha\right)}=\frac{-ctg\alpha}{tg\alpha}=-\frac{1}{tg^{2}\alpha}$$

$$B=\frac{tg\left(90^{o}-\alpha\right)}{tg\left(180^{o}-\alpha\right)}=\frac{ctg\alpha}{-tg\alpha}=-\frac{1}{tg^{2}\alpha}$$

$$A=B$$

9.- Probar que $\dfrac{tg\left(\pi-\alpha\right)}{tg\left(\pi+\alpha\right)}-\dfrac{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-2$

$$A=\frac{tg\left(\pi-\alpha\right)}{tg\left(\pi+\alpha\right)}=\frac{-tg\alpha}{tg\alpha}=-1$$

$$B=\frac{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-ctg\alpha}{-ctg\alpha}=1$$

$$A-B=\left(-1\right)-\left(1\right)=-2$$

10.- Probar que $\dfrac{9}{\cos(2\pi-\alpha)}+\dfrac{8}{sen\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{1}{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

$$A=\frac{9}{\cos(2\pi-\alpha)}=\frac{9}{\cos\alpha}$$

$$B=\frac{8}{sen\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{8}{-\cos\alpha}=-\frac{8}{\cos\alpha}$$

$$C=\frac{1}{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$A-B=\frac{9}{\cos\alpha}-\frac{8}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$A-B=C$$

11.- Probar que $\dfrac{4ctg(\pi+\alpha)+tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}=\dfrac{3tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$

$$A=\frac{4ctg(\pi+\alpha)+tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}=\frac{4ctg\alpha+(-ctg\alpha)}{-ctg\alpha}=-4+1=-3$$

$$B=\frac{3tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{3ctg\alpha}{-ctg\alpha}=-3$$

$$A=B$$

12.- Probar que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)+sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sen(\pi+\alpha)=0$

$$A=\left(-sen\alpha\right)\cdot\left(-\cos\alpha\right)=sen\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$B=\left(\cos\alpha\right)\cdot\left(-sen\alpha\right)=-sen\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$A+B=0$$

13.- Probar que

$$\cos\left(\pi-\alpha\right)\cdot sen\left(\pi+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1$$

$$A=\left(-\cos\alpha\right)\cdot\left(-sen\alpha\right)\cdot\left(ctg\alpha\right)=\cos^2\alpha$$

$$B=\left(sen\alpha\right)\cdot\left(-sen\alpha\right)=-sen^2\alpha$$

$$A-B=sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

14.- Probar que

$$tg^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos^2\left(3\pi+\alpha\right)=ctg^2\left(2\pi-\alpha\right)-sen^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=\left(\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}$$

$$B=ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{sen^2\alpha}=$$

$$B=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}$$

$$A=B$$

15.- Probar que

$$\cos^2\left(4\pi-\alpha\right)\cdot\left(2+tg^2\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=2$$

$$A=\cos^2(4\pi-\alpha)\cdot\left(2+tg^2\alpha\right)=\cos^2\alpha\cdot\left(1+1+tg^2\alpha\right)=$$

$$A=\cos^2\alpha\left[1+\left(1+tg^2\alpha\right)\right]=\cos^2\alpha\cdot\left(1+\sec^2\alpha\right)=\cos^2\alpha+1$$

$$B=\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=sen^2\alpha$$

$$A+B=\cos^2\alpha+1+sen^2\alpha=\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+1=2$$

16.- Probar que

$$ctg^2\left(180^o-\alpha\right)-1+sen^2\left(180^o+\alpha\right)=\cos^2(-\alpha)\cdot tg^2\left(90^o+\alpha\right)$$

$$A=ctg^2\left(180^o-\alpha\right)-1=ctg^2\alpha-1$$

$$B=sen^2\left(180^o+\alpha\right)=sen^2\alpha$$

$$C=\cos^2(-\alpha)\cdot tg^2\left(90^o+\alpha\right)=\cos^2\alpha\cdot ctg^2\alpha=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}$$

$$A+B=ctg^2\alpha-1+sen^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}-\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+sen^2\alpha=$$

$$A+B=\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha}{sen^2\alpha}=$$

$$A+B=\frac{\cos^2\alpha\left(1-sen^2\alpha\right)}{sen^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}$$

$$A+B=C=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}$$

17.- Probar que

$$\frac{\cos(-\alpha)+\cos^3(\pi+\alpha)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$A=\frac{\cos(-\alpha)+\cos^3(\pi+\alpha)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{sen^3\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)}{sen\alpha\cdot sen^2\alpha}=$$

$$A=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\cdot\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}=ctg\alpha$$

$$B=tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$$

$$A=B$$

18.- Probar que

$$\frac{\cos(-\alpha)+tg(90^o-\alpha)}{sen(90^o+\alpha)+tg(90^o+\alpha)}=\frac{ctg(90^o-\alpha)+\sec(-\alpha)}{tg(180^o+\alpha)-\sec(360^o-\alpha)}$$

$$A=\frac{\cos(-\alpha)+tg(90^o-\alpha)}{sen(90^o+\alpha)+tg(90^o+\alpha)}=\frac{\cos\alpha+ctg\alpha}{\cos\alpha-ctg\alpha}=$$

$$A=\frac{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}{\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha\cdot sen\alpha+\cos\varepsilon}{sen\alpha}}{\frac{\cos\alpha\cdot sen\alpha-\cos\alpha}{sen\alpha}}=\frac{\cos\alpha\cdot(sen\alpha+1)}{\cos\alpha\cdot(sen\alpha-1)}=$$

$$A=\frac{sen\alpha+1}{sen\alpha-1}$$

$$B=\frac{ctg(90^o-\alpha)+\sec(-\alpha)}{tg(180^o+\alpha)-\sec(360^o-\alpha)}=\frac{tg\alpha+\sec\alpha}{tg\alpha-\sec\alpha}=$$

$$B=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{sen\alpha+1}{\cos\alpha}}{\frac{sen\alpha-1}{\cos\alpha}}=\frac{sen\alpha+1}{sen\alpha-1}$$

$$A=B$$

19.- Probar que

$$\frac{\cos(180^o-\alpha)\cdot sen(180^o+\alpha)}{ctg(270^o-\alpha)}-\frac{\cos(90^o-\alpha)}{\sec(90^o+\alpha)}=1$$

$$A=\frac{\cos(180^o-\alpha)\cdot sen(180^o+\alpha)}{ctg(270^o-\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)\cdot(-sen\alpha)}{tg\alpha}=$$

$$A=\frac{\cos\alpha\cdot sen\alpha}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}=\cos^2\alpha$$

$$B=\frac{\cos(90^o-\alpha)}{\sec(90^o+\alpha)}=\frac{sen\alpha}{-\csc\alpha}=-\frac{sen\alpha}{\frac{1}{sen\alpha}}=-sen^2\alpha$$

$$A-B=\cos^2\alpha-\left(-sen^2\alpha\right)=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$$

20.- Probar que

$$sen(180^o-\alpha)\cdot\sec(-\alpha)+sen(90^o+\alpha)\cdot\csc\alpha=\sec(-\alpha)\cdot\csc\alpha$$

$$A=sen(180^o-\alpha)\cdot\sec(-\alpha)+sen(90^o+\alpha)\cdot\csc\alpha=$$

$$A=sen\alpha\cdot\sec\alpha+\cos\alpha\cdot\csc\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=$$

$$A=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$B=\sec(-\alpha)\cdot\csc\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha=\frac{1}{\cos\alpha\cdot sen\alpha}$$

$$A=B$$

21.- Probar que

$$1-2sen^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{tg\left(\pi+\alpha\right)+ctg\left(2\pi-\alpha\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow$$

$$\left(-\cos 2\alpha\right)=1-2\cos^2\alpha$$

$$A=1-2sen^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1-2\cos^2\alpha=\left(-2\cos 2\alpha\right)$$

$$B=\frac{tg\left(\pi+\alpha\right)+ctg\left(\left(2\pi-\alpha\right)\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{tg\alpha-ctg\alpha}{tg\alpha-\left(-ctg\alpha\right)}=\frac{tg\alpha-ctg\alpha}{tg\alpha+ctg\alpha}$$

$$B=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}=\frac{\frac{sen^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot sen\alpha}}{\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot sen\alpha}}=\left(-\cos 2\alpha\right)$$

$$A=B$$

22.- Probar que $\dfrac{sen\left(\pi-\alpha\right)-ctg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{1+sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(-\alpha\right)+tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

$$A=\frac{sen\left(\pi-\alpha\right)-ctg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{sen\alpha-\left(-tg\alpha\right)}{1-\left(-sen\alpha\right)}=\frac{sen\alpha+tg\alpha}{1+sen\alpha}=$$

$$A=\frac{sen\alpha+\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{1+sen\alpha}=\frac{\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha+sen\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\left(1+\cos\alpha\right)}{\left(1+sen\alpha\right)}=$$

$$A = tg\alpha \cdot \frac{(1+\cos\alpha)}{(1+sen\alpha)}$$

$$B = \frac{1+sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(-\alpha)+tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha + ctg\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}} =$$

$$B = \frac{1+\cos\alpha}{\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha\cdot(sen\alpha+1)} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)}{(1+sen\alpha)} =$$

$$B = tg\alpha \cdot \frac{(1+\cos\alpha)}{(1+sen\alpha)}$$

$$A = B$$

23.- Probar que $\frac{\cos^2(-\alpha)}{1+sen(-\alpha)} = 1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

$$A = \frac{\cos^2(-\alpha)}{1+sen(-\alpha)} = \frac{(\cos\alpha)^2}{1-sen\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1-sen\alpha}\cdot\frac{(1+sen\alpha)}{(1+sen\alpha)} =$$

$$A = \frac{\cos^2\alpha\cdot(1+sen\alpha)}{1-sen^2\alpha} = 1+sen\alpha$$

$$B = 1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = 1+sen\alpha$$

$$A = B$$

24.- Probar que

$$sen^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right) = 2sen^2\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)-1$$

$$A = sen^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right) = (-\cos\alpha)^4 - (sen\alpha)^4 = \cos^4\alpha - sen^4\alpha =$$

$$A=\left(\cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)\cdot\left(\cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=$$

$$A=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1$$

$$=2sen^2\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)-1=2\cdot\left(\cos\alpha\right)^2-1=2\cos^2\alpha-1$$

$$A=B$$

25.- Probar que

$$\frac{ctg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)-ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{tg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+tg\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}=tg\left(\pi-\alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)$$

$$A=\frac{ctg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)-ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{tg\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+tg\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{-tg\alpha-tg\beta}{-ctg\alpha-ctg\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=$$

$$A=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}+\frac{\cos\beta}{sen\beta}}=\frac{\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{sen\beta\cdot\cos\alpha+\cos\beta\cdot sen\alpha}{sen\alpha\cdot sen\beta}}=\frac{sen\alpha\cdot sen\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=$$

$$A=tg\alpha\cdot tg\beta$$

$$B=tg\left(\pi-\beta\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\left(-tg\alpha\right)\cdot\left(-tg\beta\right)=tg\alpha\cdot tg\beta$$

$$A=B$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #23.
Tema: Sistemas de ecuaciones lineales.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto de cruce de las líneas rectas que son la representación gráfica de las ecuaciones dadas.

PREGUNTAS:

1.- Resolver el sistema por el método de sustitución y por el método de reducción:

(a) Por método de sustitución:

$$2x+4y=11$$
$$-5x+3y=5$$

De la primera ecuación: $x=\dfrac{11-4y}{2}$, sustituyendo ahora este valor en la segunda ecuación;

$$-5\cdot\left(\frac{11-4y}{2}\right)+3y=5\Rightarrow -5\cdot(11-4y)+6y=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -55+20y+6y=10\Rightarrow 26y=65\Rightarrow y=\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación:

$$2x+4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=11\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(b) Por método de reducción:

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2 y sumando los resultados se tiene:

$$5\cdot(2x+4y=11)\Rightarrow 10x+20y=55$$
$$2\cdot(-5x+3y=5)\Rightarrow -10x+6y=10$$
$$\sum = 26y=65\Rightarrow y=\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación:

$$2x+4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=11\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$R\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

2.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3x+2y=1$$
$$5x-3y=8$$

Se utilizará el método de reducción:

Se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 y luego se suman los resultados:

$$3\cdot(3x+2y=1)\Rightarrow 9x+6y=3$$
$$2\cdot(5x-3y=8)\Rightarrow 10x-6y=16$$
$$\sum=19x=19\Rightarrow x=1$$

Sustituyendo el valor de $x=1$ en la primera ecuación:

$$3\cdot(1)+2y=1\Rightarrow 2y=-2\Rightarrow y=-1$$

$$R\Rightarrow(1,-1)$$

3.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$2x+3y=6$$
$$4x+6y=7$$

Se utilizará el método de reducción:

Se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por (-1) y luego se suman los resultados:

$$(2)\cdot(2x+3y=6)\Rightarrow 4x+6y=12$$
$$(-1)\cdot(4x+6y=7)\Rightarrow -4x-6y=-7$$
$$\sum=0=5$$

El resultado final no tiene sentido e indica que las dos rectas son paralelas y por lo tanto no tienen solución común, o sea no tienen punto de intersección.

4.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas por sustitución:

$$x+2y=8$$
$$3x+4y=20$$

De la primera ecuación:

$x+2y=8 \Rightarrow x=8-2y$, sustituyendo ahora este valor de $\boldsymbol{x}$ en la segunda ecuación:

$$3x+4y=20 \Rightarrow 3\cdot(8-2y)+4y=20 \Rightarrow 24-6y+4y=20$$
$$\Rightarrow -2y=-4 \Rightarrow y=2$$

Sustituyendo este valor de y =2 en la primera ecuación $(x+2y=8)$:

$$x+2\cdot(2)=8 \Rightarrow x+4=8 \Rightarrow x=4.$$

$$R \Rightarrow (4,2)$$

5.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$2x+3y=6$$
$$y=\left(-\frac{2}{3}\right)x+2.$$

Es obvio que se debe intentar primero por el método de sustitución a partir de la primera ecuación:

$$2x+3y=6 \Rightarrow 2x+3\cdot\left(-\frac{2}{3}x+2\right)=6 \Rightarrow 2x-2x+6=6$$

Aparentemente no se ha llegado a ningún lado. Sin embargo, este resultado significa que cualquier resultado encontrado en una de las ecuaciones es válido para la otra y que si trabajamos un poco con la segunda ecuación y simplificamos se encontrará que las dos líneas son la misma, son idénticas, o sea son la misma línea recta $2x+3y=6$. Todos los puntos de la línea son solución.

6.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$3x+5y=-9$$
$$x-5y=17$$

Utilizar el método de reducción:

Sumando las dos ecuaciones: $4x = 8 \Rightarrow x = 2$, sustituyendo este valor de x = 2 en la segunda ecuación: $2-5y=17 \Rightarrow -5y=15 \Rightarrow y=-3.$ $R \Rightarrow (2,-3).$

7.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$4x+2y=-1$$
$$5x-3y=7$$

Se utilizará el método de reducción:

Se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 4 y entonces se resta el segundo resultado del primer resultado:

$$5\cdot(4x+2y=-1) \Rightarrow 20x+10y=-5$$
$$4\cdot(5x-3y=7) \Rightarrow 20-12y=28$$
$$RESTA \Rightarrow 22y=-33 \Leftrightarrow y=-\frac{33}{22}=-\frac{3}{2}$$

Ahora, se introduce este valor encontrado de y en la primera ecuación original $(4x+2y=-1)$:

$$4x+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \Rightarrow 4x-3=-1 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$R\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

8.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$x+2y=8$$
$$x-2y=2$$

Se utilizará el método de reducción: Sumando las dos ecuaciones se encuentra:

$2x = 10 \Rightarrow x = 5.$ Sustituyendo este valor de x 0 5 en la primera ecuación:
$x + 2y = 8 \Rightarrow 5 + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}.$

$$R \Rightarrow \left(5, \frac{3}{2}\right)$$

9.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3x - 2y = 9$$
$$4y - 6x = -18$$

Estados dos ecuaciones son dependientes ya que si multiplicamos la primera ecuación por (-2), obtenemos:

$(-2) \cdot (3x - 2y = 9) \Rightarrow -6x + 4y = -18 \Rightarrow 4y - 6x = -18$, o sea, que el resultado es exactamente igual a la segunda ecuación. Las soluciones son por tanto múltiples, cada punto de la línea recta es una solución.

10.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$3x + 5y = 9$$
$$7x - 10y = 8$$

Se utilizará el método de reducción:

Se multiplica la primera ecuación por 2 y el resultado se suma con la segunda ecuación:

$$2 \cdot (3x + 5y = 9) \Rightarrow 6x + 10y = 18$$
$$7x - 10y = 8$$
$$\sum = 13x = 26 \Rightarrow x = 2$$

Sustituyendo ahora este valor de x = 2 en la primera ecuación:

$$3x + 5y = 9 \Rightarrow 3 \cdot (2) + 5y = 9 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$$

$$R \Rightarrow \left(2, \frac{3}{5}\right)$$

11.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$3x + 2y = 23$$
$$x + y = 9$$

Multiplicando la segunda ecuación por (-3) y el resultado de ese producto se le suma a la primera ecuación:

$$-3x - 3y = -27$$
$$3x + 2y = 23$$
$$\sum = -y = -4 \Rightarrow y = 4.$$

Introduciendo el valor de $y = 4$ en la primera ecuación:

$$3x + 2 \cdot (4) = 23 \Rightarrow 3x = 23 - 8 = 15 \Rightarrow x = 5.$$

Solución: $(5, 4)$

12.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$4x + 3y = 23$$
$$2x - 5y = 31$$

Se multiplica la segunda ecuación por (-2) y se obtiene: $-4x + 10y = -62.$ Se suma este resultado a la primera ecuación:

$$4x + 3y = 23$$
$$+(-4x + 10y = -62)$$
$$\sum = 13y = -39 \Rightarrow y = -3$$

Se introduce este valor $y = -3$ en la primera ecuación:
$$4x + 3 \cdot (-3) = 23 \Rightarrow 4x = 23 + 9 = 32 \Rightarrow x = 8.$$

La solución es: $(8,-3)$

13.- Encontrar el punto de intersección de las dos líneas rectas siguientes:

$$\begin{array}{l} x+y=3 \\ 3x-2y=14 \end{array}$$

Se multiplica la primera ecuación por (2) y el resultado se le suma a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{l} 2x+2y=6 \\ 3x-2y=14 \\ \sum=5x=20 \Rightarrow x=4 \end{array}$$

Se sustituye ahora el valor $x=4$ en la primera ecuación:

$$4+y=3 \Rightarrow y=3-4 \Rightarrow y=-1$$

La solución es $(4,-1)$

14.- Encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{array}{l} 2x-12y=3 \\ 3x+9y=4 \end{array}$$

Se multiplica la primera ecuación por (3) y la segunda ecuación por (-2) y los dos resultados se suman:

$$\begin{array}{l} 6x-36y=9 \\ -6x-18y=-8 \\ \sum=-54y=1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{54}. \end{array}$$

Se sustituye ahora el valor $y=-\dfrac{1}{54}$ en la segunda ecuación $(3x+9y=4)$:

$$3x+9\cdot\left(-\frac{1}{54}\right)=4 \Rightarrow 3x-\frac{1}{6}=4 \Rightarrow 18x-1=24 \Rightarrow 18x=25 \Rightarrow x=\frac{25}{18}$$

La solución es $\left(\frac{25}{18}, -\frac{1}{54}\right)$

15.- Obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$3x+4y=-6$$
$$5x+6y=-8$$

Se multiplica la primera ecuación por (3) y la segunda ecuación por (-2) y se suman los resultados:

$$9x+12y=-18$$
$$-10x-12y=16$$
$$\sum=-x=-2 \Rightarrow x=2$$

Luego, se introduce este valor $x=2$ en la primera ecuación $(3x+4y=-6)$:

$$3\cdot(2)+4y=-6 \Rightarrow 6+4y=-6 \Rightarrow 4y=-12 \Rightarrow y=-3$$

La solución es $(2,-3)$

16.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$2x-y-4z=3$$
$$-x+3y+z=10$$
$$3x+2y-2z=2$$

Para come4nzar, para resolver este sistema de tres ecuaciones con tres variables desconocidas (*incógnitas*), se debe reducir el problema a uno de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Entonces, se debe multiplicar la primera ecuación por (-1), obteniendo el siguiente resultado:

$$-2x+y+4z=-3$$

Ahora, sumando este resultado con la segunda $(-x+3y+z=10)$ y tercera ecuación $(3x+2y-2z=2)$, se obtiene:

$$-2x+y+4x=-3$$
$$-x+3y+z=10$$
$$3x+2y-2z=2$$
$$\sum=6y+3z=9$$

Multiplicando la segunda ecuación $(-x+3y+x=10)$ por (3):
$-3x+9y+3z=30$

Sumando este resultado con la tercera ecuación:

$$-3x+9y+3z=30$$
$$3x+2y-2z=2$$
$$\sum=11y+z=32$$

Multiplicando este resultado por (-3): $-33y-3z=-96$ (octava ecuación)

Sumando la quinta ecuación $(6y+3z=9)$ con la octava ecuación:

$$-33y-3z=-96$$
$$6y+3z=9$$
$$\sum=-27y=-81 \Rightarrow y=3$$

Ahora se introduce $y=3$ en la quinta ecuación $6y+3z=9$:

$$6(3)+3z=9 \Rightarrow 3z=9-18=-9 \Rightarrow z=-3.$$

Introduciendo los valores encontrados de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ en la primera ecuación:

$$2x-(3)-4\cdot(-3)=3 \Rightarrow 2x-3+12=3 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3.$$

17.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$2x-y+4z=1$$
$$x-y+z=0$$
$$x+y+z=1$$

Se multiplica la primera ecuación por (-1) y al resultado se le suma la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
&-2x+y-4z=-1\\
&x-y+z=0 \qquad \text{(Quinta ecuación)}\\
&\sum=-x-3z=-1
\end{aligned}
$$

Ahora se suman la segunda y la tercera ecuación:

$$
\begin{aligned}
&x-y+z=0\\
&x+y+z=1 \qquad \text{(sexta ecuación)}\\
&\sum=2x+2z=1
\end{aligned}
$$

Se multiplica ahora la quinta ecuación $(-x-3z=-1)$ por (2) y se le suma la sexta ecuación $(2x+2z=1)$:

$$
\begin{aligned}
&-2x-6z=-2\\
&2x+2z=1\\
&\sum=-4z=-1 \Rightarrow z=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Se introduce ahora el valor de $z=\frac{1}{4}$ en la quinta ecuación:

$$-x-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=-1 \Rightarrow -x-\frac{3}{4}=-1 \Rightarrow -x=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

Finalmente, introduciendo los valores $x=\frac{1}{4}; z=\frac{1}{4}$ en la segunda ecuación $x-y+z=0$, tenemos:

$$\frac{1}{4}-y+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow -y=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

18.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
&2x+3y+4z=-8\\
&x+y-2z=-5\\
&7x-2y+5z=4
\end{aligned}
$$

Multiplicando la segunda ecuación por (-2) y sumando el resultado a la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=-8 \\ -2x-2y+4z&=10 \end{aligned} \qquad \sum = y = 2$$

Haciendo la sustitución de $y=2$ en la segunda y en la tercera ecuación, tenemos:

$$x+2-2z=-5 \Rightarrow x-2z=-7$$
$$7x-4+5z=4 \Rightarrow 7x+5z=8$$

Multiplicando la ecuación de arriba por (5) y la de abajo por (2) y sumando los resultados:

$$5x-10z=-35$$
$$14x+10z=16$$
$$\sum = 19x=-19 \Rightarrow x=-1$$

Luego, se sustituyen los valores $x=-1$ en la ecuación colocada más arriba $(x-2z=-7)$, se tiene:

$$-1-2z=-7 \Rightarrow -2z=-6 \Rightarrow z=3$$

19.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x+4y-z=-2$$
$$2x-3y+z=4$$
$$x-6y+2z=5$$

Sumando la primera y la segunda ecuación se obtiene una cuarta ecuación sin $\boldsymbol{z}$:

$$3x+4y-z=-2$$
$$2x-3y+z=4$$
$$\sum = 5x+y=2$$

Similarmente, multiplicando la segunda ecuación por (-2) y sumando el resultado a la tercera ecuación, se encuentra una quinta ecuación sin $\boldsymbol{y}$ ni $\boldsymbol{z}$:

$$-4x+6y-2z=-8$$
$$x-6y+2z=5$$
$$\sum=-3x=-3\Rightarrow x=1$$

Sustituyendo ahora el valor $x=1$ en la ecuación $(5x+y=2)$, se obtiene:

$$5\cdot(1)++y=2\Rightarrow y=2-5=-3\Rightarrow y=-3.$$

Sustituyendo ahora los valores $x=1; y=-3$ en la primera ecuación $(3x+4y-z=-2)$, se obtiene:

$$3\cdot(1)+4\cdot(-3)-z=-2\Rightarrow -z=-2+9=-7\Rightarrow z=-7.$$

20.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$5x+y-z=9$$
$$3x+2y+2z=17$$
$$x+2y+3z=20$$

Se empezará por multiplicar por (-1) la segunda ecuación y el resultado se le suma a la primera ecuación, encontrando la cuarta ecuación:

$$5x+y-z=9$$
$$-3x-y-2z=-17$$
$$\sum=2x-3z=-8$$

Se multiplica ahora la segunda ecuación por (2) y se obtiene unas quinta ecuación:
$$6x+2y+4z=34$$

Se resta ahora la tercera de la quinta ecuación para obtener una sexta ecuación sin $\boldsymbol{y}$:

$$6x+2y+4z=34$$
$$-(x+2y+3z=20)$$
$$(-)=5x+z=14\Rightarrow z=14-5x$$

Sustituyendo el valor $z=14-5x$ en la cuarta ecuación $(2x-3z=-8)$, se obtiene:

$$2x-3\cdot(14-5x)=-8\Rightarrow 2x-42+15x=-8\Rightarrow 17x=34\Rightarrow x=2.$$

Sustituyendo el valor $x = 2$ en la séptima ecuación $(z = 14 - 5x)$, se obtiene:

$z = 14 - 5 \cdot (2) = 4 \Rightarrow z = 4$

Sustituyendo ahora los valores $x = 2; z = 4$ en la primera ecuación $(5x + y - z = 9)$, se obtiene:
$5 \cdot (2) + y - 1 \cdot (4) = 9 \Rightarrow y = 9 - 6 = 3 \Rightarrow y = 3.$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #24.

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales resueltos por método de Cramer.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar las coordenadas del punto de cruce de las líneas rectas que son la representación gráfica de las ecuaciones dadas.

El método de ***Cramer***, utilizando determinantes, hace posible la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Se explicará cobn un ejemplo usando coeficentes literales:

Ejemplo: Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$a_1x+b_1y=c_1$$

$$a_2x+b_2y=c_2$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{c_1\cdot b_2-c_2\cdot b_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}=$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$$

PREGUNTAS:

1.- Resolver por Cramer, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}2x+4y&=11\\ -5x+3y&=5\end{aligned}$$

Entonces, la solución por determinantes será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}11 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ -5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{11\cdot 3-5\cdot 4}{2\cdot 3-4\cdot(-5)}=\frac{33--20}{6+20}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 11\\ -5 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ -5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{2\cdot 5-11\cdot(-5)}{26}=\frac{10+55}{26}=\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$$

2.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}3x-6y-2&=0\\ 4x+7y+3&=0\end{aligned}$$

Para resolver el sistema, lo reescribimos asÍ:

$$\begin{aligned}3x-6y&=2\\ 4x+7y&=-3\end{aligned}$$

Entonces:

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-6) = 21 + 24 = 45$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-3) \cdot (-6) = 14 - 18 = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = -9 - 8 = -17$$

Luego:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(-4)}{45}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(-17)}{45}$$

3.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x - 5y = 4$$
$$7x + 4y = 25$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot (-5) = 12 + 35 = 47$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -5\\ 25 & 4\end{vmatrix}}{47}=\frac{16+125}{47}=\frac{141}{47}=3$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 25\end{vmatrix}}{47}=\frac{75-28}{47}=\frac{47}{47}=1$$

4.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}2x+3y&=4\\ 3x-2y&=-2\end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-13$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-8+6}{-13}=\frac{-2}{-13}=\frac{2}{13}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-4-12}{-13}=\frac{-16}{-13}=\frac{16}{13}$$

5.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}3x+2y&=12\\ 4x-3y&=-1\end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-9-8=-17$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}12 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}}{-17}=\frac{-36+2}{-17}=\frac{-34}{-17}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 12\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{-17}=\frac{-3-48}{-17}=\frac{-51}{-17}=3$$

6.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$2x+3y-6=0$
$2y=3x$

Las ecuaciones se deben reescribir de la siguiente manera:

$2x+3y=6$
$3x-2y=0$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-9=-13$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}6 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-12}{-13}=\frac{12}{13}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 0\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-18}{-13}=\frac{18}{13}$$

7.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$3x-4y=-6$
$2x+5y=19$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}}{23} = \frac{-30 + 76}{23} = \frac{46}{23} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{23} = \frac{57 + 12}{23} = \frac{69}{23} = 3$$

9.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + y - 2z = -3$$
$$2x + 7y + 3z = 9$$
$$4x - 3y - z = 7$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = [-21 + 12 + 12] - [-56 - 2 - 27] = 3 + 85 = 88$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{88} = \frac{176}{88} = 2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3 & -2\\ 2 & 9 & 3\\ 4 & 7 & -1\end{vmatrix}}{88}=\frac{-88}{88}=-1$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -3\\ 2 & 7 & 9\\ 4 & -3 & 7\end{vmatrix}}{88}=\frac{352}{88}=4$$

10.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x-y-2z=4$$
$$x+3y-z=-1$$
$$x+2y+3z=5$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=28$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}}{28}=\frac{80}{28}=\frac{20}{7}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}}{28}=\frac{-24}{28}=-\frac{6}{7}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{28} = \frac{36}{28} = \frac{9}{7}$$

11.- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= -3 \\ x + y + z &= 6 \\ x - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{15}{15} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{15} = \frac{45}{15} = 3$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #25.

Tema: Sistemas de ecuaciones cuadráticas.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver el sistema siguiente:

$$xy = 24$$
$$y - 2x + 2 = 0$$

Este sistema se resuelve fácilmente por sustitución:

De la segunda ecuación, se tiene:

$$y - 2x + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x - 2$$

Sustituyendo ahora este valor encontrado de y en la primera ecuación:

$$xy = 24 \Rightarrow x \cdot (2x - 2) = 24 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 3) \cdot (x - 4).$$

Solución de la ecuación cuadrática: $$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Ahora se debe encontrar el valor de y para cada caso:

Para x= -3: $xy = 24 \Rightarrow (-3)\cdot y = 24 \Rightarrow y_1 = -8$

Para x = 4 $xy = 24 \Rightarrow (4)\cdot y = 24 \Rightarrow y_2 = 6$

2.- Resolver el sistema de ecuaciones :

$$2x^2 - 3xy - 4y^2 + x + y - 1 = 0$$
$$2x - y = 3$$

Este sistema de ecuaciones consiste de una ecuación lineal y otra ecuación cuadrática.

Entonces, se despejará una de las incógnitas de la ecuación lineal y se introducirá en la ecuación cuadrática, a saber:

$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3.$

Luego:

$$2x^2 - 3x\cdot(2x-3) - 4\cdot(2x-3)^2 + x + (2x-3) - 1 = 0$$
$$= 2x^2 - 3x\cdot(2x-3) - 4\cdot(4x^2 - 12x + 9) + x + 2x - 3 - 1 = 0$$
$$= 2x^2 - 6x^2 + 9x - 16x^2 + 48x - 36 + x + 2x - 3 - 1 = 0$$
$$= -20x^2 + 60x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-1) = 0$$

Raíces de la ecuación cuadrática:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$

Para encontrar los valores de ***y*** correspondiente a cada uno de las raíces de la ecuación cuadrática, se sustituyen los valores de ***x*** en la ecuación lineal:

Para $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot (2) - 3 = 4 - 3 = 1$

Para $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot (1) - 3 = -1$

3.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$2x + y = 10$$

$2x + y = 10 \Rightarrow 10 - 2x$

Luego: $x^2 + (10 - 2x)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 25$

$$\Rightarrow 5x^2 - 40x + 100 = 25 \Rightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 5) \cdot (x - 3) = 0$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 3$$

Sustituyendo los valores encontrados de $\boldsymbol{x}$ en la ecuación lineal, se tiene:

Para $x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 10 - 2 \cdot (5) = 0$

Para $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 10 - 2 \cdot (3) = 4$

4.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + 2y^2 = 54$$
$$2x - y = -9$$

$$2x - y = -9 \Rightarrow y = 2x + 9$$

$$x^2+2\cdot(2x+9)^2=54$$
$$x^2+2\cdot\left(4x^2+36x+81\right)=54\Rightarrow x^2+8x^2+72x+162=54\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2+72x+162=54\Rightarrow 9x^2+72x+108=0$$
$$\Rightarrow x^2+8x+12=0\Rightarrow (x+6)\cdot(x+2)=0$$

Raíces de la ecuación cuadrática:

$$x_1=-6$$
$$x_2=-2$$

Luego:

Para $x_1=-6\Rightarrow y_1=2\cdot(-6)+9=-12+9=-3$

Para $x_2=-2\Rightarrow y_2=2\cdot(-2)+9=5$

5.- Resolver el sistema de ecuaciones siguientes:

$$2x+y=1$$
$$3x^2-xy-y^2=-2$$

:

Se empieza con la ecuación lineal:

$$2x+y=1\Rightarrow y=1-2x$$

Luego:

$$3x^2-x\cdot(1-2x)-(1-2x)^2=-2\Rightarrow 3x^2-x+2x^2-\left(1-4x+4x^2\right)=-2$$
$$\Rightarrow 3x^2-x+2x^2-1+4x-4x^2=-2\Rightarrow x^2+3x-1=-2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+3x+1=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ahora, conocidos los valores de $\boldsymbol{x}$ se utiliza la ecuación lineal para calcular los correspondientes valores de $\boldsymbol{y}$:

Para $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow y_1 = 1 + 3 - \sqrt{5} = 4 - \sqrt{5}$

Para $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_2 = 1 - 2\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = 1 + 3 + \sqrt{5} = 4 + \sqrt{5}$

6.- Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$xy = 2$$
$$15x^2 + 4y^2 = 64$$

Empezar por la primera ecuación:

$$xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

Ahora, se reemplaza $y = \frac{2}{x}$ en la segunda ecuación:

$$15x^2 + 4\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 64 \Rightarrow 15x^4 + 16 = 64x^2 \Rightarrow 15x^4 - 64x^2 + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \left(x^2 - 4\right) \cdot \left(15x^2 - 4\right) = 0$$

Luego, se analiza la situación cuando $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

$$15x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{15}} = \pm\frac{2}{\sqrt{15}} = \pm\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

Para obtener el valor de y se reemplaza x por los 4 valores encontrados:

Entonces, se toma la ecuación $y = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{\pm 2} = \pm 1$

Luego, $y=\frac{2}{x}\Rightarrow y=\frac{2}{\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}}=\frac{2\cdot(15)}{2\sqrt{15}}=\pm\sqrt{15}$

Entonces, el conjunto de soluciones simultáneas es el siguiente:

$$\left\{(2,1),(-2,-1),\left(2\frac{\sqrt{15}}{15},\sqrt{15}\right),\left(-2\frac{\sqrt{15}}{15},-\sqrt{15}\right)\right\}$$

7.- Encontrar el conjunto de soluciones simultáneas de las siguientes ecuaciones:

$$4x^2-2xy-y^2=-5$$
$$y+1=-x^2-x$$

Trabajando con la segunda ecuación:

$$y+1=-x^2-x\Rightarrow y=-x^2-x-1$$

Introduciendo este valor encontrado de ***y*** en la primera ecuación:

$$4x^2-2x\cdot\left(-x^2-x-1\right)-\left(-x^2-x-1\right)^2=-5$$
$$4x^2+2x^3+2x^2+2x-\left(-x^2-x-1\right)\cdot\left(-x^2-x-1\right)=-5$$
$$4x^2+2x^3+2x^2+2x-\left(x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1\right)=-5$$
$$-x^4+3x^2-1=-5$$
$$-x^4+3x^2+4=0$$

Factorizando la ecuación a la cuarta potencia: $\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+1\right)=0$

Entonces, las raíces serán:

$$x_1=2;x_2=-2;x_3=i;x_4=-i$$

Introduciendo estos valores de cada una de estas raíces en la segunda ecuación se encuentran los correspondientes valores de ***y:***

Para $x_1 = 2$

$$y_1 = -(2)^2 - (2) - 1 = -4 - 2 - 1 = -7$$

Para $x_2 = -2$

$$y_2 = -(-2)^2 - (-2) - 1 = -4 + 2 - 1 = -3$$

Para $x_3 = i$

$$y_3 = -(i)^2 - (i) - 1 = -(-1) - i - 1 = -i$$

Para $x_4 = -i$

$$y_4 = -(-i)^2 - (-i) - 1 = 1 + i - 1 = i$$

El conjunto de soluciones será:

$$\{(2,-7),(-2,-3),(i,-i),(-i,i)\}$$

8.- Resolver el sistema siguiente:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 - 1 = y$$

Trabajando con la segunda ecuación:

$$x^2 - 1 = y \Rightarrow x^2 = y + 1$$

Se introduce ahora el valor encontrado de x^2 en la primera ecuación:

$$(y+1) + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y \cdot (y+1) = 0$$

Luego, $y_1 = 0; y_2 = -1.$

Conocidas las $\boldsymbol{y}$, ahora se encuentran los correspondientes valores de $\boldsymbol{x}$:

Para $y_1 = 0$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (0)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1.$$

Para $y_2 = -1$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_3 = x_4 = 0.$$

La solución del sistema es el conjunto de valores:

$$\{(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$$

9.- Encontrar la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$x^2 + 4xy - 7x = 12$$
$$3x^2 - 4xy + 4x = 15$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores:

$$\sum = 4x^2 - 3x = 27 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 27 = 0$$

Se aplica ahora la resolverte para una ecuación de segundo grado, a saber:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot(4)\cdot(-27)}}{2\cdot(4)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+432}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{8} =$$

$$x = \frac{3 \pm 21}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{3+21}{8} = 3; x_2 = \frac{3-21}{8} = -\frac{9}{4}$$

Conocidos estos valores de $\boldsymbol{x}$, se utilizará la primera ecuación para encontrar los correspondientes valores de $\boldsymbol{y}$:

Para $x_1 = 3$

$$x^2 + 4xy - 7x = 12 \Rightarrow (3)^2 + 4 \cdot (3) \cdot y - 7 \cdot (3) = 12 \Rightarrow 12y = 24 \Rightarrow y_1 = 2$$

Para $x_2 = -\frac{9}{4}$

$$x^2 + 4xy - 7x = 12 \Rightarrow \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) y - 7 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = 12$$

$$\Rightarrow \frac{81}{16} - 9y + \frac{63}{4} = 12 \Rightarrow 81 - 144y + 252 = 192 \Rightarrow -144y = -141$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-141}{-144} = \frac{47}{48}$$

Entonces, la solución del sistema es el conjunto siguiente:

$$\left\{ (3,2), \left(-\frac{9}{4}, \frac{47}{48} \right) \right\}$$

10.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x^2 - 2y^2 - 6x = -23$$
$$x^2 + y^2 - 4x = 13$$

Se ve que se puede eliminar y^2 multiplicando la segunda ecuación por (2) y sumando el resultado a la primera ecuación:

$$3x^2 - 2y^2 - 6x = -23$$
$$2x^2 + 2y^2 - 8x = 26$$
$$\sum = 5x^2 - 14x = 3 \Rightarrow 5x^2 - 14x - 3 = 0$$

Ahora, se aplica la resolverte de la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot(5)\cdot(-3)}}{2\cdot(5)}=\frac{14\pm\sqrt{196+60}}{10}\Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{256}}{10}$$

$$x_1=\frac{14+16}{10}=3;\, x_2=\frac{14-16}{10}=-\frac{1}{5}$$

Conocidos estos valores de ***x***, se utilizará la segunda ecuación para encontrar los correspondientes valores de ***y***:

Para $x_1=3$

$$x^2+y^2-4x=13\Rightarrow(3)^2+y^2-4\cdot(3)=13\Rightarrow y^2=16\Rightarrow y=\pm4$$
$$y_1=4;\, y_2=-4$$

Para $x_2=-\frac{1}{5}$

$$x^2+y^2-4x=13\Rightarrow\left(-\frac{1}{5}\right)^2+y^2-4\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=13\Rightarrow\frac{1}{25}+y^2+\frac{4}{5}=13$$
$$\Rightarrow1+25y^2+20=325\Rightarrow25y^2=304\Rightarrow y^2=\frac{304}{25}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{304}{25}}$$

$$y=\pm\frac{4\sqrt{19}}{5}\Rightarrow y_3=\frac{4\sqrt{19}}{5};\, y_4=-\frac{4\sqrt{19}}{5}$$

La solución del sistema es el conjunto de valores:

$$\left\{(3,4),(3,-4),\left(-\frac{1}{5},\frac{4\sqrt{19}}{5}\right),\left(-\frac{1}{5},-\frac{4\sqrt{19}}{5}\right)\right\}$$

11.- Resolver las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$2x^2+2y^2=21$$
$$3x^2-4y^2=23$$

Se multiplicará la primera ecuación por (4) y la segunda ecuación por (3) y luego se suman los dos resultados:

$$8x^2+12y^2=84$$
$$9x^2-12y^2=69$$
$$\sum=17x^2=153\Rightarrow x^2=\frac{153}{17}=9\Rightarrow x=\pm 3\Rightarrow x_1=3;x_2=-3$$

Conocidos estos valores de ***x*** se utilizará la primera ecuación para encontrar los correspondientes valores de ***y***:

Para $x_1=3$

$$2x^2+3y^2=21\Rightarrow 2\cdot(3)^2+3y^2=21\Rightarrow 18+3y^2=21\Rightarrow 3y^2=3$$
$$\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1\Rightarrow y_1=1;y_2=-1$$

Para $x_2=-3$

$$2x^2+3y^2=21\Rightarrow 2\cdot(-3)^2+3y^2=21\Rightarrow y=\pm 1$$
$$y_3=1;y_4=-1$$

La solución del sistema es entonces el conjunto de valores:

$$\{(3,1),(3,-1),(-3,1),(-3,-1)\}$$

12.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3x^2+3y^2+x-2y=20$$
$$2x^2+2y^2+5x+3y=9$$

Se multiplicará la primera ecuación por (2) y la segunda ecuación por (3) y restando los resultados, se tiene:

$$6x^2+6y^2+2x-4y=40$$
$$6x^2+6y^2+15x+9y=27$$
$$(-)=-13x-13y=13 \Rightarrow y=-x-1$$

Conocido este valor de ***y*** en función de ***x*** se pasa a introducir este valor en la segunda ecuación:

$$2x^2+2y^2+5x+3y=9 \Rightarrow 2x^2+2\cdot(-x-1)^2+5x+3\cdot(-x-1)=9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2+2\cdot(x^2+2x+1)+5x-3x-3=9 \Rightarrow 4x^2+6x-10=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+3x-5=0 \Rightarrow (x-1)(2x+5)=0$$

$$x_1=1; x_2=-\frac{5}{2}$$

Conocidos los valores de x se utilizará la ecuación lineal encontrada para calcular los correspondientes valores de y:

Para $x=1$

$$y=-x-1 \Rightarrow y_1=-(1)-1=-2$$

Para $x=-\frac{5}{2}$

$$y=-x-1 \Rightarrow y_2=-\left(-\frac{5}{2}\right)-1=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$$

La solución del sistema de ecuaciones será entonces:

$$\left\{(1,-2),\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$$

13.- Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x^2+y^2=5$$
$$x^2-xy+y^2=7$$

Restando la segunda ecuación de la primera ecuación, se tiene:

$$x^2+y^2=5$$
$$x^2-xy+y^2=7$$
$$(-)=xy=-2 \Rightarrow y=-\frac{2}{x}$$

Introduciendo ahora este valor de ***y*** en la primera ecuación:

$$x^2+y^2=5 \Rightarrow x^2+\left(\frac{-2}{x}\right)^2=5 \Rightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=5 \Rightarrow x^4+4=5x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-4\right)=0$$

Las raíces son:

$$x_1=1; x_2=-1; x_3=2; x_4=-2$$

Se introducen estos valores conocidos de x en la ecuación $y=-\frac{2}{x}$ para encontrar los correspondientes valores de y:

$$y_1 = -2; y_2 = 2; y_3 = -1; y_4 = 1$$

La solución del sistema será entonces el conjunto de valores:

$$\{(1,-2),(-1,2),(2,-1),(-2,1)\}$$

14.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$$
$$xy - y^2 = 2$$

Para resolver este problema se comienza por factorizar la primera ecuación:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \Rightarrow (x - 3y)\cdot(x - 2y) = 0$$

Entonces, resolveremos dos nuevos sistemas de ecauciones, el primero de los cuales será:

$$xy - y^2 = 2$$
$$x - 3y = 0$$

Se multiplica la segunda ecuación por ***y*** y el resultado se le resta a la primera ecuación:

$$xy - y^2 = 2$$
$$xy - 3y^2 = 0$$
$$(-) = 2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = -1$$

Conocidos estos valores de ***y*** se utiliza la primera ecuación para encontrar los correspondientes valores de ***x***:

Para $y_1 = 1$

$$xy - y^2 = 2 \Rightarrow x\cdot(1) - (1)^2 = 2 \Rightarrow x_1 = 3$$

Para $y_2 = -1$

$$xy - y^2 = 2 \Rightarrow x \cdot (-1) - (-1)^2 = 2 \Rightarrow x_2 = -3$$

Se toma ahora el segundo sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xy - y^2 &= 2 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Se multiplica ahora la segunda ecuación de este nuevo sistema por ***y*** y el resultado se resta de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} &xy - y^2 = 2 \\ &xy - 2y^2 = 0 \\ &(-) = y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_3 = \sqrt{2}; y_4 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conocidos estos valores de ***y*** para este nuevo caso, se utiliza la primera ecuación para conocer los correspondientes valores de ***x***:

Para $y_3 = \sqrt{2}$

$$xy - y^2 = 2 \Rightarrow x \cdot \left(\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow x \cdot \left(\sqrt{2}\right) = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Para $y_4 = -\sqrt{2}$

$$xy - y^2 = 2 \Rightarrow x \cdot \left(-\sqrt{2}\right) - \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow -x \cdot \sqrt{2} = 4 \Rightarrow x_4 = -2\sqrt{2}$$

Entonces, la solución del sistema de ecuaciones es el conjunto de valores:

$$\left\{(3,1), (-3,-1), \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right\}$$

15.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ xy &= 12 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por (2) y restando el resultado obtenido de la primera ecuación, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$2xy = 24$$
$$(-) = x^2 - 2xy + y^2 = 1 \Rightarrow (x-y)^2 = 1 \Rightarrow (x-y) = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Luego, se pueden escribir dos ecuaciones lineales como sigue:

$$x - y = 1$$
$$x - y = -1$$

Esto obliga a resolver dos sistemas de ecuaciones, siendo el primero:

$$xy = 12$$
$$x - y = 1$$

De la segunda ecuación, se tiene:

$$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$$

Introduciendo este valor de $\boldsymbol{x}$ en la primera ecuación:

$$xy = 12 \Rightarrow (1+y)\cdot y = 12 \Rightarrow y + y^2 = 12 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$$
$$\Rightarrow (y+4)\cdot(y-3) = 0 \Rightarrow y_1 = -4; y_2 = 3$$

Conocidos estos valores de $\boldsymbol{y}$, se utilizará la expresión $x = 1 + y$ para poder calcular los correspondientes valores de $\boldsymbol{x}$:

Para $y_1 = -4$

$$x = 1 + y \Rightarrow x = 1 + (-4) = -3 \Rightarrow x_1 = -3$$

Para $y_2 = 3$

$$x = 1 + y \Rightarrow x = 1 + 3 = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

Luego, se considera el segundo sistema de ecuaciones, como sigue:

$$xy = 12$$
$$x - y = -1$$

De la segunda ecuación:

$$x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1$$

Introduciendo este valor encontrado de ***x*** en la primera ecuación:

$$xy = 12 \Rightarrow (y - 1) \cdot y = 12 \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow (y - 4) \cdot (y + 3) = 0$$
$$\Rightarrow y_3 = 4; y_4 = -3$$

Conocidos estos nuevos valores de ***y***, se utiliza la expresión $x = y - 1$ para calcular los correspondientes valores de ***x***:

Para $y_3 = 4$

$$x = y - 1 \Rightarrow x_3 = (4) - 1 = 3 \Rightarrow x_3 = 3$$

Para $y_4 = -3$

$$x = y - 1 \Rightarrow x_4 = (-3) - 1 = -4 \Rightarrow x_4 = -4$$

Entonces, la solución del problema será el conjunto de valores:

$$\{(4,3), (-3,-4), (-4,-3), (3,4)\}$$

16.- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$3x^2+4y^2=8$$
$$x^2-y^2=5$$

En este caso probaremos un nuevo método; para lo cual se harán los siguientes cambios de variables:

$$x^2=u;\, y^2=v$$

Entonces las ecuaciones dadas se convierten en:

$$3u+4v=8$$
$$u-v=5$$

Multiplicando la segunda ecuación por (3) y resultado de la primera ecuación:

$$3u+4v=8$$
$$3u-3v=15$$
$$(-)=7v=-7\Rightarrow v=-1=y^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$
$$\Rightarrow y_1=i;\, y_2=-i$$

Conocidos estos valores de ***y***, se utilizará la segunda ecuación original para calcular los correspondientes valores de ***x***:

Para $y_1=i$

$$x^2-y^2=5\Rightarrow x^2-(i)^2=5\Rightarrow x^2+1=5\Rightarrow x^2=4$$
$$\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow x_1=2;\, x_2=-2$$

Para $y=-i$

$$x^2-y^2=5\Rightarrow x^2-(-i)^2=5\Rightarrow x^2+1=5\Rightarrow x^2=4$$
$$\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow x_3=2;\, x_4=-2$$

Luego, la solución del problema estará dada por el conjunto de valores:

$$\left\{(2,i),(-2,i),(2,-i),(-2,-i)\right\}$$

17.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x^2+3xy=28$$
$$x^2+y^2=20$$

Hagamos $y=mx$ y sustituyamos este valor en ambas ecuaciones:

$$x^2+3mx^2=28\Rightarrow(1+3m)\cdot x^2=28\Rightarrow x^2=\frac{28}{(1+3m)}$$

También:

$$x^2+(mx)^2=20\Rightarrow\left(1+m^2\right)\cdot x^2=20\Rightarrow x^2=\frac{20}{\left(1+m^2\right)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{28}{1+3m}=\frac{20}{1+m^2}\Rightarrow 28\cdot\left(1+m^2\right)=20\cdot(1+3m)\Rightarrow 28m^2-60m+8=0$$
$$\Rightarrow 7m^2-15m+2=0\Rightarrow(7m-1)\cdot(m-2)=0$$
$$\Rightarrow m_1=\frac{1}{7};m_2=2$$

Para $m_1=\frac{1}{7}$

$$x^2=\frac{28}{1+3m}\Rightarrow x^2=\frac{28}{1+3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)}=\frac{28}{\frac{7+3}{7}}=\frac{28\cdot 7}{10}=\frac{196}{10}=\frac{98}{5}$$

$$x=\pm\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\pm\frac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\pm\frac{7\sqrt{10}}{5}\Rightarrow x_1=\frac{7\sqrt{10}}{5};x_2=-\frac{7\sqrt{10}}{5}$$

Conocidos estos valores de ***x***, se utilizará la ecuación $y = mx$ (con $m = \frac{1}{7}$), para calcular los correspondientes valores de ***y***:

Para $x_1 = \frac{7}{5}\sqrt{10}$

$$y = mx = \frac{1}{7}x \Rightarrow y_1 = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{7}{5}\sqrt{10}\right) = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Para $x_2 = -\frac{7}{5}\sqrt{10}$

$$y = mx \Rightarrow y_2 = \left(\frac{1}{7}\right) \cdot x = \left(\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\sqrt{10}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Ahora, para el otro valor de m, o sea $m = 2$

$$x^2 = \frac{28}{1+3m} \Rightarrow x^2 = \frac{28}{1+3\cdot(2)} = \frac{28}{7} = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_3 = 2; x_4 = -2$$

Conocidos estos valores de ***x***, se utilizará la ecuación $y = mx$ (con $m = 2$) para calcular los correspondientes valores de ***y***:

Para $x_3 = 2$

$$y = mx \Rightarrow y = 2x \Rightarrow y_3 = 2 \cdot (2) = 4$$

Para $x_4 = -2$

$$y = mx \Rightarrow y = 2x \Rightarrow y_4 = 2 \cdot (-2) = -4$$

Entonces la solución del problema es el conjunto de valores siguientes:

$$\left\{\left(\frac{7}{5}\sqrt{10},\frac{1}{5}\sqrt{10}\right),\left(-\frac{7}{5}\sqrt{10},-\frac{1}{5}\sqrt{10}\right),(2,4),(-2,-4)\right\}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #26.

Tema: Método de los coeficientes indeterminados (Fracciones parciales).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

El primer paso en la descomposición de una fracción con polinomios en el denominador y en el numerador en fracciones parciales, consiste en la factorización del denominador en factores lineales $(x+a)$ y factores cuadráticos irreducibles (x^2+b). En general, deberán haber tantas fracciones parciales como indique el grado que tenga el polinomio denominador. Existen varios escenarios para combinar los términos lineales y cuadráticos irreducibles como factores.

- Todos los factores pueden ser términos lineales y ninguno de estos términos está elevado a ninguna potencia diferente de 1. Como un ejemplo, considere que el denominador de la fracción original es x^2-2x-3. Este polinomio puede ser factorizado como el producto de $(x+1)\cdot(x-3)$. En este caso, por cada factor se deberá crear una nueva fracción parcial, la cual tendrá una variable en el numerador y el factor lineal en el denominador y luego se suman todas las fracciones parciales.

Ejemplo: $\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}$

Nótese que como el denominador original es de grado 2, se descompone en dos fracciones parciales.

- Todos los factores, menos uno o más, son factores lineales, siendo los no lineales elevados a alguna potencia.

Ejemplo: Considere que el denominador de la fracción original es el siguiente polinomio: x^3+5x^2+7x+3, el cual puede ser factorizado como $(x+1)^2\cdot(x-3)$. En este caso, el factor elevado a la potencia, $(x-r)^n$, corresponde a fracciones múltiples, una por cada potencia, y los denominadores de estas fracciones son meramente son todas las potencias posibles del factor lineal; por lo tanto, la fracción original puede expresarse como:

$$\frac{1}{x^3+5x^2+7x+3}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}$$

Nótese que como el denominador original es de grado 3, es entonces descompuesto en tres fracciones parciales.

- Si uno, o más, de los factores es una cuadrática irreducible, tal como (x^2+1), ésta también corresponde a dos fracciones parciales, pero una de estas fracciones tiene una $\boldsymbol{x}$ en el numerador.

Ejemplo: $\frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x^2+1)}+\frac{Cx}{(x^2+1)}=$

- Si uno, o más, de los factores es una cuadrática irreducible elevada a una potencia, se combinan los procedimientos descritos anteriormente en los dos ejemplos previos. Cada potencia del factor debe ser representada, y, por cada potencia, dos fracciones deben ser incluidas, una de las cuales tiene una $\boldsymbol{x}$ en el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x^2+1)}+\frac{Cx}{(x^2+1)}+\frac{D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex}{(x^2+1)^2}=$$

Nótese que el grado del polinomio denominador original es 5, por lo que debe haber 5 variables y 5 fracciones parciales.

Esto puede reescribirse así:

$$\frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Cx+B}{(x^2+1)}+\frac{Ex+D}{(x^2+1)^2}=$$

En este caso se mantienen las 5 variables, representadas por las letras en mayúscula.

- Si la fracción original es tal que el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual que el grado del polinomio en el denominador, se deberá entonces llevar a cabo la operación de un polinomio entre el otro, por los métodos ya conocidos. Esta división da como resultado otro polinomio más una fracción de polinomios. En la nueva fracción de polinomios el grado del numerador será menor que el grado del denominador.

Para factorizar los polinomios denominadores, es recomendable seguir el método de encontrar las raíces del denominador usando para ello el procedimiento de Ruffini, buscando aquellos valores de la incógnita que hacen el residuo igual a cero.

Una vez que la fracción original ha sido descompuesta en fracciones parciales, se deben encontrar entonces los valores de las incógnitas de los numeradores, expresadas como A, B, C, etc. Esto es hecho, al efectuar la suma algebraica de las fracciones parciales e igualando el resultado a la fracción original, donde ya sabemos que los denominadores son iguales porque el polinomio denominador original fue factorizado; luego, los numeradores deberán necesariamente ser también iguales, y para que ésto se lleve a cabo cada término del numerador original deberá ser igual a cada término del nuevo numerador contentivo de las incógnitas A, B, C, etc. Para ello se igualan los coeficientes de potencias iguales.

Ejemplo:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(-3A+B)}{(x+1)(x-3)}\Rightarrow A+B=0;-3A+B=1\Rightarrow A=-\frac{1}{4};B=\frac{1}{4}$$

PREGUNTAS:

1.- Dados:

$D(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$

$d(x) = x^2 - 2x + 1$

$Q(x) = x^2 + Ax + B$

$R(x) = Cx + D$

Encontrar los valores de A, B, C y D.

Estableceremos la igualdad:

$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + Ax + B) + Cx + D =$$
$$= x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 2x^3 - 2Ax^2 - 2Bx + x^2 + Ax + B + Cx + D =$$
$$= x^4 + x^3(A-2) + x^2(B - 2A + 1) + x(A - 2B + C) + (B + D).$$

Igualando ahora los coeficientes de potencias iguales:

$$A - 2 = -4 \Rightarrow A = -2$$
$$B + 4 + 1 = 3 \Rightarrow B = -2$$
$$A - 2B + C = -2 \Rightarrow C = -4$$
$$B + D = 6 \Rightarrow D = 6 - B = 6 - (-2) = 8$$

2.- Dados:

$D(x) = x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$d(x) = x^2 - 2x - 2$

$Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

$R(x) = Dx + E$

Encontrar los valores de A, B, C, D y E.

Se establece primero la igualdad siguiente:

$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$

$$x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x^3 + Ax^2 + Bx + C)(x^2 + 2x - 2) + (Dx + E)$$
$$= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + 2x^4 + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx - 2x^3 - 2Ax^2 - 2Bx - 2C + Dx + E =$$

$$= x^5 + x^4 (A+2) + x^3 (B+2A-2) + x^2 (C+2B-2A) + x(2C-2B+D) + (-2C+E)$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales:

$$A+2=5 \Rightarrow A=3$$
$$B+2A-2=2 \Rightarrow B=-2$$
$$C+2B-2A=-6 \Rightarrow C=4$$
$$2C-2B+D=9 \Rightarrow D=-3$$
$$-2C+E=-4 \Rightarrow E=4$$

3.- Dados:

$$D(x) = x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x + 2$$
$$d(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$
$$Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$
$$R(x) = Dx^2 + Ex + F$$

Encontrar los valores de A, B, C, D, E y F.

Se establece primero la igualdad siguiente:

$$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$$
$$= (x^3 + Ax^2 + Bx + C)(x^3 + 2x^2 + 4x + 1) + (Dx^2 + Ex + F) =$$
$$= x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + 2x^5 + 2Ax^4 + 2Bx^3 + 2Cx^2 + 4x^4 + 4Ax^3$$
$$+4Bx^2 + 4Cx + x^3 + Ax^2 + Bx + C + Dx^2 + Ex + F =$$

$$D(x) = x^6 + x^5 (A+2) + x^4 (B+2A+4) + x^3 (C+2B+4A+1) +$$
$$+x^2 (2C+4B+A+D) + x(4C+B+E) + (C+F) =$$

Igualando coeficientes de igual potencia:

$$A+2=2 \Rightarrow A=0$$
$$B+2A+4=6 \Rightarrow B=2$$

$$C+2B+4A+1=4 \Rightarrow C=-1$$
$$2C+4B+A+D=7 \Rightarrow D=1$$
$$4C+B+E=-2 \Rightarrow E=0$$
$$C+F=2 \Rightarrow F=-3$$

4.- Dados:

$$D(x)=x^6+x^5+2x^4+2x^3-x^2-x+1$$
$$d(x)=x^3-1$$
$$Q(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$$
$$R(x)=Dx^2+Ex+F$$

Encontrar A, B, C, D, E y F.

En primer lugar se establece la igualdad siguiente:

$$D(x)=Q(x)\cdot d(x)+R(x)$$
$$D(x)=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3-x^3-Ax^2-Bx-C+Dx^2+Ex+F=$$
$$D(x)=x^6+Ax^5+Bx^4+(C-1)x^3+(-A+D)x^2+(-B+E)x+(F-C)=$$

Igualando coeficientes de igual potencia:

$$A=1$$
$$B=2$$
$$C-1=2 \Rightarrow C=3$$
$$-A+D=-1 \Rightarrow D=0$$
$$-B+E=-1 \Rightarrow E=1$$
$$F-C=1 \Rightarrow F=4.$$

5.- Dados:

$$D(x)=3x^6+x^4+7x^3+3$$

$$d(x) = 3x^3 + x + 1$$

$$Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

$$R(x) = Dx^2 + Ex + F$$

En primer lugar, se establece la igualdad siguiente:

$$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$$

Luego:

$$D(x) = 3x^6 + 3Ax^5 + 3Bx^4 + 3Cx^3 + x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + x^3 + Ax^2 +$$

$$+Bx + C + Dx^2 + Ex + F =$$

$$D(x) = 3x^6 + (3A)x^5 + (B+1)x^4 + (3C + A + 1)x^3 + (A + B + D)x^2 +$$

$$+(B + C + E)x + (C + F) =$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales:

$$3A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$3B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$3C + A + 1 = 7 \Rightarrow C = 2$$

$$A + B + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$B + C + E = 0 \Rightarrow E = -2$$

$$C + F = 3 \Rightarrow F = 1$$

6.- Descomponer la siguiente fracción en fracciones parciales:

$\dfrac{x^3 + 6x^2 + 3x + 6}{x^3 + 2x^2} =$ La fracción es impropia.

Como el grado del numerador y el denominador son iguales, se deberá necesariamente empezar por dividir el numerador entre el denominador por los métodos tradicionales:

$$\frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}=1+\frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}$$

Se puede, momentáneamente, olvidar el 1 y trabajar con la nueva fracción para descomponerla en fracciones parciales más simples:

$$\frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}=\frac{4x^2+3x+6}{x^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x+2)}=$$

$$=\frac{Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2}{x^2\cdot(x+2)}=\frac{Ax^2+2A+Bx+2B+Cx^2}{x^2\cdot(x+2)}$$

Entonces, agrupando términos e igualando numeradores, se tiene:

$$4x^2+3x+6=(A+C)x^2+(2A+B)x+2B$$

Si los polinomios son iguales, los coeficientes de los términos de igual potencia son iguales:

$$A+C=4$$

$$2A+B=3$$

$$2B=6\Rightarrow B=3\Rightarrow A=0\Rightarrow C=4$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}=1+\frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}=1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x+2}$$

7.- Descomponer la siguiente fracción en fracciones simples:
n

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}=$$ La fracción es propia, así que se puede proceder a descomponerla.

Factorizando el denominador, se encuentra que:

$$x^3+x^2-2x=x\cdot\left(x^2+x-2\right)=x\cdot\left(x-1\right)\cdot\left(x+2\right).$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x^2+5x-1}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\left(x-1\right)}+\frac{C}{\left(x+2\right)}=$$

$$\frac{A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+B\left(x\right)\left(x+2\right)+C\left(x\right)\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}$$

Luego:

$$2x^2+5x-1=A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+B\left(x\right)\left(x+2\right)+C\left(x\right)\left(x-1\right)=$$

$$2x^2+5x-1=\left(A+B+C\right)x^2+\left(A+2B-C\right)x-2A$$

$$A+B+C=2$$

$$A+2B-C=5$$

$$-2A=-1\Rightarrow B=2\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

La solución es:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2x+4}$$

Un método alternativo muy útil es darle valores a ***x***, preferiblemente que sean raíces del polinomio denominador. En el ejemplo anterior, se podrían dar a ***x*** los valores $x_1=0;x_2=1;x_3=-2.$

Dado la igualdad de los numeradores:

$$2x^2+5x-1=A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-1\right)$$

Sustituyendo ***x*** por $x_1=0,$ se tiene que:

$$-1=A\left(-1\right)\left(2\right)\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo ahora $\boldsymbol{x}$ por $x_2 = 1$, se tiene:

$$2+5-1 = B(1)(1+2) \Rightarrow B = 2$$

Sustituyendo por último $\boldsymbol{x}$ por $x_3 = -2$, tenemos:

$$2(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -3 = C(-2)(-3) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

8.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{3x+6}{x^3+2x^2-3x} =$$

$$\frac{3x+6}{x^3+2x^2-3x} = \frac{3x+6}{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$\frac{3x+6}{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3)+B(x)(x+3)+C(x)(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)} =$$

Entonces:

Para $x_1 = 0$, se tiene:

$$6 = A(-1)(3) \Rightarrow A = -2$$

Para $x_2 = 1$

$$3(1)+6 = 9 = B(1)(4) \Rightarrow B = \frac{9}{4}$$

Para $x_3 = -3$

$$3(-3)+6 = -3 = C(-3)(-3-1) \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$\frac{3x+6}{x^3+2x^2-3x}=\frac{-2}{x}+\frac{\frac{9}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}=-\frac{2}{x}+\frac{9}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+3)}$$

9.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=$$

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\frac{3x^2+2x-2}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$\frac{A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)}=$$

Aplicando la propiedad distributiva y reagrupando términos semejantes, se igualan los numeradores:

$$3x^2+2x-2=(A+B)\cdot x^2+(A-B+C)\cdot x+(A-C)$$

Igualando coeficientes de términos semejantes:

$$A+B=3$$
$$A-B+C=2$$
$$A-C=-2$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas se encuentra que:

$$A=1$$
$$B=2$$
$$C=3$$

El resultado será:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{2x+3}{(x^2+x+1)}$$

10.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{x^2+8}{x^3-7x+3}=$$

Aplicando reiteradamente Ruffini al polinomio denominador, se encuentra que las raíces de (x^3-7x+6) son: $x_1=-1; x_2=2; x_3=-3;$ por lo tanto, puede factorizarse como:

$$x^3-7x+6=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3).$$

Luego:

$$\frac{x^2+8}{x^3-7x+6}=\frac{x^2+8}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}=$$

$$\frac{x^2+8}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}=$$

$$=\frac{A\cdot(x-2)(x+3)+B\cdot(x-1)(x+3)+C\cdot(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Igualando numeradores:

$$x^2+8=A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2)$$

Ahora se le da valores a $\boldsymbol{x}$ iguales a las raíces del denominador:

Para $x_1=1$

$$(1)^2+8=A(-1)(4)\Rightarrow A=-\frac{9}{4}$$

Para $x_2=2$

$$(2)^2+8=B(1)(5)\Rightarrow B=\frac{12}{5}$$

Para $x_3=-3$

$$(-3)^2+8=17=C(-4)(-5)\Rightarrow C=\frac{17}{20}$$

El resultado final será:

$$\frac{x^2+8}{x^3-7x+6}=-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{12}{5(x-2)}+\frac{17}{20(x+3)}$$

11.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{(x^4-1)}=$$

El denominador es un producto notable y puede factorizarse así:

$$x^4-1=(x^2-1)\cdot(x^2+1)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)$$

Entonces:

$$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{(x^4-1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)\cdot(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$$

Se igualan entonces los dos numeradores, se efectúan las operaciones indicadas y se reagrupan los términos semejantes:

$$x^3+5x^2+2x-4=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes:

$$A+B+C=1$$

$$A-B+D=5$$

$$A+B-C=2$$

$$A-B-C=-4$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas, se tiene:

$$A=1; B=\frac{1}{2}; C=-\frac{1}{2}; D=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

El resultado final será:

$$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{\left(x^4-1\right)}=\frac{1}{\left(x-1\right)}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(x+1\right)}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}}{\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(x-1\right)}+\frac{1}{2\left(x+1\right)}+\frac{9-x}{2\left(x^2+1\right)}$$

12.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{x^4+4x}{\left(x-2\right)^2\cdot\left(x^2+4\right)}=$$

Esta fracción puede mostrarse en forma más simple de la siguiente manera:

$$\frac{x^4+4x}{\left(x-2\right)^2\cdot\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{\left(x-2\right)}+\frac{B}{\left(x-2\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)}=$$

$$=\frac{A\left(x-2\right)\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)\left(x-2\right)^2}{\left(x-2\right)^2\cdot\left(x^2+4\right)}=$$

Multiplicando y reagrupando términos semejantes:

$$x^2+4x=(A+C)x^3+(-2A+B-4C+D)x^2+(4A+4C-4D)x+(-8A+4B+4D)=$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes:

$$A+C=0$$
$$-2A+B-4C+D=1$$
$$4A+4C-4D=4$$
$$-8A+4B+4D=0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas, se tiene:

$$A=\frac{1}{4};B=\frac{3}{2};C=-\frac{1}{4};D=-1$$

Luego, el resultado final será:

$$\frac{x^2+4x}{(x-2)^2\cdot(x^2+4)}=\frac{\frac{1}{4}}{(x-2)}+\frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{1}{4}x-1}{(x^2+4)}=$$

$$=\frac{1}{4(x-2)}+\frac{3}{2(x-2)^2}+\frac{x-4}{4(x^2+4)}$$

13.- Descomponer en fracciones simples la siguiente fracción:

$$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{x\cdot(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+4)}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}=$$

$$= \frac{A\left(x^2+4\right)^2 + \left(Bx+C\right)\left(x^2+4\right)\left(x\right) + \left(Dx+E\right)\left(x\right)}{x\left(x^2+4\right)^2} =$$

Igualando numeradores después de haber multiplicado y reagrupado términos semejantes:

$$x^3+5x^2+2x-4 = \left(A+B\right)x^4 + Cx^3 + \left(8A+4B+D\right)x^2 + \left(4C+E\right)x + 16A$$

Igualando coeficientes de términos semejantes:

$$A+B=0$$
$$C=1$$
$$8A+4B+D=5$$
$$4C+E=2$$
$$16A=-4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

$$A=-\frac{1}{4}; B=\frac{1}{4}; C=1; D=6; E=-2$$

El resultado final será:

$$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{x\left(x^2+4\right)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}x+1}{\left(x^2+4\right)} + \frac{6x-2}{\left(x^2+4\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4x} + \frac{x+4}{4\left(x^2+4\right)} + \frac{6x-2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

14.- Transformar la siguiente fracción en varias fracciones simples:

$$\frac{3x^3-12x^2+21x-3}{(x+1)\cdot(x-2)^3}=$$

$$\frac{3x^3-12x^2+21x-3}{(x+1)\cdot(x-2)^3}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}=$$

De donde:

$$3x^3-12x^2+21x-3=A(x-2)^3+B(x+1)(x-2)^2+C(x+1)(x-2)+D(x+1)=$$

Ahora, se le dan valores a $\boldsymbol{x}$. Para $x_1=2$:

$$24-48+42-3=3D\Rightarrow D=\frac{15}{3}=5$$

Para $x_2=-1$:

$$-3-12-21-3=-27A\Rightarrow A=\frac{39}{27}=\frac{13}{9}$$

Las incógnitas restantes pueden encontrarse por comparación de coeficientes de términos semejantes:

$$A+B=3\Rightarrow\frac{13}{9}+B=3\Rightarrow B=3-\frac{13}{9}=\frac{14}{9}$$

Finalmente, haciendo $x_3=0$ en la ecuación que iguala los numeradores, se tiene:

$$-3=-8A+4B-2C+D=-8\left(\frac{13}{9}\right)+4\left(\frac{14}{9}\right)-2C+5\Rightarrow C=\frac{4}{3}$$

Entonces, el resultado final será:

$$\frac{3x^3-12x^2+21x-3}{(x+1)(x-2)^3}=\frac{13}{9(x+1)}+\frac{14}{9(x-2)}+\frac{4}{3(x-2)^2}+\frac{5}{(x-2)^3}$$

15.- Transformar la siguiente fracción en varias fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)\cdot\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)}=$$

En primer lugar, hay que darse cuenta y probar que:

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=\left(x^2+x+1\right)^2$$

Entonces:

$$\frac{1}{(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2x+A_3}{\left(x^2+x+1\right)}+\frac{A_4x+A_5}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

De donde:

$$1=A_1\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+\left(A_2\cdot x+A_3\right)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+\left(A_4\cdot x+A_5\right)\cdot(x+1)=$$

Ahora, dándole valores a ***x***, se hace $x_1=-1$:

$$1=A_1\cdot\left[(-1)^2+(-1)+1\right]^2\Rightarrow A_1=1$$

Para calcular las otras variables, se desarrolla más la ecuación de igualdad de los numeradores y se tiene:

$$1=\left(A_1+A_2\right)\cdot x^4+\left(2A_1+2A_2+A_3\right)\cdot x^3+$$
$$+\left(3A_1+2A_2+2A_3+A_4\right)\cdot x^2+\left(2A_1+A_2+2A_3+A_4+A_5\right)\cdot x+$$
$$+\left(A_1+A_3+A_5\right)=$$

De aquí se concluye que:

$$A_1 = 1$$

$$A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -1$$

$$2A_1 + 2A_2 + A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

$$3A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4 = 0 \Rightarrow A_4 = -1$$

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 + A_4 + A_5 = 0 \Rightarrow A_5 = 0$$

$$A_1 + A_3 + A_5 = 1$$

Por lo tanto, se puede escribir el resultado final como:

$$\frac{1}{(x+1)\cdot\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{(-1)x}{x^2+x+1} + \frac{(-1)x}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)} - \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)} - \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #27.
Tema: Números complejos.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Números complejos son números que envuelven el número imaginario $i = \sqrt{-1}$.

Ellos son normalmente escritos como la suma, o la diferencia, de un número real y un número imaginario, tal como $(3+4i)$, y esta forma es llamada la forma ***Cartesiana*** o ***rectangular***. Cuando se suman, o restan, dos números complejos, las partes reales se suman, o se restan, independientemente de las partes imaginarias.

Los números complejos se asocian con el plano ***Cartesiano***, donde el eje real se identifica con el eje de las ***x*** y el eje imaginario con el eje de las ***y***. También es posible identificar ese punto con un vector desde el origen. Sumas y diferencias de números complejos pueden ser encontradas llevando a cabo sumas y diferencias de vectores.

Un número complejo es asociado con otro número complejo, llamado su conjugada, el cual es su reflejo a través del eje de las ***x***. Para encontrar la conjugada del número complejo $a+bi$ basta con cambiar de sigo a la parte imaginaria, generando $a-bi$. Nótese que el producto de un número complejo por su conjugada genera un número real, ya que: $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$.

Al asociar un número complejo con un punto en el plano, se puede usar una distancia y un ángulo para localizar el mismo punto. Esta notación es conocida como la forma trigonométrica del número complejo. Se determina la distancia de la línea recta definida (también llamada ***módulo*** o ***radio***) desde el origen hasta el punto, como el ángulo formado por la recta mencionada con el lado positivo del eje de las x.

Dado un número complejo $a+bi$, para convertirlo a notación trigonométrica, se debe calcular primero el módulo, o sea: $r=\sqrt{a^2+b^2}$, y luego el ángulo $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$. Por otro lado, dado el número complejo (r,θ), para convertirlo a notación Cartesiana se deberá calcular: $a=r\cdot\cos\theta$ y $b=r\cdot sen\theta$.

El ángulo θ se denomina argumento del número complejo, y se llama argumento principal cuando el ángulo se especifica entre 0 y 2π.

La notación trigonométrica puede expresarse de forma ***compacta*** de la manera siguiente:

$$r\cdot(\cos\alpha + isen\alpha) = r\cdot Cis\alpha$$

También, el número complejo puede ser escrito como una potencia compleja de $e = 2,718281828.....$, usando la notación:

$$r\cdot\cos\theta + i\cdot r\cdot sen\theta = r\cdot e^{i\theta}$$

Cuando se multiplican dos números complejos que están expresados en su notación rectangular, se siguen las reglas establecidas para multiplicar dos polinomios lineales, recordando que $i^2=-1$.

Cuando se multiplican dos números complejos en su forma trigonométrica, se usa la regla siguiente:

$$[r_1\cdot(\cos\theta_1 + isen\theta_1)]\cdot[r_2\cdot(\cos\theta_2 + isen\theta_2)] = (r_1\cdot r_2)\cdot\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + isen(\theta_1+\theta 2)\right]$$

O sea, se multiplican los módulos y se suman los ángulos.

Cuando se dividen dos números complejos expresados en su forma rectangular, se multiplican numerador y denominador por la conjugada del denominador. Esto resulta en un nuevo denominador que es puramente real. El nuevo numerador se generará aplicando la propiedad distributiva del producto, simplificando y ordenando términos semejantes.

Cuando se dividan dos números complejos expresados en su notación trigonométrica, se usa la regla siguiente:

$$\frac{r_1 \cdot (\cos\theta_1 + isen\theta_1)}{r_2 \cdot (\cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right] =$$

Si se desea encontrar la potencia o la raíz de un número complejo dado en su notación rectangular, es mucho más fácil transformarlo primero a su notación trigonométrica, obtener la respuesta y entonces volver atrás a su notación rectangular, de nuevo. En algunos casos el número complejo elevado a una potencia dada, se toma como resultado una variable compleja, por ejemplo $x + iy,$ y entonces se usan técnicas hasta ahora usadas para resolver puramente ecuaciones reales, como cuadrando ambos lados haciendo iguales las partes reales e iguales las partes imaginarias.

Fórmula de Moivre:

$$(Z)^n = (rCis\alpha)^n = r^n \cdot Cisn\alpha = r^n \cdot \left[\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)\right]$$

Estas reglas pueden ser usadas para encontrar las raíces de constantes, como:

$1 = 1 \cdot (\cos 0^o + isen 0^o).$

Aplicando el teorema de ***Moivre:***

$$1^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{0^o}{3}\right) + isen\left(\frac{0^o}{3}\right)\right] = 1.$$

PREGUNTAS:

1.- Efectuar las operaciones y escribir los resultados en la forma $a + bi$

(a) $(2+4i)+(3+i)=$

$$(2+4i)+(3+i) = (2+3)+(4+1)i = 5+5i$$

(b) $(2+i)-(4-2i)=$

$=\left[2-(4)+i-(-2i)\right] = -2+3i$

© $(4-i)-(6-2i)=$

$(4-6)+i(-1+2) = -2+i$

(d) $3-(4+2i)=$
$(3-4)-2i=-1-2i$

2.- Encontrar el producto $(2+3i)\cdot(-2-5i)=$

$(2+3i)\cdot(-2-5i)=-4-10i-6i-15i^2=(15-4)+(-10-6)i=$
$=11-16i$

3.- Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

(a) $(2+3i)+(6-2i)=$

$$(2+3i)+(6-2i)=(2+6)+(3-2)i=8+i$$

(b) $(2-i)\cdot(1+3i)=$

$$(2-i)\cdot(1+3i)=2+6i-i-3i^2=(3+2)+(6-1)i=5+5i$$

© $\left[i-(2-3i)\right]=$

$$i-(2+3i)=-2-3i+i=-2-2i$$

4.- Resolver $(2+3i)\div(3+4i)=$

$$\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{(2+3i)}{(3+4i)}\cdot\frac{(3-4i)}{(3-4i)}=\frac{6-8i+9i-12i^2}{(3)^2+(4)^2}=\frac{(12+6)+(9-8)i}{9+16}=$$
$$=\frac{18+i}{25}=\left(\frac{18}{25}\right)+\left(\frac{1}{25}\right)i$$

5.- Resolver $\dfrac{(3-5i)}{(2+3i)}=$

$$\frac{3-5i}{2+3i}=\frac{3-5i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{6-9i-10i+15i^2}{4+9}=\frac{(-15+6)-(9+10)i}{13}=$$
$$=\frac{-9-19i}{13}=\frac{-9}{13}-\frac{19}{13}i$$

6.- Simplificar:

(a) $4i-7i^3=$
$$i\left(4-7i^2\right)=i\left(4+7\right)=11i$$

(b) $\dfrac{(2-3i)}{5i}=$

$$\frac{(2-3i)}{5i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{2i-3i^2}{5i^2}=\frac{3+2i}{-5}=-\frac{3}{5}-\frac{2i}{5}$$

7.- Resolver $(2+3i)^3=$

Aplicar $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$(2+3i)^3=\left(2^3\right)+3\cdot(2)^2\cdot(3i)+3\cdot(2)\cdot(3i)^2+(3i)^3=$$
$$=8+36i+54(-1)-27i=-46+9i$$

8.- Resolver $\left(x^2-2x+6\right);x=3+2i$

Sustituyendo valores:

$$x^2-2x+6=(3+2i)^2-2(3+2i)+6=9+12i-4-6-4i+6=$$
$$=5+8i$$

9.- Expresar el número complejo $(4+4i)$ en tantas notaciones diferentes como sea posible:

$$r=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$\theta=tg^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)=45^{o}.$$

Entonces, la forma polar será:

$$4\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(n\cdot 360^{o}+45^{o}\right)+isen\left(n\cdot 360^{o}+45^{o}\right)\right]=$$

Además, se puede representar gráficamente como un vector.

10.- Encontrar la forma polar del número complejo $(3-4i)$:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\theta=arctg\left(\frac{-4}{3}\right)=arctg\left(-1,3333\right)=306^{o}\,52,25'$$

Luego, la expresión polar será:

$$3-4i\Rightarrow 5\left[\cos\left(306^{o}\,52,25'\right)+isen\left(306^{o}\,52,25'\right)\right]$$

11.- Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma trigonomértrica:

(a) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=2$$

$$\theta=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right)=arctg\left(-1\right)=135^{o}$$

Entonces:

$$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left[\cos\left(135^{o}\right)+isen\left(135^{o}\right)\right]$$

(b) $2+i$

$$r=\sqrt{(2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{1}{2}\right)=26^{o}\,30'$$

Entonces:

$$2+i=\sqrt{5}\cdot\left[\cos\left(26^{o}\,30'\right)+isen\left(26^{o}\,30'\right)\right]$$

12.- Encontrar, en forma polar, el valor del producto $(4-4i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)=$

Encontraremos primero el valor de cada número complejo en forma trigonométrica, como sigue:

(a) $4-4i=$

$$r_1=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$\theta_1=arctg\left(\frac{-4}{4}\right)=arctg\,(-1)=315^{o}---(IV)\,cuadrante$$

(b) $\sqrt{3}-i$

$$r_2=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)2}=\sqrt{4}=2$$
$$\theta_2=arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=330^{o}---(IV)\,cuadrante$$

El producto será entonces:

$$\left(4\sqrt{2}\right)\cdot(2)\cdot\left[\cos\left(325^{o}+330^{o}\right)+isen\left(325^{o}+330^{o}\right)\right]=$$
$$=8\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(645^{o}\right)+isen\left(645^{o}\right)\right]=8\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(285^{o}\right)+isen\left(285^{o}\right)\right]$$

13.- Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma retangular:

(a) $3\left(\cos 30^{\circ}+isen30^{\circ}\right)=$

$$3\left(\cos 30^{\circ}+isen30^{\circ}\right)=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i$$

(a) $10\left(\cos 180^{\circ}+isen180^{\circ}\right)=$

$$10\left(\cos 180^{\circ}+isen180^{\circ}\right)=10\cdot\left(-1\right)+i\cdot 10\cdot\left(0\right)=-10$$

14.- Encontrar el producto de:

$$\left[2\left(\cos 30^{\circ}+isen30^{\circ}\right)\right]\cdot\left[8\left(\cos 60^{\circ}+isen60^{\circ}\right)\right]=$$

$$=16\cdot\left[\cos\left(30^{\circ}+60^{\circ}\right)+isen\left(30^{\circ}+60^{\circ}\right)\right]=$$
$$=16\cdot\left(\cos 90^{\circ}+isen90^{\circ}\right)==16\cdot\left(0+i\right)=16i$$

Se puede verificar este problema encontrando la forma cartesiana de cada número complejo, multiplicándolo y comparando resultados:

$$2\left(\cos 30^{\circ}+isen30^{\circ}\right)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$$

$$8\left(\cos 60^{\circ}+isen60^{\circ}\right)=8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4+4\sqrt{3}i$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(4+4\sqrt{3}i\right)=4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+i\left(4+12\right)=16i$$

15.- Calcular $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]^{6}=$

Se aplicará la formula:

$$W^n = \left[r \cdot \left(\cos\alpha + isen\alpha \right) \right]^n = r^n \cdot \left[\cos(n\alpha) + isen(n\alpha) \right]$$

Entonces:

$$\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]^6 = \cos\left(\frac{18\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{18\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos(9\pi) + isen(9\pi) = -1$$

16.- Calcular las siguientes expresiones:

(a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} =$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = arctg\left(\sqrt{3}\right) = 60^o$$

Luego:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{10} = 2^{10} \cdot \left[\cos(10 \cdot 60^o) + isen(10 \cdot 60^o) \right] =$$

$$= 2^{10} \cdot \left[\cos(600^o) + isen(600^o) \right] = 1024 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] =$$

$$= -512 - i1512\sqrt{3}$$

(b) $\left(1-i\right)^{\frac{1}{9}} =$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = arctg(-1) = 315^o$$

$$(1-i)^{\frac{1}{9}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{9}} \cdot \left[\cos\left(35^{o}\right) - isen\left(35^{o}\right)\right] = 2^{\frac{1}{18}} \cdot \left[0,819 - 0,574\right] =$$
$$0,851 - i0,596$$

17.- Encontrar $\left\{8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} \div \left\{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\} =$

Se aplicará la fórmula:

$$\frac{r_1 \cdot \left(\cos\theta_1 + isen\theta_1\right)}{r_2 \cdot \left(\cos\theta_2 + isen\theta_2\right)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot \left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + isen\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$

Entonces, el problema puede escribirse como:

$$\left(\frac{8}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$4\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 2 + 2\sqrt{3}i$$

18.- Encontrar las tres raíces cúbicas de (-1).

Se deberá expresar el número complejo (-1) en forma trigonométrica:

$$-1 = \cos\pi + isen\pi = \cos\left(\pi + 2k\pi\right) + isen\left(\pi + 2k\pi\right)$$

Aplicando la ecuación de Moivre:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) =$$

Dándole valores a ***k*** encontramos las raíces:

Para k = 0 $\quad r_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Para k = 1 $\quad r_1 = \cos\left(\pi\right) + 1sen\left(\pi\right)$

Para k = 2 $r_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

19.- Encontrar todas las raíces de la raíz quinta de 2.

$$2 = 2 \cdot \left[\cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi)\right] =$$

Pero, para el número complejo $2 + 0i \Rightarrow \theta = 0^{o}$

Entonces: $$2 = 2 \cdot \left[\cos(2k\pi) + isen(2k\pi)\right] =$$

Sacando ahora la raíz quinta, aplicando Moivre:

$$(2)^{\frac{1}{5}} = \left\{2 \cdot \left[\cos(2k\pi) + isen(2k\pi)\right]\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right]$$

Se le dan valores a ***k*** para encontrar las raíces:

Para k = 0 $r_0 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos(0^{o}) + isen(0^{o})\right]$

Para k = 1 $r_1 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

Para k = 2 $r_2 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$

Para k = 3 $r_3 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right]$

Para k = 4 $r_4 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right]$

20.- Encontrar la raíz quinta del número complejo $(-1+i)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\theta=arctg\left(\frac{y}{x}\right)=arctg\left(\frac{1}{-1}\right)=arctg(-1)=135^{o}.$$

La raíz de un número complejo en forma trigonométrica se expresa como:

$$W^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $0\le k\le(n-1)$ inclusive.

$$\sqrt[5]{-1+i}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left[\cos\left(\frac{135^{o}+2k\pi}{5}\right)+isen\left(\frac{135^{o}+2k\pi}{5}\right)\right]$$

Dándole valores a ***k*** encontramos las raíces buscadas:

Para k = 0 $$r_0=2^{\frac{1}{10}}\cdot\left[\cos(27^{o})+isen27^{o}\right]$$

Para k = 1 $$r_1=2^{\frac{1}{10}}\cdot\left[\cos(99^{o})+isen(99^{o})\right]$$

Para k = 2 $$r_2=2^{\frac{1}{10}}\cdot\left[\cos(171^{o})+isen(171^{o})\right]$$

Para k = 3 $$r_3=2^{\frac{1}{10}}\cdot\left[\cos(243^{o})+isen(243^{o})\right]$$

Para k = 4 $$r_4=2^{\frac{1}{10}}\cdot\left[\cos(315^{o})+isen(315^{o})\right]$$

21.- Usar el teorema de Moivre para encontrar el resultado de $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$.

$$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\theta=arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=150^{o}$$

Entonces, la expresión trigonométrica del número complejo es:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)=2\cdot\left[\cos\left(150^{o}\right)+isen\left(150^{o}\right)\right]$$

Para elevarlo a la potencia 7, se aplica el teorema de Moivre:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=2^7\cdot\left[\cos\left(7\right)\cdot\left(150^{o}\right)+isen\left(7\right)\cdot\left(150^{o}\right)\right]=$$

$$=128\cdot\left[\cos\left(1050^{o}\right)+isen\left(1050^{o}\right)\right]=128\cdot\left[\cos\left(330^{o}\right)+isen\left(330^{o}\right)\right]=$$

$$=128\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)i\right]=64\sqrt{3}-64i$$

22.- Expresar cada de los siguientes productos como el producto de i con un número real:

(a) $2i^5=$

Recordar que $i^2=-1$

Entonces: $2i^5=2\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=2\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot i=2i$

(b) $\frac{-5}{i^7}=\frac{-5}{i^2}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{i}=\frac{-5}{-1}\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{-1}.\frac{1}{i}=\frac{5}{i}\Rightarrow\frac{5}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{5i}{i^2}=-5i$

© $\sqrt{-81}=\left(\sqrt{81}\right)\cdot\left(\sqrt{-1}\right)=9i$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #28.

Tema: Inecuaciones lineales.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Existe una gran variedad de métodos para resolver inecuaciones lineales. La técnica básica es la que usa las propiedades de las inecuaciones. Las propiedades pueden ser sintetizadas al decir, que, excepto en dos casos, si una cierta inecuación originalmente existe entre dos cantidades y que ambas cantidades son cambiadas de la misma manera, por una de las cuatro operaciones fundamentales) entonces el mismo tipo de necuación existe entre las cantidades resultantes. Las dos excepciones son en el caso de que se multipliquen o dividan ambos lados de la inecuación por el mismo número negativo, entonces la dirección de la inecuación de revierte. Ejemplos de aplicación de las propiedades básicas son:

$$-3x+5>-7$$
$$-3x+5+(-5)>-7+(-5)$$
$$-3x>-12$$

También:

$$-3x/(-3)<-12/(-3)$$
$$x<4$$

El procedimiento para graficar las inecuaciones que envuelven una variable incluye los siguientes pasos:

(a) Resolver la inecuación algebraicamente como se muestra en los ejemplos de arriba.
(b) Si la ecuación es de la forma $x < a$ dibuje una línea numérica y trace el número límite $\boldsymbol{a}$ como un círculo vacío para mostrar que es no es parte del gráfico.
(c) Trace una línea sólida, gruesa, desde el círculo vacío hacia la izquierda para mostrar los números incluidos en el círculo.

Si la solución algebraica es de la forma $x > a$, entonces una línea sólida, gruesa, es trazada desde el círculo vacío hacia la derecha. Si la solución es de la forma $x \leq a$ o $x \geq a$, entonces el único cambio gráfico con respecto a lo dicho anteriormente es que el círculo es relleno en cada caso, lo que significa que ese valor es parte del gráfico solución.

El procedimiento para resolver una inecuación compuesta, o sistema de inecuaciones, como dos inecuaciones conectadas por ***"y"*** y ***"o"*** empieza por graficar cada inecuación individualmente, separadamente. Si las dos inecuaciones están conectadas por la palabra ***"o"*** entonces se grafica la unión de todos los puntos de cada gráfico individual en una línea recta numérica con números reales.

Una ***inecuación condicional*** es aquella que su validez depende de los valores de las variables en la expresión. Esto quiere decir que ciertos valores de las variables harán la expresión válida, y otros valores harán la expresión no válida o falsa. Por ejemplo, la expresión $3 - y > 3 + y$ es una inecuación condicional para el conjunto de los números reales, ya que es verdadera para aquellos valores de la variables que son menores que cero y es falsa para aquellos valores de la variable mayores que cero.

La ***inecuación identidad*** es una como $x + 5 > x + 2$, la cual es una identidad para el conjunto de los números reales, ya que para cualquier valor real $\boldsymbol{x}$ la expresión de la izquierda es mayor que la expresión de la derecha.

La ***inecuación inconsistente*** es del tipo $5y < 2y + y$, la cual es inconsistente para aquellos de la variable que sean números reales ***no-negativos***. Para todo valor positivo de $\boldsymbol{x}$ la expresión es falsa.

El procedimiento para graficar una inecuación lineal de dos variables es el siguiente:

(1) Reemplace el signo de desigualdad de la inecuación con un símbolo de igualdad.
(2) Grafique el límite encontrado en el paso #1 usando una línea gruesa si el límite está incluido en el conjunto solución de la inecuación (es decir, si el símbolo de la inecuación original es $\leq$ o $\geq$). Usar una recta con trazos pequeños, segmentada, si el límite no está incluido en el conjunto solución (No está incluido si la inecuación original tenía los símbolos $<$ o $>$).
(3) Tome un punto cualquiera, dado por sus coordenadas, que no esté ubicado en la recta límite. Sustituya los valores de las coordenadas del punto mencionado en la

inecuación original. Si el resultado es falso, el gráfico, (rayado) yace en el lado opuesto del límite.

PREGUNTAS:

1.- Resolver la inecuación $2x+5>9$.

$$2x+5+(-5)>9+(-5)\Rightarrow 2x>4\Rightarrow x>2$$

El conjunto solución es $x=\{x|2x+5>9\}=\{x|x>2\}$; o sea, todos los valores de ***x*** mayores que 2.

2.- Determinar los valores de x para los cuales $3x+2<0$

$$3x+2+(-2)<0+(-2)\Rightarrow 3x<-2\Rightarrow x<-\frac{2}{3}$$

El conjunto de valores solución también puede escribirse:

$$\left\{x:x<-\frac{2}{3}\right\}$$

lo que significa todos aquellos valores de x que son menores que $-\frac{2}{3}$.

3.- Resolver la inecuación $2x-5>3$

$$2x-5+(5)>3+(5)\Rightarrow 2x>8\Rightarrow x>4.$$

4.- Resolver la inecuación $4-5x<-3$.

$$4+(-4)-5x<-3+(-4)\Rightarrow -5x<-7\Rightarrow \frac{-5x}{-5}>\frac{-7}{-5}\Rightarrow x>\frac{7}{5}$$

5.- Resolver la inecuación $\frac{1}{3}x+6<2$.

$$\frac{1}{3}x+6+(-6)<2+(-6)\Rightarrow\frac{1}{3}x<-4\Rightarrow x<-12$$

6.- Resolver la inecuación $4x+3<6x+8.$

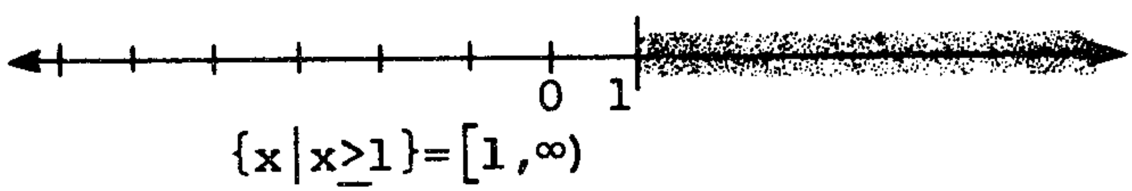
$$4x+3+(-3)<6x+8+(-3)\Rightarrow 4x<6x+5\Rightarrow 4x+(-6x)<6x+(-6x)+5$$
$$\Rightarrow -2x<5\Rightarrow\frac{-2x}{-2}>\frac{5}{-2}\Rightarrow x>-\frac{5}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{x : x>-\dfrac{5}{2}\right\}$

7.- Resolver la inecuación $4x-5\geq -6x+5.$

$$4x-5+(5)\geq -6x+5+(5)\Rightarrow 4x\geq -6x+10\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x+(6x)\geq -6x+(6x)+10\Rightarrow 10x\geq 10\Rightarrow x\geq 1$$

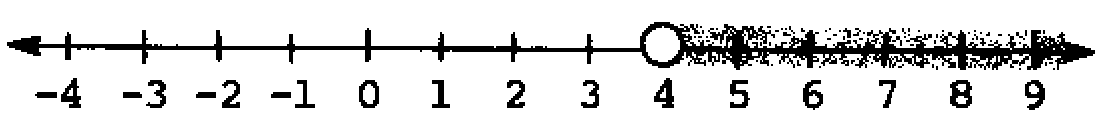
Por lo tanto, $S=\{x \mid x\geq 1\}$



8.- Encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $5x-9>2x+3.$

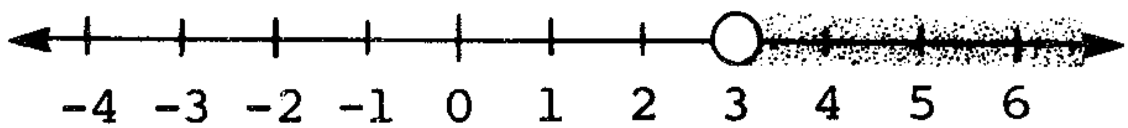
$$5x-9+(-2x)>2x+3+(-2x)\Rightarrow 3x-9>3\Rightarrow$$
$$3x-9+(9)>3+(9)\Rightarrow 3x>12\Rightarrow x>4.$$

El conjunto solución es $\{x \mid x>4\}$



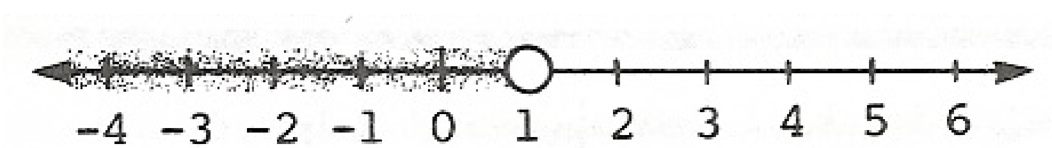
9.- Resolver la inecuación $3(x+2)<5x$.

$$3(x+2)<5x \Rightarrow 3x+6<5x \Rightarrow 3x+6+(-6)<5x+(-6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x<5x-6 \Rightarrow 3x+(-5x)<5x+(-5x)-6 \Rightarrow -2x<-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2} \Rightarrow x>3$$



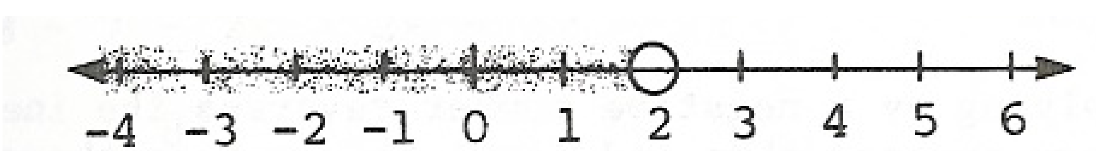
10.- Resolver la inecuación $2(x+1)<4$.

$$2(x+1)<4 \Rightarrow 2x+2<4 \Rightarrow 2x+2+(-2)<4+(-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x<2 \Rightarrow x<1$$



11.- Resolver la inecuación $-3(x-5)>x+7$.

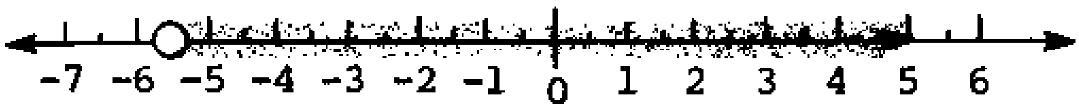
$$-3(x-5)>x+7 \Rightarrow -3x+15>x+7 \Rightarrow -3x+15+(-15)>x+7+(-15) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x>x-8 \Rightarrow -3x+(-4)>x+(-x)-8 \Rightarrow -4x>-8 \Rightarrow x<2$$



12.- Resolver la inecuación $3x-4<5x+7$.

$$3x+(-5x)-4<5x+(-5x)+7 \Rightarrow -2x-4<7 \Rightarrow -2x+(2x)-4<(2x)+7$$
$$\Rightarrow -4<2x+7 \Rightarrow -4+(-7)<2x+7+(-7) \Rightarrow x>-\frac{11}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{x \middle| x>-\frac{11}{2}\right\}$



13.- Resolver la inecuación $-5(x-1)\geq 3(x-3)$.

$$-5x+5\geq 3x-9 \Rightarrow -5x+5+(-5)\geq 3x-9+(-5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5x\geq 3x-14 \Rightarrow -5x+(-3x)\geq 3x+(-3x)-14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -8x\geq -14 \Rightarrow \frac{-8x}{-8}\leq \frac{-14}{-8} \Rightarrow x\leq \frac{14}{8} \Rightarrow x\leq \frac{7}{4}$$

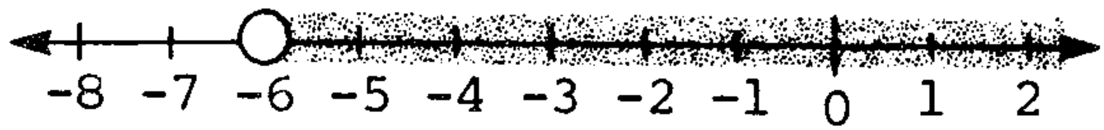
El conjunto solución es $\left\{x \middle| x\leq \frac{7}{4}\right\}$

14.- Resolver la siguiente inecuación $\frac{1}{6}x-3<\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

Multiplicando toda la expresión por 12:

$$2x-36<9x+6 \Rightarrow -36-6<9x-2x \Rightarrow -42<7x \Rightarrow x>-6$$

El conjunto solución es $\{x : x>-6\}$



15.- Resolver la inecuación $7\left(\frac{2}{3}x-1\right)>2\left(x-6\right).$

$$\frac{14}{3}x-7>2x-12\Rightarrow\frac{14}{3}x-7+\left(-2x\right)>2x+\left(-2x\right)-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}x-7>-12\Rightarrow\frac{8}{3}x-7+\left(7\right)>-12+\left(7\right)\Rightarrow\frac{8}{3}x>-5\Rightarrow x>-\frac{15}{8}$$

La solución es el conjunto $\left\{x\middle|x>-\frac{15}{8}\right\}$

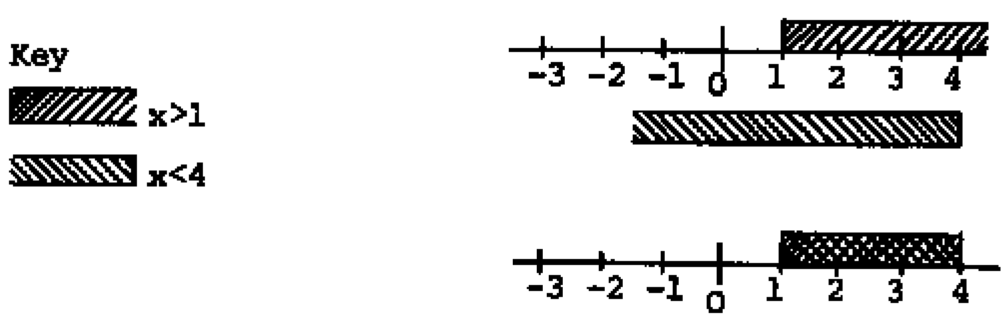
16.- Resolver la inecuación $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{3}.$

Se debe considerar que $x-1$ e4s siempre mayor que 0, o sea $x-1>0$.

Ahora, multiplicaremos ambos lados de la inecuación por $3\left(x-1\right)$, lo que reasulta en:

$$3\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{\left(x-1\right)}>3\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow 3>x-1.$$

Llegado este punto sabemos que $x-1>0$ y también $x-1<3$ y la solución está en las soluciones particulares: $x>1$ y $x<4$. O sea: $x=\left\{x\middle|1<x<4\right\}$



17.- Resolver la inecuación $\dfrac{4}{x-2} < 2.$

Esta inecuación deja de tener sentido cuando $x = 2$ porque la fracción de la izquierda se hace indefinida. Ahora, cuando $x > 2$ el valor $x - 2 > 0$, entonces, podemos multiplicar ambos lados de la inecuación por $x-2,$ como sigue:

$$(x-2)\cdot\frac{4}{(x-2)} < (x-2)\cdot 2 \Rightarrow 4 < 2\cdot(x-2) \Rightarrow 4 < 2x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 < 2x \Rightarrow x > 4$$

Entonces, la solución es la intersección de $x > 2$ y $x > 4$; pero, como $x > 2 \cap x > 4$ se puede escribir $\{x | x > 4\}$.

Ahora, si $x < 2$, se presenta que $x - 2 < 0$, y al ser $x - 2$ negativa se reversa el signo de la inecuación, al cual se pasa a escribir como:

$$4 > 2(x-2) \Rightarrow 4 > 2x - 4$$

Añadiendo 4 a ambos lados de inecuación: $8 > 2x \Rightarrow x < 4$

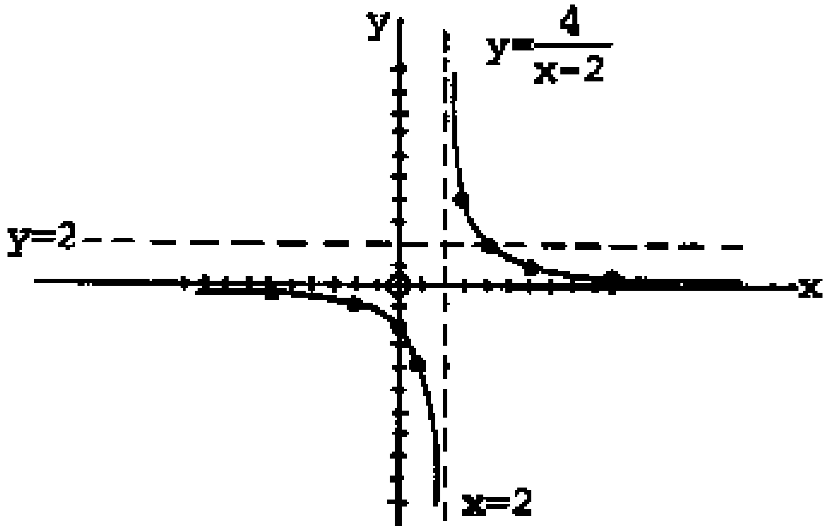
Entonces, para este nuevo caso, la solución estará en la intersección de $x < 2$ y $x < 4$; pero, como $x < 2 \cap x < 4$ se puede escribir que la solución de este caso es:

$$\{x | x < 2\}$$

Y la solución general de $\dfrac{4}{x-2} < 2$ estará en el conjunto de valores comprendidos en:

$$x < 2; x > 4.$$

En la gráfica se puede notar que $y = \dfrac{4}{x-2}$ es una hipérbola equilátera cortada por la recta y = 2.



18.- Si $a > 1$ demostrar que $a < a^2$.

Partamos de $1 < a$ del enunciado del problema. Multiplicando ahora ambos lados de la inecuación por a:

$$1 \cdot a < a \cdot a \Rightarrow a < a^2$$

Luego:

$$1 < a$$

$$a < a^2$$

19.- Demostrar que si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

La relación $0 < a < 1$ significa que $a > 0$ y $a < 1$, lo que quiere decir que $\boldsymbol{a}$ es positivo y menor que 1. Como $\boldsymbol{a}$ es positivo, se puede multiplicar ambos lados de la inecuación $a < 1$ por $\boldsymbol{a}$:

$$a < 1 \Rightarrow a \cdot a < 1 \cdot a \Rightarrow a^2 < a$$

20.- Probar que si $a > b > 0$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Según el enunciado, tanto a como b son positivos; entonces su producto ab será también positivo. Entonces, tomando la inecuación $a > b$ se dividen ambos lados de esta inecuación por el producto ab:

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{ab} > \frac{b}{ab} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Este problema es totalmente reversible, es decir dado $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ si se multiplican ambos lados de la inecuación por el producto positivo ab:

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{ab}{b} > \frac{ab}{a} \Rightarrow a > b$$

21.- Resolver la inecuación $\sqrt{x-3} \le 2 - \sqrt{x+1}.$

Elevando ambos lados al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 \le \left(2-\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow x-3 \le 4-4\sqrt{x+1}+x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \le -4\sqrt{x+1} \Rightarrow \frac{-8}{-4} \le \frac{-4\sqrt{x+1}}{-4} \Rightarrow 2 \ge \sqrt{x+1}$$

Nótese que al dividir ambos lados de la inecuación por un número negativo, la inecuación cambia de sentido y el $\le$ se transforma en $\ge$.

Elevando la última expresión al cuadrado:

$$(2)^2 \ge \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow 4 \ge x+1 \Rightarrow x \le 3$$

Esta solución encontrada hay que discutirla sustituyendo el valor de ***x*** en la inecuación original:

Si $x = 3 \Rightarrow \sqrt{3-3} = 2 - \sqrt{3+1}.$

Si $x > 3$, nos encontramos que el lado izquierdo de la inecuación $\sqrt{x-3} = 2-\sqrt{x+1}$ es positivo, mientras que el lado derecho de la misma es negativo; luego, se puede concluir que la solución x > 3 no satisface a la inecuación mencionada, y que la única solución es $x = 3.$

INECUACIONES CON DOS VARIABLES.

22.- Resolver $2x-3y \geq 6.$

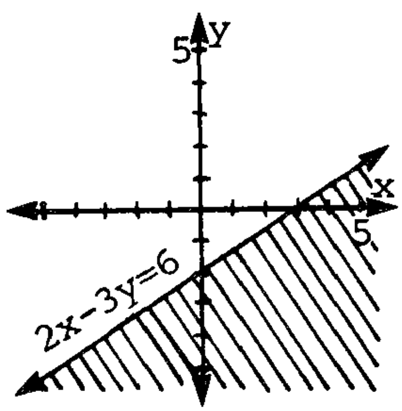
El Enunciado dice que se cumple simultáneamente que $2x-3y>6$ y que $2x-3y=6.$ Se considerará primero la igualdad $2x-3y=6.$ Dados dos ejes de coordenadas cartesianas, la intercepción de la recta dada con el eje de las $\boldsymbol{x}$ se encontrará haciendo $y=0$ en la ecuación de la recta:

$2x-3(0)=6 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3.$ El punto es $(3,0)$

Para encontrar la intercepción de la recta dada con el eje de las $\boldsymbol{y}$ se hará $x=0$ en la ecuación de la recta:

$2(0)-3y=6 \Rightarrow -3y=6 \Rightarrow y=-2$. El punto es $(0,-2)$

Dados estos dos puntos de intercepción se puede entonces dibujar una línea que una esos dos puntos y que representará a la recta dada:



Ahora, se debe determinar la región para la cual la inecuación $2x-3y>6$ está representada.

El método de análisis consiste en determinar dos puntos para decidir en cual lado de la línea dibujada está la región que representa a $2x-3y>6.$

Se selecciona primero el punto $(0,0)$, arriba de la recta, y sustituyendo estos valores en la inecuación dada:
$2x-3y>6 \Rightarrow 2(0)-3(0)>6 \Rightarrow 0>6(\mathit{Falso})$.

Se selecciona ahora otro punto, en este caso de bajo de la recta, tal como $(5,1)$:

$2x-3y>6 \Rightarrow 2(5)-3(1)>6 \Rightarrow 10-3>6 \Rightarrow 7>6(verdadero)$.

Lo que demuestra que la región donde está representada la inecuación $2x-3y>6$ está ubicada debajo de la recta, zona rayada en la figura; por lo consiguiente, la solución incluye la recta sólida, gruesa, que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,-2)$ y auqella parte del plano justo debajo de dicha recta.

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #29.

Tema: Inecuaciones lineales combinadas con valores absolutos.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Existe una gran variedad de métodos para resolver inecuaciones lineales. La técnica básica es la que usa las propiedades de las inecuaciones. Las propiedades pueden ser sintetizadas al decir, que, excepto en dos casos, si una cierta inecuación originalmente existe entre dos cantidades y que ambas cantidades son cambiadas de la misma manera, por una de las cuatro operaciones fundamentales) entonces el mismo tipo de necuación existe entre las cantidades resultantes. Las dos excepciones son en el caso de que se multipliquen o dividan ambos lados de la inecuación por el mismo número negativo, entonces la dirección de la inecuación de revierte. Ejemplos de aplicación de las propiedades básicas son:

$$-3x+5>-7$$
$$-3x+5+(-5)>-7+(-5)$$
$$-3x>-12$$

También:

$$-3x/(-3)<-12/(-3)$$
$$x<4$$

El procedimiento para graficar las inecuaciones que envuelven una variable incluye los siguientes pasos:

(a) Resolver la inecuación algebraicamente como se muestra en los ejemplos de arriba.
(b) Si la ecuación es de la forma $x < a$ dibuje una línea numérica y trace el número límite $\boldsymbol{a}$ como un círculo vacío para mostrar que es no es parte del gráfico.
(c) Trace una línea sólida, gruesa, desde el círculo vacío hacia la izquierda para mostrar los números incluidos en el círculo.

Si la solución algebraica es de la forma $x > a$, entonces una línea sólida, gruesa, es trazada desde el círculo vacío hacia la derecha. Si la solución es de la forma $x \le a$ o $x \ge a$, entonces el único cambio gráfico con respecto a lo dicho anteriormente es que el círculo es relleno en cada caso, lo que significa que ese valor es parte del gráfico solución.

El procedimiento para resolver una inecuación compuesta, o sistema de inecuaciones, como dos inecuaciones conectadas por ***"y"*** y ***"o"*** empieza por graficar cada inecuación individualmente, separadamente. Si las dos inecuaciones están conectadas por la palabra ***"o"*** entonces se grafica la unión de todos los puntos de cada gráfico individual en una línea recta numérica con números reales.

Una ***inecuación condicional*** es aquella que su validez depende de los valores de las variables en la expresión. Esto quiere decir que ciertos valores de las variables harán la expresión válida, y otros valores harán la expresión no válida o falsa. Por ejemplo, la expresión $3 - y > 3 + y$ es una inecuación condicional para el conjunto de los números reales, ya que es verdadera para aquellos valores de la variables que son menores que cero y es falsa para aquellos valores de la variable mayores que cero.

La ***inecuación identidad*** es una como $x + 5 > x + 2$, la cual es una identidad para el conjunto de los números reales, ya que para cualquier valor real $\boldsymbol{x}$ la expresión de la izquierda es mayor que la expresión de la derecha.

La ***inecuación inconsistente*** es del tipo $5y < 2y + y$, la cual es inconsistente para aquellos de la variable que sean números reales ***no-negativos***. Para todo valor positivo de $\boldsymbol{x}$ la expresión es falsa.

PREGUNTAS:

1.- Expresar la inecuación $|x| < 3$ sin utilizar el signo de valor absoluto.

De acuerdo con la ley de valor absoluto que dice que $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$ donde b es cualquier número positivo, se puede entonces escribir que:

$$|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

2.- Resolver la inecuación $\left|5-2x\right|>3.$

Aprovechando lo establecido en la propiedad de los valores absolutos, se puede escribir:

$$a).5-2x>3$$
$$b).-\left(5-2x>3\right)$$

Ahora se debe resolver para x en ambas inecuaciones. Tomando la primera:

$$5-2x>3\Rightarrow 5+\left(-5\right)-2x>3+\left(-5\right)\Rightarrow -2x>-2\Rightarrow x<1$$

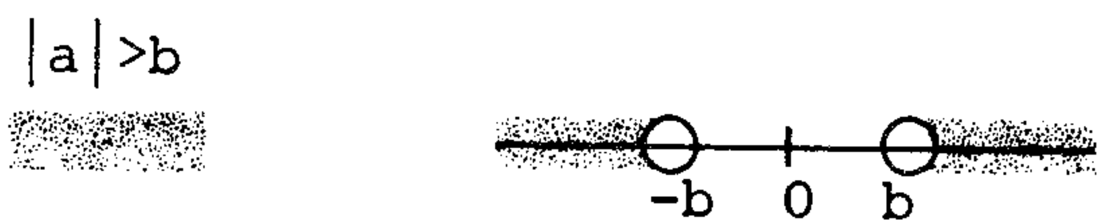
Para ls segunda inecuación:

$$-\left(5-2x\right)>3\Rightarrow -5+2x>3\Rightarrow -5+\left(5\right)+2x>3+\left(5\right)\Rightarrow$$
$$2x>8\Rightarrow x>4$$

Por lo consiguiente la inecuación dada en el enunciado del problema está representada cuando los valores de ***x*** están dados por $x<1$ y por $x>4$.

3.- Resolver la siguiente inecuación $\left|\frac{4x}{5}-1\right|>3.$

Este es el mismo caso de $\left|a\right|>b$:



Se puede notar lo siguiente acerca de los valores absolutos. Si b es un número real no-negativo, entonces a es un número real para el cual $\left|a\right|>b$ si y sólo si $a>b$ y $a<-b.$

Entonces, la inecuación dada en el enunciado puede escribirse como dos inecuaciones, como sigue:

$$\frac{4x}{5}-1>3$$
$$\frac{4x}{5}-1<-3$$

Para la primera inecuación:

$$\frac{4x}{5}-1>3 \Rightarrow \frac{4x}{5}-1+(1)>3+(1) \Rightarrow \frac{4x}{5}>4 \Rightarrow x>5$$

Para la segunda inecuación:

$$\frac{4x}{5}-1<-3 \Rightarrow \frac{4x}{5}-1+(1)<-3+(1) \Rightarrow \frac{4x}{5}<-2 \Rightarrow x<-\frac{5}{2}$$

El conjunto solución será entonces:

$$\left(x \middle| x>5\right) \cup \left(x \middle| x<-\frac{5}{2}\right)$$

4.- Encontrar el conjunto solución de la inecuación $|-2x+6|>8$.

Por la propiedad de inecuaciones con valores absolutos, el conjunto solución de la inecuación dada es la unión de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones conformadas por:

$$-2x+6>8$$
$$-2x+6<-8$$

Para la primera inecuación:

$$-2x+6>8 \Rightarrow -2x+6+(-6)>8+(-6) \Rightarrow -2x>2 \Rightarrow x<-1$$

Para la segunda inecuación:

$$-2x+6<-8 \Rightarrow -2x+6+(-6)<-8+(-6) \Rightarrow -2x<-14 \Rightarrow x>7$$

El conjunto solución enunciado del problema es:

$$\left(x \middle| x<-1\right) \cup \left(x \middle| x>7\right).$$

5.- Graficar $\left(x:\left|3x-4\right|\geq 2\right)$

En general, el gráfico requerido de $\left(x:\left|ax+b\right|\geq c\right)$ es la unión de dos conjuntos, a saber: $\left(x:ax+b>c\right)\cup\left(x:ax+b<-c\right)$. Por lo tanto, el gráfico requerido por la inecuación $\left(x:\left|3x-4\right|\geq 2\right)$ es la unión de los dos conjuntos:
$\left\{x:3x-4\geq 2\right\}$ y $\left\{x:3x-4\leq -2\right\}$

Para la primera inecuación:

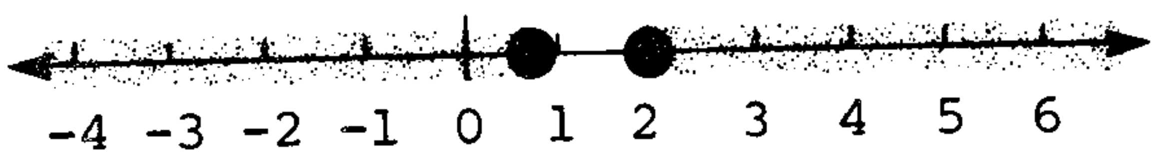
$$3x-4\geq 2\Rightarrow 3x-4+\left(4\right)\geq 2+\left(4\right)\Rightarrow 3x\geq 6\Rightarrow x\geq 3$$

Para la segunda inecuación:

$$3x-4\leq -2\Rightarrow 3x-4+\left(4\right)\leq -2+\left(4\right)\Rightarrow 3x\leq 2\Rightarrow x\leq \frac{2}{3}$$

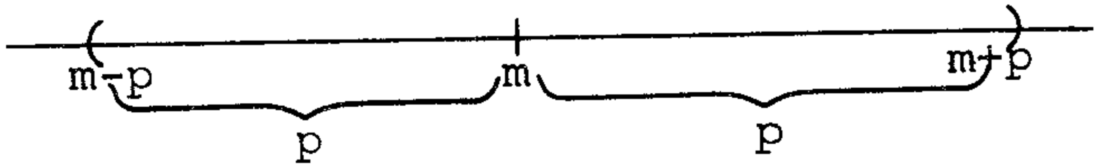
El conjunto solución es:

$$\left\{x:x\geq 2\right\}\cup\left\{x:x\leq \frac{2}{3}\right\}$$



6.- Exprese la inecuación $\left|2x-1\right|<5$ sin usar signo de valor absoluto.

Si $\boldsymbol{x}$ es un número tal que $\left|x-m\right|<p$ entonces x se encuentra en el intervalo entre los puntos $\left(m-p\right)$ y $\left(m+p\right)$; lo cual se puede también escribir como $-p<x-m<p$, que al sumarle $\boldsymbol{+m}$ a todos los componentes de la inecuación da como resultado lo siguiente: $m-p<x<m+p$. Se debe observar que el punto $\boldsymbol{m}$ es el punto medio de ese intervalo y que la longitud del intervalo es $\boldsymbol{2p}$. En la recta numérica se expresa así:



Entonces, se puede decir que $m-p<x<m+p$ y $|x-m|<p$ son equivalentes. Por lo consiguiente, la inecuación $|2x-1|<5$ se puede reducir a:

$$1-5<2x<1+5 \Rightarrow -4<2x<6 \Rightarrow -2<x<3$$

7.- Resolver la inecuación $|2x-3|\leq 4$.

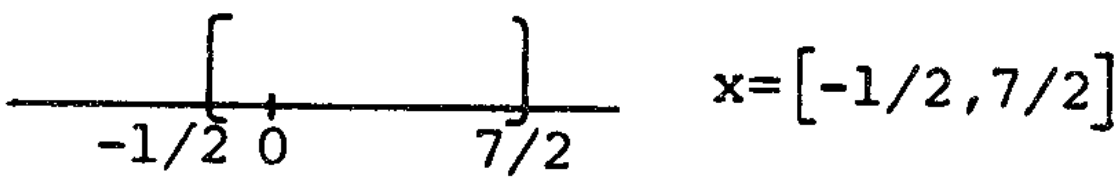
Esto se puede escribir de nuevo como: $-4\leq 2x-3\leq 4$, la cual a su vez se puede expresar como dos inecuaciones:

$$-4\leq 2x-3 \Rightarrow -1\leq 2x \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$$

También:

$$2x-3\leq 4 \Rightarrow 2x\leq 7 \Rightarrow x\leq \frac{7}{2}$$

La representación gráfica de la solución es la siguiente:



8.- Resolver la siguiente inecuación $|3x-1|\leq 8.$

El problema se puede transformar en dos inecuaciones, como:

$$3x-1\leq 8 \Rightarrow 3x\leq 9 \Rightarrow x\leq 3$$

$$3x-1\geq -8 \Rightarrow 3x\geq -7 \Rightarrow x\geq -\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$$

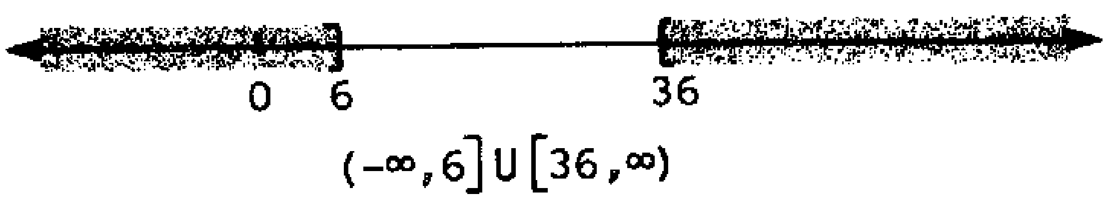
El conjunto solución es: $\left\{ x : -2\frac{1}{3} \leq x \leq 3 \right\}$

9.- Encontrar los valores de ***x*** que satisfacen la inecuación $\left| \frac{x}{3} - 7 \right| \geq 5$

Expresándolo como dos inecuaciones:

$$\frac{x}{3} - 7 \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{3} \geq 12 \Rightarrow x \geq 36$$

$$\frac{x}{3} - 7 \leq -5 \Rightarrow \frac{x}{3} \leq 2 \Rightarrow x \leq 6$$



10.- Resolver la siguiente inecuación $\left| \frac{x}{3} + 2 \right| < 4$

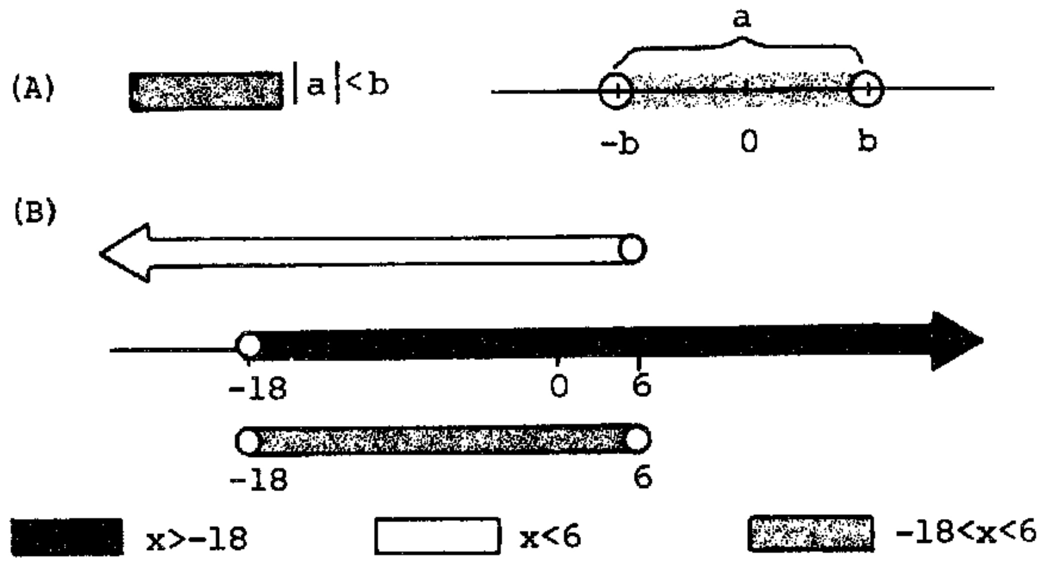
La inecuación dada es equivalente a:

$$\frac{x}{3} + 2 < 4 \Rightarrow \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow x < 6$$

$$\frac{x}{3} + 2 > -4 \Rightarrow \frac{x}{3} > -6 \Rightarrow x > -18$$

El conjunto solución puede expresarse como:

$\{ x | -18 < x < 6 \}$ también $\{ x | x < 6 \} \cap \{ x | x > -18 \}$



11.- Encontrar todas las ***x*** que satisfagan a $\left|\frac{4}{3}+x\right| \leq \frac{2}{5}$.

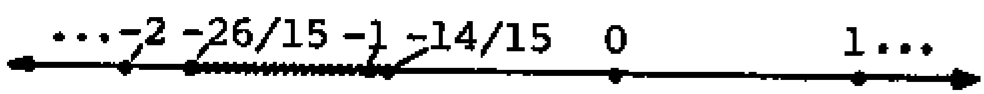
La inecuación dada puede expresarse como:

$$-\frac{2}{5} \leq \frac{4}{3}+x \leq \frac{2}{5}$$

Trabajando ahora con esta nueva expresión:

$$-\frac{2}{5} \leq \frac{4}{3}+x \leq \frac{2}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right) \leq \frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)+x \leq \frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{26}{15} \leq x \leq -\frac{14}{15}$$



12.- Encontrar el conjunto solución de $|2x+5| \leq x+3.$

Este problema será tratado con dos casos:

Caso #1: En el primer caso se considera que $2x+5 \geq 0$, entonces $|2x+5| = 2x+5$ y la inecuación puede escribirse como:

$2x+5 \leq x+3 \Rightarrow x \leq -2.$ Por lo tanto, en el **caso #1** se tendrán las dos restricciones simultáneas:

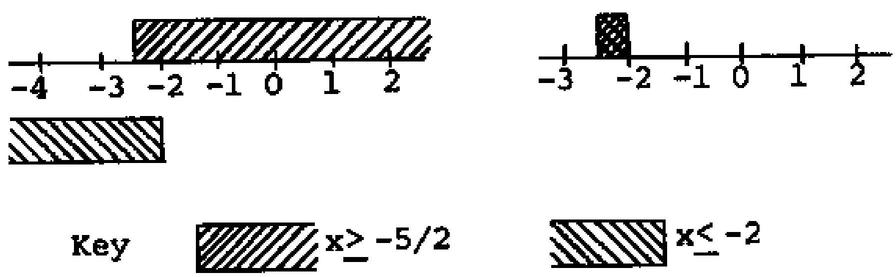
$$2x+5 \geq 0$$
$$x \leq -2$$

El conjunto solución para el caso #1 será:

$$x_1 = \left\{ x \middle| -\frac{5}{2} \leq x \leq -2 \right\}$$

En la figura A se puede ver la solución definitiva en la recta numérica:

Fig. A



Caso #2: Si se considera que $2x+5<0$, entonces la inecuación a considerar es la siguiente: $-(2x+5) \leq x+3$.

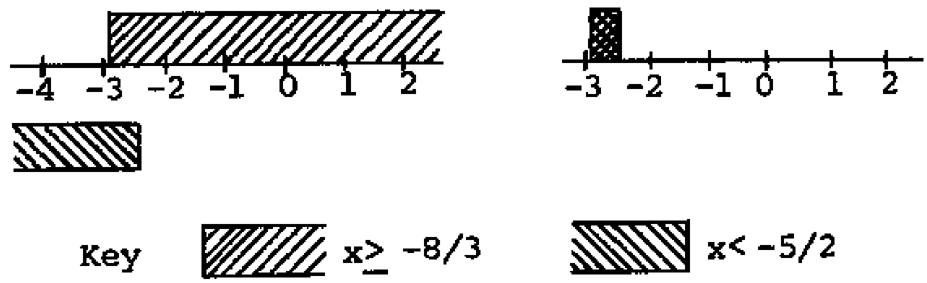
Trabajando ahora con esta nueva inecuación se tiene:

$$-(2x+5) \leq x+3 \Rightarrow 3x \geq -8 \Rightarrow x \geq -\frac{8}{3}$$

Entonces las restricciones para este caso son $2x+5<0$ y $x \geq -\frac{8}{3}$ y el conjunto solución será: $x_2 = \left\{ x \middle| -\frac{8}{3} \leq x < -\frac{5}{2} \right\}$

La gráfica de la solución de este caso está en la figura B:

Fig. B



Finalmente, la solución a nuestro problema original, el problema del enunciado del problema es la unión de los dos conjuntos soluciones, el del **caso #1** y el del **caso #2**:

$$x = x_1 \cup x_2 =$$

$$= \left\{ x \middle| -\frac{8}{3} \leq x < -\frac{5}{2} \right\} \cup \left\{ x \middle| -\frac{5}{2} \leq x \leq -2 \right\} =$$

$$= \left\{ x \middle| -\frac{8}{3} \leq x \leq -2 \right\}$$

13.- Resolver la inecuación $\left| \dfrac{3x+17}{5} \right| > 3$

Se transformará la inecuación en la siguiente agrupación de dos inecuaciones:

$$\frac{3x+17}{5} > 3$$

$$\frac{3x+17}{5} < -3$$

Primera inecuación:

$$\frac{3x+17}{5} > 3 \Rightarrow 3x+17 > 15 \Rightarrow 3x > -2 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$$

Intervalo de solución: $\left\{ -\dfrac{2}{3}, \infty \right\}$

Segunda inecuación:

$$\frac{3x+17}{5} < -3 \Rightarrow 3x+17 < -15 \Rightarrow 3x < -32 \Rightarrow x < -\frac{32}{3}$$

Intervalo de solución: $\left\{-\infty, -\frac{32}{3}\right\}$

La solución de la agrupación es la unión de las soluciones de cada agrupación:

$$\left\{-\infty, -\frac{32}{3}\right\} \cup \left\{-\frac{2}{3}, \infty\right\}$$

14.- Resolver la siguiente inecuación: $|5x+1| \geq |2x-3|$

Se transformará la inecuación dada en la siguiente agrupación de inecuaciones:

$$5x+1 \geq |2x-3|$$
$$5x+1 \leq -|2x+3|$$

Primera inecuación:

$$5x+1 \geq |2x-3| \Rightarrow |2x-3| \leq 5x+1$$

Esta última inecuación se transforma en dos inecuaciones adicionales:

$$2x-3 \leq 5x+1$$
$$2x-3 \geq -5x-1$$

Trabajando con estas nuevas ecuaciones:

$$2x-3 \leq 5x+1 \Rightarrow 3x \geq -4 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

$$2x-3 \geq -5x-1 \Rightarrow 7x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{7}$$

Solución: $\left\{\frac{2}{7},\infty\right\}$

Segunda inecuación:

$$5x+1\leq -\left|2x-3\right| \Rightarrow \left|2x-3\right| \leq -5x-1$$

Transformando:

$$2x-3\leq -5x-1$$
$$2x-3\geq 5x+1$$

Trabajando ahora con estas dos nuevas inecuaciones:

$$2x-3\leq -5x-1 \Rightarrow 7x\leq 2 \Rightarrow x\leq \frac{2}{7}$$
$$2x-3\geq 5x+1 \Rightarrow 3x\leq -4 \Rightarrow x\leq -\frac{4}{3}$$

Solución: $\left\{-\infty,-\frac{4}{3}\right\}$

La solución de la inecuación original, dada en el enunciado del problema, será:

$$\left\{-\infty,-\frac{4}{3}\right\}\cup\left\{\frac{2}{7},\infty\right\}$$

Método alternativo:

Se parte de la definición de módulo de un número $\left|a\right|=\sqrt{a^2}$. Entonces se toma la desigualdad y se eleva al cuadrado cada miembro, eliminado la raíz, o sea:

$$\left|\left(5x+1\right)\right| \geq \left|2x-3\right| \Rightarrow \sqrt{\left(5x+1\right)^2} \geq \sqrt{\left(2x-3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(5x+1\right)^2 \geq \left(2x-3\right)^2 \Rightarrow 25x^2+10+1 \geq 4x^2-12x+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21x^2+22x-8 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2+4\cdot 21\cdot 8}}{2\cdot 21} = \frac{-22 \pm \sqrt{1156}}{42} = \frac{-22 \pm 34}{42}0$$

$$x_1 = \frac{-22+34}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{-22-34}{42} = -\frac{56}{42} = -\frac{4}{3}$$

La solución es entonces:

$$(-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{2}{7}, \infty)$$

GUIA DE TRABAJO
Materia: Matemáticas Guía #30.
Tema: Inecuaciones cuadráticas.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

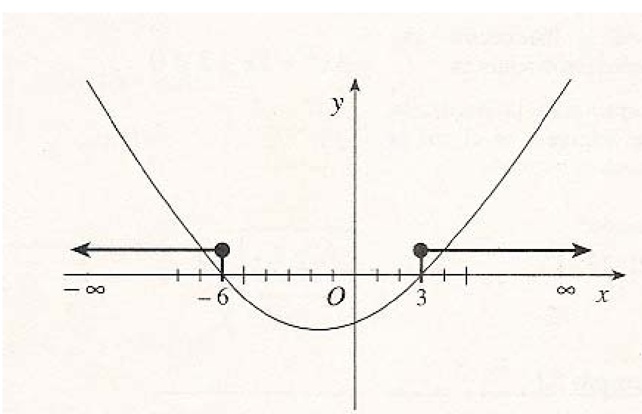
Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Resolver la inecuación $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

Se estudia el comportamiento de la parábola $y = x^2 + 3x - 18 = (x+6)(x-3)$.

Las raíces de este polinomio son **-6** y **3** y son los valores que anulan la función y determinan donde la curva intercepta, corta, el eje de las abscisas. De allí se deduce que la parábola tiene la figura indicada en la gráfica.



La gráfica nos permite verificar por simple inspección que la función es positiva en los intervalos $(-\infty,-6)$ y $(3,\infty)$, negativa en el intervalo $(-6,3)$, y nula en los puntos de intercepción con el eje de las abscisas.

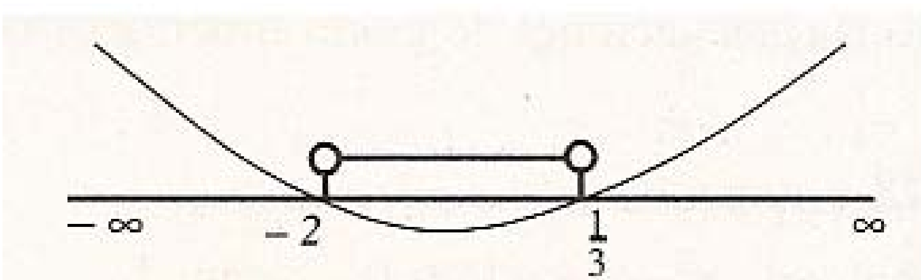
La solución de la inecuación $x^2+3x-18\geq 0$ serán los intervalos donde la función es positiva o nula.

Solución: $(-\infty,-6]\cup[3,\infty)$

2.- Resolver $2-3x^2-5x>0$

Multiplicando ambos lados de la inecuación por (-1) y ordenando términos de mayor a menor, tenemos:

$$3x^2+5x-2<0$$



Ahora, se estudiará el comportamiento de la parábola $y=3x^3+5x-2=(x+2)\cdot(3x-1)$.

De lo anterior concluimos que las raíces de la ecuación son (-2) y $\left(\frac{1}{3}\right)$. Ver gráfica.

La función es positiva en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$, y es negativa en el intervalo $\left(-2,\frac{1}{3}\right)$, y se anula en los puntos de intercepción con el eje de abscisas.

Como la inecuación que se pretende resolver es $3x^2+5x-2<0$, su solución es el intervalo en el que la función es negativa, o sea:

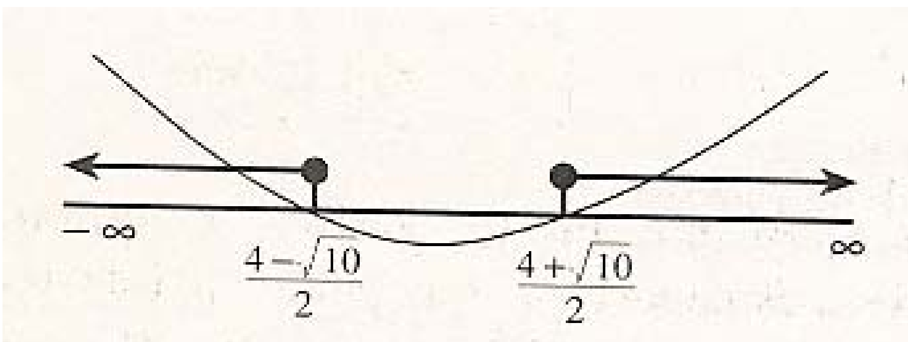
$$\left(-2,\frac{1}{3}\right)$$

3.- Resolver $2x^2 - 8x + 3 \geq 0$

Se estudiará el comportamiento de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 3$

Las raíces de esta función, utilizando la resolvente, son $\dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$. Ver gráfica.

La solución de la inecuación son los intervalos donde la función es positiva o se anula:



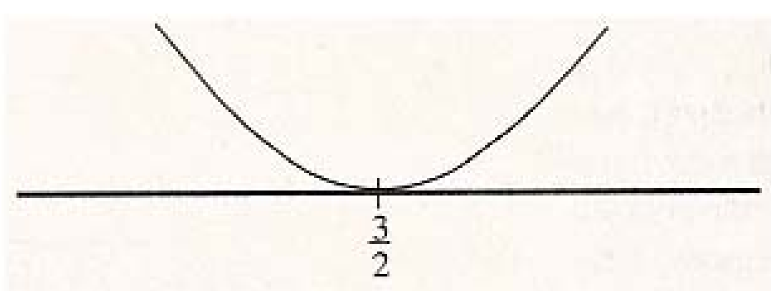
$$(-\infty, \frac{4-\sqrt{10}}{2}] \cup [\frac{4+\sqrt{10}}{2}, \infty)$$

4.- Resolver $12 < 4x^2 + 9$

Transponiendo términos y cambiando signos:

$$12x < 4x^2 + 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 > 0 \Rightarrow (2x-3)^2 > 0$$

Se estudiará entonces la parábola $y = (2x-3)^2$. Es una función que tiene dos raíces exactamente iguales.



En la gráfica se ve que la función es siempre positiva a excepción del punto en el que se anula. Como la inecuación que se trata de resolver es $(2x-3)^2 > 0,$ la solución es el intervalo $(-\infty, \infty)$ con excepción del valor $\frac{3}{2}$ que anula la función.

La solución es $\Re - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

5.- Resolver la siguiente inecuación: $25x^2 - \left(10\sqrt{2}\right)x + 2 \leq 0$

Factorizando la expresión dada, se tiene:

$$\left(5x - \sqrt{2}\right)^2 \leq 0$$

El miembro de la izquierda en ningún momento es negativo y solo se anula para:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

La solución por tanto es $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{5} \right\}$ solamente.

6.- Encontrar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 6x + 10 > 0,$ usando el método gráfico.

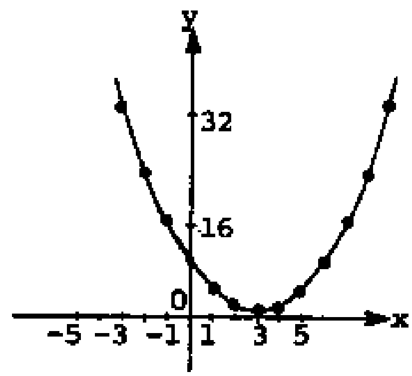
En primer lugar, se grafica la función

$$y = x^2 - 6x + 10$$

Se le asignan valores a $\boldsymbol{x}$ y se calculan los correspondientes valores de $\boldsymbol{y}$. Se hace construye una tabla y graficando los valores correspondientes se traza la curva.

Ver tabla de cálculos y gráfica en la página siguiente

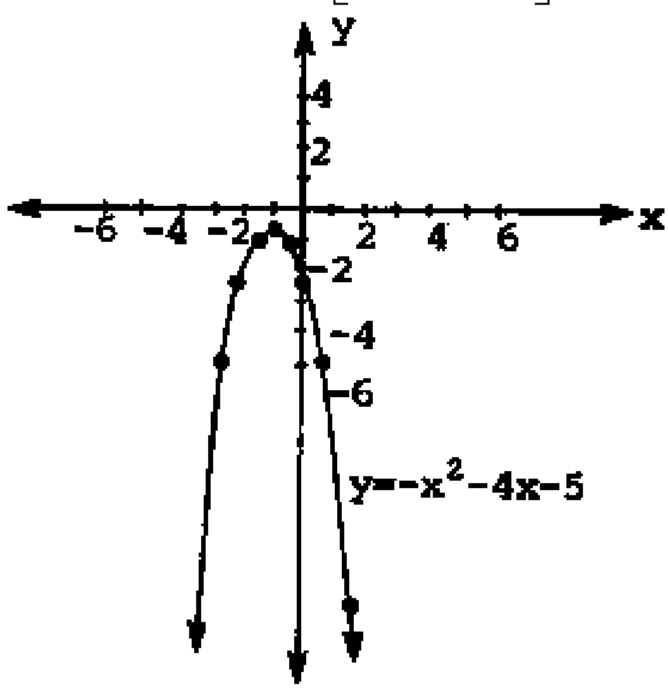
x	$x^2 - 6x + 10$	y
-3	$(-3)^2 - 6(-3) + 10$	37
-2	$(-2)^2 - 6(-2) + 10$	26
-1	$(-1)^2 - 6(-1) + 10$	17
0	$(0)^2 - 6(0) + 10$	10
1	$(1)^2 - 6(1) + 10$	5
2	$(2)^2 - 6(2) + 10$	2
3	$(3)^2 - 6(3) + 10$	1
4	$(4)^2 - 6(4) + 10$	2



Al ver el gráfica se nota que la tabla y la curva correspondiente a $y = x^2 - 6x + 10$, la curva está siempre arriba del eje de las ***x***; siempre positiva, y no se anula en ningún punto.; por lo tanto, la solución es todo el conjunto de números reales.

7.- Resolver la siguiente inecuación $-x^2 - 4x - 5 > 0$

Para encontrar la solución se debe considerar graficar la parábola $y = -x^2 - 4x - 5 = -\left[x^2 + 4x + 5\right]$



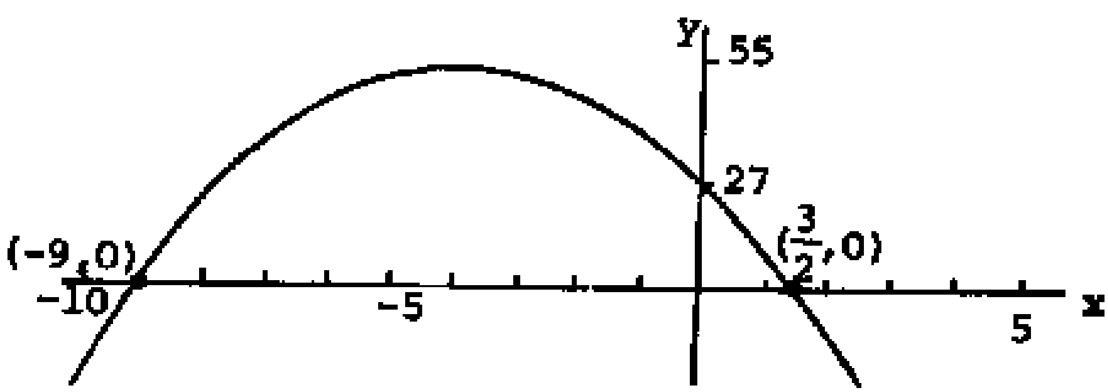
-

La tabla de valores es la siguiente:

x	$-[x^2 + 4x + 5] =$	y
-3	$-[(-3)^2 + 4(-3) + 5] = -(9 - 12 + 5) =$	-2
-2	$-[(-2)^2 + 4(-2) + 5] = -(4 - 8 + 5) =$	-1
-1	$-[(-1)^2 + 4(-1) + 5] = -(1 - 4 + 5) =$	-2
0	$-[(0)^2 + 4(0) + 5] = -(0 + 0 + 5) =$	-5
1	$-[(1)^2 + 4(1) + 5] = -(1 + 4 + 5) =$	-10
2	$-[(2)^2 + 4(2) + 5] = -(4 + 8 + 5) =$	-17
3	$-[(3)^2 + 4(3) + 5] = -(9 + 12 + 5) =$	-28

El gráfico de $y = -x^2 - 4x - 5$ yace enteramente debajo del eje de las ***x***; consecuentemente, la solución del problema $-x^2 - 4x - 5 > 0$ no existe, es el conjunto vació, o sea: $\{x \mid -x^2 - 4x - 5 > 0\} = \phi$.

8.- Resolver la inecuación $-2x^2 - 15x + 27 > 0$.



Se empezará de nuevo por estudiar la gráfica de la parábola $y = -2x^2 - 15x + 27$. Como el coeficiente de x^2 es negativo la parábola es cóncava hacia abajo. Las ráices se encuentran factorizando la ecuación:

$$-2x^2-15x+27=(2x-3)\cdot(-x-9)=0$$

$$(2x-3)=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$$

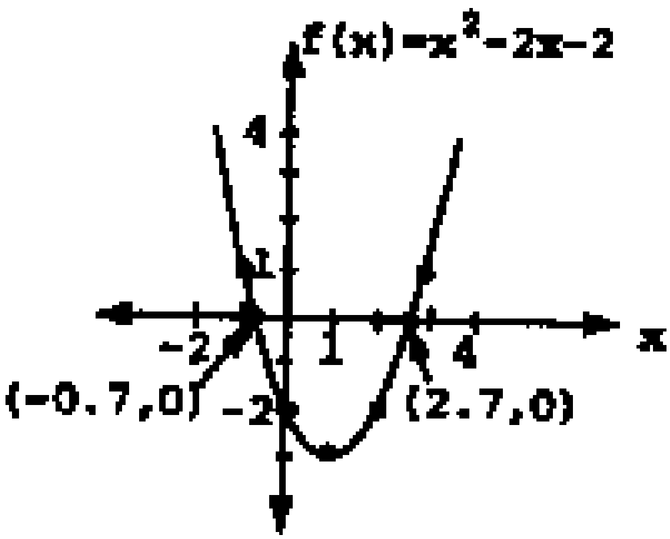
$$(-x-9)=0 \Rightarrow x_2=-9$$

Por lo tanto, el conjunto solución es todos los valores de ***x*** que hacen que el gráfico de la parábola dada se encuentre sobre el eje de las ***x***, o sea:

$$\left\{x \middle| -9<x<\frac{3}{2}\right\}$$

9.- Resolver la inecuación $x^2<2x+2.$

Se empezará por estudiar el comportamiento gráfico de la parábola $y=x^2-2x-2.$



Se debe hacer una transformación, como sigue:

$$x^2<2x+2 \Rightarrow x^2-2x-2<0$$

Se debe encontrar la región donde los valores de la parábola son menores que cero.

Para graficar se construye primero la tabla siguiente:

x	x^2-2x-2	f(x)
-3	$(-3)^2-2(-3)-2 = 9+6-2$	13
-2	$(-2)^2-2(-2)-2 = 8-2$	6
-1	$(-1)^2-2(-1)-2 = 1+2-2$	1
0	$(0)^2-2(0)-2 = 0-0-2$	-2
1	$(1)^2-2(1)-2 = 1-2-2$	-3
2	$(2)^2-2(2)-2 = 4-4-2$	-2
3	$(3)^2-2(3)-2 = 9-6-2$	1

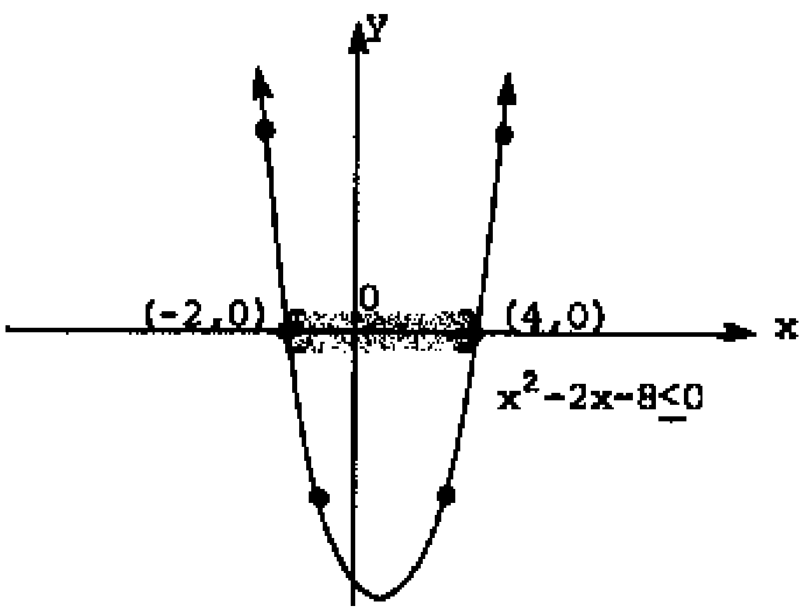
Para encontrar los puntos de corte con el eje de las x, se resuelve la ecuación:

$$x^2-2x-2=0 \Rightarrow x_1=1+\sqrt{3};x_2=1-\sqrt{3}.$$

Entonces, la inecuación dada, $x^2-2x-2<0$, se satisface cuando

$$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3} \Rightarrow -0,7<x<2,7$$

10.- Resolver por el método gráfico la inecuación $x^2-2x-8\leq 0$.



Se ha llevado a cabo la gráfica de la parábola $y = x^2 - 2x - 8,$ para lo cual se construyó la siguiente tabla:

x	$x^2 - 2x - 8$	y
− 3	$(-3)^2 - 2(-3) - 8$	7
− 2	$(-2)^2 - 2(-2) - 8$	0
− 1	$(-1)^2 - 2(-1) - 8$	− 5
0	$(0)^2 - 2(0) - 8$	− 8
1	$(1)^2 - 2(1) - 8$	− 9
2	$(2)^2 - 2(2) - 8$	− 8
3	$(3)^2 - 2(3) - 8$	− 5
4	$(4)^2 - 2(4) - 8$	0
5	$(5)^2 - 2(5) - 8$	7

Las raíces de la parábola son:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = -2.$$

Se debe luego encontrar la región donde la parábola es menor que cero. Ver tabla en idioma inglés:

Regions	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
Factors of f(x)	(x-4) (x+2)	(x-4) (x+2)	(x-4) (x+2)
x-value	− 3	0	5
Signs of factors	(−) (−)	(−) (+)	(+) (+)
$\therefore$	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

El conjunto solución será por lo consiguiente: $-2 \le x \le 4. \Rightarrow [-2, 4]$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #31.
Tema: Matrices y determinantes.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso
Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Se denomina matriz a un arreglo rectangular de números, dado por $\boldsymbol{m}$ filas y $\boldsymbol{n}$ columnas. Un determinante es una matriz cuadrada que tiene valor numérico definido y se denomina por $|A|$. El procedimiento para encontrar el valor de un determinante de segundo orden, o sea, él que es definido por una matriz 2×2, está dado por:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Donde $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$**,** $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son los elementos de la matriz mencionada.

Los determinantes de segundo orden son utilizados para encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales de dos variables, usando la bien conocida Regla de ***Cramer***. El sistema de ecuaciones deben estar en formato estándar para que la regla de ***Cramer*** pueda ser aplicada.

Dado un determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} =$$

Se puede escribir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+d & d & g \\ b+e & e & h \\ c+f & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & g \\ e & e & h \\ f & f & i \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$$

Ya que $\begin{vmatrix} d & d & g \\ e & e & h \\ f & f & i \end{vmatrix} = \left[(d)(e)(i)+(d)(h)(f)+(e)(f)(g)\right]$

$$-\left[(e)(f)(g)+(e)(d)(i)+(f)(h)(d)\right] = 0$$

O sea que un determinante que tenga los elementos de una columna exactamente igual a otra columna, su valor es cero. Igual puede demostrarse para dos filas iguales.
Esta propiedad hace posible modificar un determinante sumando o restando filas o columnas (aún multiplicadas por un factor) ***no*** alterándose el valor del determinante.

PREGUNTAS:

1.- Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x - 2y = 13$$

$$x - 7y = 38$$

Se construye la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 1 & -7 & 38 \\ & & \end{bmatrix}$$

Luego, la primera fila se multiplica por (-1) y se le suma a la segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 0 & -5 & 25 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se divide entonces la segunda fila por (-5):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & -5 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se multiplica ahora la segunda fila por (2) y se suma a la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ & & \end{bmatrix}$$

Entonces el resultado es:

$$x = 3$$
$$y = -5$$

2.- Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - y = -2$$
$$3x - 2y = 6$$

Se construye la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-3) y se suma a la segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 12 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se suma la segunda fila a la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 12 \\ & & \end{bmatrix}$$

Entonces, el resultado es:

$$x = 10$$

$$y = 12$$

3.- Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$3x + 7y = -33$$
$$x - 2y = 2$$

Se construye la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -33 \\ 1 & -2 & 2 \\ \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (2) y la segunda fila por (7) y se suman los resultados en la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & -52 \\ 1 & -2 & 2 \\ \end{bmatrix}$$

Se saca ahora (13) como factor común en la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ \end{bmatrix}$$

Se resta ahora la primera fila de la segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ \end{bmatrix}$$

Se divide la segunda fila por (-2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ \end{bmatrix}$$

Entonces, el resultado es:

$$x = -4$$
$$y = -3$$

4.- Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x - 4y + 3z = 13$$
$$2x + 3y + z = 5$$
$$3x + 2y - 4z = -4$$

Se construye la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por (-2) y se le suma a la segunda fila. Se multiplica la primera fila por (-3) y se le suma a la tercera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 11 & -5 & -21 \\ 0 & 14 & -13 & -43 \end{bmatrix}$$

Se divide la segunda fila por (11):

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & 14 & -13 & -43 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la segunda fila por (-14) y se le suma a la tercera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{73}{11} & -\frac{179}{11} \end{bmatrix}$$

Se divide la tercera fila por $\left(-\frac{73}{11}\right)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{179}{73} \end{bmatrix}$$

Se multiplica ahora la segunda fila por (4) y se suma a la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{59}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{21}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{179}{73} \end{bmatrix}$$

Se multiplica la tercera fila por $\left(-\frac{13}{11}\right)$ y se le suma a la primera fila. Se multiplica la tercera fila por $\left(\frac{5}{11}\right)$ y se le suma a la segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1980}{803} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{794}{803} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{179}{73} \end{bmatrix}$$

El resultado es:

$$x = \frac{1980}{803} = 2,4657$$

$$y = \frac{794}{803} = 0,988$$

$$z = \frac{179}{73} = 2,452$$

5.- Encontrar el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3)-(2)(2) = 3-4 = -1$$

6.- Evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3)-(-2)(5) = 9+10 = 19$$

7.- Encontrar el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1)-(3)(3) = -2-9 = -11$$

8.- Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x+y=3$$
$$2x+3y=1$$

Hagamos el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; luego $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ y $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{[(3)(3)-(1)(1)]}{[(1)(3)-(2)(1)]} = \frac{9-1}{3-2} = \frac{8}{1} = 8$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{[(1)(1)-(2)(3)]}{[(1)(3)-(2)(1)]} = \frac{1-6}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5.$$

9.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 4y = 11$$
$$-5x + 3y = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = \left[(2)(3) - (-5)(4)\right] = 6 + 20 = 26$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \left[(11)(3) - (5)(4)\right] = 33 - 20 = 13$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = \left[(2)(5) - (-5)(11)\right] = 10 + 55 = 65$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{65}{26} = \frac{5}{2}$$

10.- Resolver por ***Cramer*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x - 6y - 2 = 0$$
$$4x + 7y + 3 = 0$$

En primer lugar, se escriben las ecuaciones en el formato apropiado para poder aplicar ***Cramer:***

$$3x - 6y = 2$$
$$4x + 7y = -3$$

Luego, se escribe la matriz de los coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \left[(3)(7)-(4)(-6)\right] = 21+24 = 45$$

Ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = \left[(2)(7)-(-3)(-6)\right] = 14-18 = -4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \left[(3)(-3)-(4)(2)\right] = -9-8 = -17$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{45}$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-17}{45}$$

11.- Resolver por ***Cramer*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x - 5y = 4$$
$$7x + 4y = 25$$

La matriz de los coeficientes es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \left[(3)(4)-(7)(-5)\right] = 12+35 = 47$$

Ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = \left[(4)(4)-(25)(-5)\right] = 16+125 = 141$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 25 \end{vmatrix} = \left[(3)(25)-(7)(4)\right] = 75-28 = 47$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{141}{47} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{47}{47} = 1$$

12.- Resolver por ***Cramer*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 3y = 4$$

$$3x - 2y = -2$$

La matriz de los coeficientes es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \left[(2)(-2) - (3)(3)\right] = -4 - 9 = -13$$

Ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = \left[(4)(-2) - (-2)(3)\right] = -8 + 6 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \left[(2)(-2) - (3)(4)\right] = -4 - 12 = -16$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-13} = \frac{2}{13}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-16}{-13} = \frac{16}{13}$$

13.- Resolver por ***Cramer*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x+3y-6=0$$
$$2y=3x$$

Se deberán poner las ecuaciones en el formato adecuado para ***Cramer***:

$$2x+3y=6$$
$$3x-2y=0$$

La matriz de los coeficientes será:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=\left[(2)(-2)-(3)(3)\right]=-4-9=-13$$

Ahora:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=\left[(6)(-2)-(0)(3)\right]=-12-0=-12$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 0\end{vmatrix}=\left[(2)(0)-(3)(6)\right]=0-18=-18$$

Luego:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-12}{-13}=\frac{12}{13}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-18}{-13}=\frac{18}{13}$$

14.- Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}=\Delta$$

Las dos primeras columnas se copian de nuevo, a continuación de la tercera columna:

$$\Delta=\left[(2)(3)(-1)+(-1)(6)(5)+(3)(0)(2)\right]-\left[(5)(3)(2)+(3)(-1)(-1)+(0)(6)(2)\right]$$
$$\Delta=(-6-30+0)-(30+3+0)=-36-33=-69$$

15.- Evaluar el siguiente determinante por menores:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=$$

Se parte de la segunda fila:

$$\Delta=-0\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$$
$$\Delta=2\left[(3)(2)-(1)(4)\right]=2(6-4)=4$$

16.- Evaluar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{vmatrix}=\Delta$$

Se debe recordar que el valor de un determinante no cambia si a los elementos de una fila (una columna) se le suman, multiplicados por ***m***, los correspondientes elementos de otra fila (otra columna). Entonces, inspeccionando el determinante dado, dos de los elementos de la segunda columna son el doble de los elementos correspondientes en la primera columna; entonces, se multiplicarán todos los elementos de la primera columna por **(-2)** y serán sumados a sus correspondientes en la segunda columna, como sigue:

$$\begin{vmatrix}2 & 4+(-2)(2) & 1\\ 3 & 6+(-2)(3) & 2\\ 5 & 2+(-2)(5) & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & -8 & 4\end{vmatrix}=\Delta$$

$$\Delta = -(-8)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot(4-3) = 8$$

17.- Evaluar el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix} =$$

Se multiplicarán todos los elementos de la segunda columna por **(-1)** y los productos se le sumarán a los correspondientes elementos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 29+(-1)(26) & 26 & 22 \\ 25+(-1)(31) & 31 & 27 \\ 63+(-1)(54) & 54 & 46 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 26 & 22 \\ -6 & 31 & 27 \\ 9 & 54 & 46 \end{vmatrix} = \Delta$$

Ahora se hace lo mismo, se multiplican los elementos de la segunda columna por (**-1**) y los productos se le suman a los correspondientes elementos de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 26 & 22+(-1)(26) \\ -6 & 31 & 27+(-1)(31) \\ 9 & 54 & 46+(-1)(54) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix} = \Delta$$

Este determinante, que sigue siendo igual en valor al original, se puede reescribir así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3(1) & 26 & -4 \\ 3(-2) & 31 & -4 \\ 3(3) & 54 & -8 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & -4 \\ -2 & 31 & -4 \\ 3 & 54 & -8 \end{vmatrix} = \Delta$$

Se puede también, sacar **(-4)** como factor común de la última columna, entonces se puede escribir:

$$(3)\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

Ahora, se multiplican cada uno de los elementos de la primera fila por **(-1)** y los productos se le suman a los elementos correspondientes de la segunda fila:

$$\Delta = (-12)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2-1 & 31-26 & 1-1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix} = (-12)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix}$$

Por último, se multiplican cada uno de los elementos de la primera fila por **(-2)** y los productos se le suman a los correspondientes elementos de la tercera fila:

$$\Delta = (-12)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3(-2(1))+ & 54+(-2)(26) & 2+(-2)(1) \end{vmatrix} = (-12)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = (-12)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-12)\cdot\left[(-3)(2)-(1)(5)\right] = (-12)(-6-5) =$$

$$\Delta = (-12)\cdot(-11) = 132$$

18.- Encontrar el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

El determinante dado se puede transformar en la suma de dos determinantes, como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

O sea: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$

Tomando ahora el determinante Δ_2, podemos multiplicar cada elemento de la segunda columna por (-3) y cada producto sumarlo al correspondiente elemento en la primera columna, como sigue:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 57+(-3)(19) & 19 & 21 \\ 39+(-3)(13) & 13 & 14 \\ 72+(-3)(24) & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 0 & 24 & 26 \end{vmatrix} = 0$$

El valor del determinante Δ_2 es igual a cero porque todos los elementos de la primera columna son iguales a cero y en todos los productos posibles siempre estará involucrado uno de esos elementos. Entonces, el problema original se convierte en $\Delta = \Delta_1$.

Ahora, Δ_1 puede ser transformado de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19 \\ 0 & 13 & 13 \\ 9 & 24 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_3 + \Delta_4$$

En este caso $\Delta_3 = 0$ porque la segunda y la tercera columna tienen sus elementos correspondientes exactamente iguales.

Entonces el problema se reduce a:

$$\Delta = \Delta_4$$

Luego:

$$\Delta = \Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 10 \cdot \left[(13)(2) - (24)(1) \right] + 9 \cdot \left[(19)(1) - (13)(2) \right] =$$

$$\Delta = 10 \cdot (26 - 24) + 9 \cdot (19 - 26) = 10 \cdot 2 + 9 \cdot (-7) = 20 - 63 = -43$$

Otra manera de hacer este problema es copiar el determinante original agregando a continuación las copias exactas de la primera y segunda columna:

19.- Encontrar el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 38 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix} =$$

Este determinante debe ser simplificado para facilitar su cálculo. Se empezará por multiplicar cada elemento de la segunda columna por **(-2),** y luego sumando cada unoi de estos productos a sus correspondientes elementos en la primera columna, como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 + (-2)(11) & 11 & 20 & 38 \\ 6 + (-2)(3) & 3 & 0 & 9 \\ 11 + (-2)(-2) & -2 & 36 & 3 \\ 19 + (-2)(6) & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 38 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 15 & -2 & 36 & 3 \\ 7 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix} =$$

Ahora se multiplica cada elemento de la segunda columna por **(-3)** y cada producto se suma a sus correspondientes elementos en la cuarta columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 38+(-3)(11) \\ 0 & 3 & 0 & 9+(-3)(3) \\ 15 & -2 & 36 & 3+(-3)(-2) \\ 7 & 6 & 17 & 22+(-3)(6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & -2 & 36 & 9 \\ 7 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 15 & 36 & 9 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix} =$$

Todavía este determinante de 3×3 se puede simplificar más, al multiplicar cada elemento de la tercera fila por **(-1)** y cada producto sumarlo a sus correspondientes elementos en la segunda fila:

$$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 15+(-1)(7) & 36+(-1)(17) & 9+(-1)(4) \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix} =$$

Ahora, multiplicando cada elemento de la segunda fila por **(-1)** y sumando cada producto a sus correspondientes elementos en la primera fila:

$$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 8+(-1)(8) & 20+(-1)(19) & 5+(-1)(5) \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\left[(8)(4)-(7)(5)\right] = (-3)(32-35) = (-3)\cdot(-3) = 9$$

20.- Encontrar el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por menores, partiendo de los elementos de la primera fila:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 3\cdot\left[(5)(6)-(7)(2)\right] - 2\cdot\left[(1)(6)-(4)(2)\right] + 4\cdot\left[(1)(7)-(4)(5)\right]$$

$$\Delta = 3\cdot(30-14)-2\cdot(6-8)+4\cdot(7-20)=3\cdot(16)-2\cdot(-2)+4\cdot(-13)=$$
$$\Delta = 48+4-52=0$$

21. Encontrar el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por menores, partiendo de los elementos de la tercera columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-6)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta = 3\cdot(1+15)+6\cdot(-2-12)-2\cdot(10-4)=48-84-12=-48$$

22. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por medio de la regla de Cramer:

$$3x+y-2z=-3$$
$$2x+7y+3z=9$$
$$4x-3y-z=7$$

La matriz de los coeficientes es la siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta = 3\cdot\left[(7)(-1)-(-3)(3)\right]-\left[(2)(-1)-(4)(3)\right]-2\cdot\left[(2)(-3)-(4)(7)\right]=$$
$$\Delta = 3\cdot(-7+9)-(-2-12)-2(-6-7)=6+14+68=88$$

Luego:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_x = -3\cdot(-7+9)-(-9-21)-2(-27-49) = -6+30+152 = 176$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_y = 3\cdot(-9-21)+3\cdot(-2-12)-2\cdot(14-36) =$$

$$\Delta_y = -90-42+44 = -88$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_z = 3\cdot(49+27)-(14-36)-3\cdot(-6-28) =$$

$$\Delta_z = 228+22+102 = 352$$

Ahora se pueden calcular las variables:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{176}{88} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-88}{88} = -1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{352}{88} = 4$$

23.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, usando ***Cramer***:

$$2x - y - 2z = 4$$
$$x + 3y - z = -1$$
$$x + 2y + 3z = 5$$

La matriz de los coeficientes es la siguiente, usando la primera columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta = 2\cdot\left[(3)(3)-(2)(-1)\right]-(-1)\cdot\left[(-1)(3)-(2)(-2)\right]+1\cdot\left[(-1)(-1)-(3)(-2)\right]=$$
$$\Delta = 2(11)-1(1)+1(7)=28$$

Ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta_x = 4\left[(3)(3)-(2)(-1)\right]-(-1)\left[(-1)(3)-(2)(-2)\right]+5\cdot\left[(-1)(-1)-(3)(-2)\right]$$
$$\Delta_x = 4\cdot(11)+1\cdot(1)+5\cdot(7)=80$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta_y = 2\cdot\left[(-1)(3)-(5)(-1)\right]-1\cdot\left[(4)(3)-(5)(-2)\right]+1\cdot\left[(4)(-1)-(-1)(-2)\right]$$
$$\Delta_y = 2(2)-1(22)+1(-6)=-24$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$\Delta_z = 2\cdot\left[(3)(5)-(2)(-1)\right]-1\cdot\left[(-1)(5)-(2)(4)\right]+1\cdot\left[(-1)(-1)-(3)(4)\right]=$$
$$\Delta_z = 2(17)-1(-13)+1(-11)=36$$

Entonces:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{80}{28}=\frac{20}{7}$$
$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-24}{28}=-\frac{6}{7}$$
$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{36}{28}=\frac{9}{7}$$

24.- Demostrar que las siguientes ecuaciones no son independientes:

$$5x+4y+11z=3$$
$$6x-4y+2z=1$$
$$x+3y+5z=2$$

Para probar lo requerido por la pregunta, se debe empezar por calcular el valor de la matriz de los coeficientes, y si, éste valor es igual a cero, las ecuaciones son dependientes y si ***no*** es igual a cero las ecuaciones son independientes.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & 11\\ 6 & -4 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=$$
$$\Delta=5\cdot\left[(-4)(5)-(2)(3)\right]-4\cdot\left[(6)(5)-(1)(2)\right]+11\cdot\left[(6)(3)-(1)(-4)\right]=$$
$$\Delta=5\cdot(-20-6)-4\cdot(30-2)+11\cdot(18+4)=-130-112+242=0$$

Esto quiere decir que las ecuaciones no son independientes.

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #32.

Tema: Trigonometría - Transformación de sumas en productos.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

- $$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
- $$\cos p-\cos q=-2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
- $$senp+senq=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
- $$senp-senq=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

PREGUNTAS:

1.-

$$sen\left(105^{o}\right)+sen\left(15^{o}\right)==2sen\left(\frac{105^{o}+15^{o}}{2}\right)\cos\left(\frac{105^{o}-15^{o}}{2}\right)=2sen60^{o}\cos 45^{o}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.-

$$\cos 90^o - \cos 40^o = -2\cdot sen\left(\frac{90^o + 40^o}{2}\right) sen\left(\frac{90^o - 40^o}{2}\right) =$$

$$= -2\cdot sen 65^o \cdot sen 25^o = -2\cdot\left(0,906\right)\cdot\left(0,4226\right) = -0,76578$$

3.-

$$\cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{16\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{16\pi}{9}-\frac{2\pi}{9}}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{18\pi}{9}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{14\pi}{9}}{2}\right) = 2\cos(\pi)\cos\frac{14\pi}{18} = 2\cdot(-1)\cdot(-0,7668) =$$

$$= 1,532$$

4.-

$$sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) - sen\left(\frac{7\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{7\pi}{9}}{2}\right) sen\left(\frac{\frac{2\pi}{9}-\frac{7\pi}{9}}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) sen\left(-\frac{5\pi}{18}\right) = 0$$

5.- $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos 60^o \cdot \cos 15^o = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(0,9659\right) = 0,9659$$

6.- $sen\left(3\alpha\right) + sen\alpha =$

$$= 2sen\left(\frac{3\alpha+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right) = 2sen2\alpha\cos\alpha = 2\left[2sen\alpha\cos\alpha\right]\cdot\cos\alpha =$$

$$4sen\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

7.- $\cos(4\alpha)-\cos(2\alpha)=$

$$=-2sen\left(\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{4\alpha-2\alpha}{2}\right)=-2sen(3\alpha)sen\alpha.$$

8.- $sen(60^{o}+\alpha)+sen(30^{o}-\alpha)=$

$$=2sen\frac{(60^{o}+\alpha)+(30^{o}-\alpha)}{2}\cdot\cos\frac{(60^{o}+\alpha)-(30^{o}-\alpha)}{2}=$$

$$=2sen\frac{90^{o}}{2}\cdot\cos\frac{30^{o}+2\alpha}{2}=2sen(45^{o})\cdot\cos(15^{o}+\alpha)$$

9.-

$$sen\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-sen\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{2}\right]\cdot sen\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{2}\right]=$$

$$=2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\alpha}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)$$

10.- $sen(\alpha)+2sen(2\alpha)+sen(3\alpha)=$

$$\left[sen(\alpha)+sen(3\alpha)\right]+2sen(2\alpha)=2sen\left(\frac{\alpha+3\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-3\alpha}{2}\right)+2sen(2\alpha)=$$

$$=2sen(2\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+2sen(2\alpha)=2sen\alpha(2\alpha)\cdot\left[1+\cos(-\alpha)\right]=$$

Aplicando que $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$

$2sen(2\alpha)\cdot[1+\cos(-\alpha)] = 2sen(2\alpha)\cdot[1+\cos(\alpha)] =$

Haciendo las siguientes transformaciones:

$1 = sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$

$\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Se puede entonces escribir que:

$$= 2sen(2\alpha)\cdot[1+\cos\alpha] =$$

$$= 2sen(2\alpha)\cdot\left[sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 2sen(2\alpha)\cdot 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4sen(2\alpha)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

11.- $\cos(\alpha)+2\cos(2\alpha)+\cos(3\alpha) =$

$$= [\cos(\alpha)+\cos(3\alpha)]+2\cos(2\alpha) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+3\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-3\alpha}{2}\right)+2\cos(2\alpha) =$$

$$= 2\cos(2\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+2\cos(2\alpha) =$$

Recordando que: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Se puede sustituir entonces en la ecuación anterior:

$$= 2\cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)+2\cos(2\alpha) = 2\cos(2\alpha)\cdot[\cos(\alpha)+1] =$$

$$= 2\cos(2\alpha)\cdot\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cos(2\alpha)\cdot 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos(2\alpha)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

12.- $$sen(2\alpha)-sen(2\beta)-2sen(\alpha-\beta)=$$

$$=2\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\alpha-2\beta}{2}\right)-2sen(\alpha-\beta)=$$
$$=2\cos(\alpha+\beta).sen(\alpha-\beta)-2sen(\alpha-\beta)=$$
$$=2sen(\alpha-\beta)\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)-1\right]=$$
$$=2sen(\alpha-\beta)\cdot\left[\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$
$$=2sen(\alpha-\beta)\cdot(-2)sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-4sen(\alpha-\beta)\cdot sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

Pero:

$$-sen(\alpha-\beta)=-\left[sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha\right]=$$
$$=sen\beta\cos\alpha-sen\alpha\cos\beta=sen(\beta-\alpha)$$

Luego, al expresión original será igual a:

$$=4sen(\beta-\alpha)\cdot sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

13.- $$sen(\alpha)+sen(3\alpha)+sen(7\alpha)+sen(9\alpha)=$$

$$=\left[sen(\alpha)+sen(3\alpha)\right]+\left[sen(7\alpha)+sen(9\alpha)\right]=$$
$$=2sen\left(\frac{\alpha+3\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-3\alpha}{2}\right)+2sen\left(\frac{7\alpha+9\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\alpha-9\alpha}{2}\right)=$$
$$=2sen\left(\frac{2\alpha}{}\right)\cdot\cos(-\alpha)+2sen(8\alpha)\cdot\cos(-\alpha)=$$

Recordar que: $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$

Entonces, se puede escribir que:

$$=2sen(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)+2sen(8\alpha)\cdot\cos(\alpha)=$$
$$=2\cos(\alpha)\cdot\left[sen(2\alpha)+sen(8\alpha)\right]=2\cos(\alpha)\left[2sen\left(\frac{2\alpha+8\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha-8\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$=4\cos(\alpha)\cdot\left[sen(5\alpha)\cos(-3\alpha)\right]=4\cos(\alpha)\cdot sen(5\alpha)\cdot sen(3\alpha)$$

14.-
$$\cos(\alpha)+\cos(4\alpha)-\cos(8\alpha)-\cos(11\alpha)=$$
$$=\left[\cos(\alpha)-\cos(11\alpha)\right]-\left[\cos(4\alpha)-\cos(8\alpha)\right]=$$
$$\left[-2sen\left(\frac{\alpha+11\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-11\alpha}{2}\right)\right]+\left[-2sen\left(\frac{4\alpha+8\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{4\alpha-8\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$=(-2)\left[sen(6\alpha)sen(-5\alpha)+sen(6\alpha)sen(-2\alpha)\right]$$
$$=(-2)sen(6\alpha)\cdot\left[sen(-5\alpha)+sen(-2\alpha)\right]$$

Recordar que:

$$sen(-5\alpha)=-sen(5\alpha)$$
$$sen(-2\alpha)=-sen(2\alpha)$$

Entonces, introduciendo estos valores en la ecuación anterior:

$$=\left[-2sen(6\alpha)\right]\cdot\left[-sen(5\alpha)-sen(2\alpha)\right]=$$
$$=2sen(6\alpha)\cdot\left[sen(5\alpha)+sen(2\alpha)\right]=2sen(6\alpha)\cdot\left[2sen\left(\frac{5\alpha+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\alpha-2\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$=4sen(6\alpha)\cdot sen\left(\frac{7\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right).$$

15.- $sen(6\alpha)+sen(2\alpha)+sen(4\alpha)=$

$$= 2sen(3\alpha)\cos(3\alpha) + \left[sen(2\alpha) + sen(4\alpha)\right] =$$

$$= 2sen(3\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \left[2sen\left(\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha-4\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 2sen(3\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \left[2sen(3\alpha)\cos(-\alpha)\right] =$$

$$= 2sen(3\alpha)\cdot\left[\cos(3\alpha) + \cos(\alpha)\right] = 2sen(3\alpha)\cdot\left[2\cos\left(\frac{3\alpha+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 4sen(3\alpha)\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha).$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #33.

Tema: Límites de expresiones algebraicas.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+2x^2-13x+10} = \lim_{x\to 1} \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador (N), se aplica Ruffini:

	1	4	1	-6
1	1	1	5	6
	1	5	6	6

$$N = (x-1)\left(x^2+5x+6\right)$$

Para el denominador (D), se aplica Ruffini:

	1	2	-13	10
1		1	3	-10
	1	3	-10	0

	2	-5	-3
3		6	3
	2	1	0

$$D=\left(x-1\right)\left(x+5\right)\left(x-2\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+5x+6\right)}{\left(x-1\right)\left(x+5\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x+}{x^2+3x-1}$$

2.- $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3-x^2-6x}=\lim_{x\to -2}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$

Para el numerador (N), se aplica Ruffini:

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0

$$N=\left(x+2\right)\left(x^2+x-2\right)$$

Para el denominador (D), se saca factor común y se factoriza:

$$D=x\left(x+2\right)\left(x-3\right)$$

Entonces, se sustituyen las expresiones equivalentes:

$$\lim_{x\to -2}\frac{N}{D}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x+2\right)\left(x^2+x-2\right)}{\left(x\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x\left(x-3\right)}=\frac{0}{10}=0$$

3.- $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-8x^2+21x-18}=\lim_{x\to 3}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$

Para el numerador (N) se aplica Ruffini:

	2	-5	-3
3		6	3
	2	1	0

$$N=\left(x-3\right)\left(2x+1\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	-8	21	-18
3		3	-15	18
	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$D=\left(x-3\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)=\left(x-3\right)^{2}\left(x-2\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(x-3\right)\left(2x+1\right)}{\left(x-3\right)^{2}\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(2x+1\right)}{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}=\frac{7}{0}=\infty$$

4.- $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{4}-x^{3}-3x^{2}+5x-2}{x^{4}-6x^{3}+8x^{2}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador, (N) se aplica Ruffini:

	1	-1	-3	5	-2
1		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	$\boxed{0}$

$$N=\left(x-1\right)\left(x^{3}-3x+2\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	-6	8	0	-3
1		1	-5	3	3
	1	-5	3	3	$\boxed{0}$

$$D=\left(x-1\right)\left(x^{3}-5x^{2}+3x+3\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to 1}\frac{N}{D}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(x^{3}-3x^{2}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x^{3}-5x^{2}+3x+3\right)}=\frac{0}{3}=0$$

5.- $$\lim_{x\to 2}\frac{N}{D}=\lim_{x\to 2}\frac{x^{5}+5x^{4}-9x^{3}-8x^{2}-3x-2}{3x^{4}-5x^{3}+7x-22}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador,(N), se aplica Ruffini:

	1	5	-9	-8	-3	-2
2		2	14	10	4	2
	1	7	5	2	1	0

$$N = (x-2)\left(x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x + 1\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	3	-5	0	7	-22
2		6	2	4	22
	3	1	2	11	0

$$D = (x-2)\left(3x^3 + x^2 + 2x + 11\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to 2} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x + 1\right)}{(x-2)\left(3x^3 + x^2 + 2x + 11\right)} = \frac{97}{43}$$

6.- $$\lim_{x\to 1} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 1} \frac{x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8x - 7}{2x^6 - 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	1	-4	3	2	-3	8	-7
1		1	-3	0	2	-1	7
	1	-3	0	2	-1	7	0

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	2	-2	0	3	-4	6	-5
1		2	0	0	3	-1	5
	2	0	0	3	-1	5	0

$$D = (x-1)\left(2x^5 + 3x^2 - x + 5\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la ecuación original:

$$\lim_{x\to 1} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 7\right)}{(x-1)\left(2x^5 + 3x^2 - x + 5\right)} = \frac{2}{3}$$

7.- $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{N}{D} = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{4x^4+8x^3+9x^2+5x+1}{4x^3-4x^2-7x-2} = \frac{0}{0}$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	4	8	9	5	1
(-1/2)		-2	-3	-3	-1
	4	6	6	2	0

$$N = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^3+6x^2+6x+2\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	4	-4	-7	-2
(-1/2)		-2	3	2
	4	-6	-4	0

$$D = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-6x-4\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{N}{D} = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^3+6x^2+6x+2\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-6x-4\right)} = \frac{0}{0}$$

El resultado sigue siendo indeterminado, por lo que se debe seguir simplificando la expresión dada:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{N_1}{D_1} = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{4x^3+6x^2+6x+2}{4x^2-6x-4} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador, $\left(N_1\right)$, se aplica Ruffini:

	4	6	6	2
(-1/2)		-2	-2	-2
	4	4	4	0

$$N_1 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+1\right)$$

Para el denominador, $\left(D_1\right)$, se aplica Ruffini:

	4	-6	-4
(-1/2)		-2	4
	4	-8	$\boxed{0}$

$$D_1 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la nueva expresión:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{N_1}{D_1} = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+1\right)}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = -\frac{3}{10}$$

8.- $$\lim_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)} \frac{N}{D} = \lim_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)} \frac{3x^4-7x^3-2x-4}{3x^4-10x^3+7x^2+x-6} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	3	-7	0	-2	-4
(-2/3		-2	6	-4	4
	3	-9	6	-6	$\boxed{0}$

$$N = \left(x+\frac{2}{3}\right)\left(3x^3-9x^2+6x-6\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	3	-10	7	1	-6
(-2/3)		-2	8	-10	6
	3	-12	15	-9	$\boxed{0}$

$$D = \left(x+\frac{2}{3}\right)\left(3x^3-12x^2+15x-9\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)}\frac{N}{D}=\lim_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)}\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(3x^3-9x^2+6x-6\right)}{\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(3x^3-12x^2+15x-9\right)}=\frac{134}{227}$$

9.- $$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{N}{D}=\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{54x^3-81x^2+36x-5}{27x^3-27x^2+9x-1}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador,(N), se aplica Ruffini:

	54	-81	36	-5
(1/3)		18	-21	5
	54	-63	15	0

$$N=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(54x^2-63x+15\right)=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{6}\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	27	-27	9	-1
(1/3)		9	-6	1
	27	-18	3	0
(1/3)		9	-3	
	27	-9	0	
(1/3)		9		
	27	0		

$$D=27\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{N}{D}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{6}\right)}{27\left(x-\frac{1}{3}\right)^3}=-\infty$$

10.- $\lim_{x\to(-1)} \frac{N}{D} = \lim_{x\to(-1)} \frac{3x^5+2x^3+2x^2+x+4}{2x^5+7x^4-2x^2+11x+8} = \frac{0}{0}$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	3	0	2	2	1	4
-1		-3	3	-5	3	-4
	3	-3	5	-3	4	0

$$N = (x+1)\left(3x^4-3x^3+5x^2-3x+4\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	2	7	0	-2	11	8
-1		-2	-5	5	-3	-8
	2	5	-5	3	8	0

$$D = (x+1)\left(2x^4+5x^3-5x^2+3x+8\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{x\to(-1)} \frac{N}{D} = \lim_{x\to(-1)} \frac{(x+1)\left(3x^4-3x^3+5x^2-3x+4\right)}{(x+1)\left(2x^4+5x^3-5x^2+3x+8\right)} = \frac{18}{-3} = -6$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #34.

Tema: Límites de funciones trascendentes.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- $\lim_{x\to 10} \dfrac{\lg^2 x + 2\lg x - 3}{\lg^2 x + 4\lg x - 5} = \dfrac{0}{0}$

Recordar que cuando ***x = 10:***

$$\lg x = 1; 10^1 = 10.$$

Hacer $\lg x = y;$ entonces, cuando $x = 10 \Rightarrow y = 1.$

La expresión original se transforma entonces en:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2 + 2y - 3}{y^2 + 4y - 5} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+3)}{(y-1)(y+5)} = \lim_{y\to 1} \frac{(y+3)}{(y+5)} = \frac{2}{3}$$

2.- $\lim_{x\to 100} \dfrac{\lg^3 x - 12\lg x + 16}{\lg^3 x - 3\lg^2 x + 4} = \dfrac{0}{0}$

Haciendo $\lg x = y \Rightarrow x \to 100 \Rightarrow y = 2$

Entonces:

$$\lim_{y\to 2} \frac{y^3 - 12y + 16}{y^3 - 3y^2 + 4} = \lim_{y\to 2} \frac{N}{D}$$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	1	0	-12	16
2		2	4	-16
	1	2	-8	0

$$N = (y-2)\left(y^2 + 2y - 8\right) = (y-2)(y-2)(y+4) = (y-2)^2 (y+4)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	0

$$D = (y-2)\left(y^2 - y - 2\right) = (y-2)(y-2)(y+1) = (y-2)^2 (y+1)$$

Sustituyendo los valores equivalentes en la ecuación original (*transformada*):

$$\lim_{y\to 2} \frac{(y-2)^2 (y+4)}{(y-2)^2 (y+1)} = \lim_{y\to 2} \frac{(y+4)}{(y+1)} = \frac{6}{3} = 2$$

3.- $\lim_{x\to 0,001} \frac{\lg^3 x + 9\lg^2 x + 26\lg x + 24}{\lg^3 x + 7\lg^2 x + 7\lg x - 15} = \frac{0}{0}$

Haciendo $\lg x = y \Rightarrow x \to 0,001 \Rightarrow y \to (-3)$

Entonces, la expresión original se transforma en:

$$\lim_{y\to(-3)} \frac{N}{D} = \lim_{y\to(-3)} \frac{y^3 + 9y^2 + 26y + 24}{y^3 + 7y^2 + 7y - 15} =$$

Para el numerador,(N), se aplica Ruffini:

	1	9	26	24
-3		-3	-18	-24
	1	6	8	0

$$N=(y+2)\left(y^2+6y+8\right)=(y+2)(y+3)(y+4)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	7	7	-15
-3		-3	-12	15
	1	4	-5	0

$$D=(y+3)\left(y^2+4y-5\right)=(y-1)(y+3)(y+5)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original *(transformada):*

$$\lim_{y\to(-3)}\frac{(y+2)(y+3)(y+4)}{(y-1)(y+3)(y+5)}=\lim_{y\to(-3)}\frac{(y+2)(y+4)}{(y-1)(y+5)}=\frac{1}{8}$$

4.- $\lim_{x\to 8}\dfrac{\lg_2^4 x-5\lg_2^3 x+5\lg_2^2 x+5\lg_2 x-6}{\lg_2^3 x+3\lg_2^2 x-10\lg_2 x-24}=\dfrac{0}{0}$

Tener presente que si $2^3=8\Rightarrow \lg_2 8=3$

Haciendo $\lg_2 x=y\Rightarrow x\to 8\Rightarrow y\to 3$

La expresión transformada será entonces:

$$\lim_{y\to 3}\frac{N}{D}=\lim_{y\to 3}\frac{y^4-5y^3+5y^2+5y-6}{y^3+3y^2-10y-24}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador (N) se aplica Ruffini:

	1	-5	5	5	-6
3		3	-6	-3	6
	1	-2	-1	2	0

$$N=(y-3)\left(y^3-2y^2-y+2\right)=(y-3)(y-2)(y-1)(y+1)$$

Esta expresión factorizada completa para el numerador se encontró aplicando de nuevo Ruffini a la expresión $y^3+3y^2-10y-24$ dividiendo por $(y-2)$.

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	3	-10	-24
3		3	18	24
	1	6	8	0

$$D=(y-3)\left(y^2+6y+8\right)=(y-3)(y+2)(y+4)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original (*transformada)*:

$$\lim_{y\to 3}\frac{(y-3)(y-2)(y-1)(y+1)}{(y-3)(y+2)(y+4)}=\lim_{y\to 3}\frac{(y-2)(y-1)(y+1)}{(y+2)(y+4)}=\frac{8}{35}$$

5.- $$\lim_{x\to\frac{1}{9}}\frac{\lg_3^3 x+5\lg_3^2 x+2\lg_3 x-8}{\lg_3^3 x+6\lg_3^2 x+11\cdot\lg_3 x+6}=\frac{0}{0}$$

Se hará $\lg_3 x=y,$

Tomar en cuenta que $\frac{1}{9}=3^{-2};x=3^{-2}\Rightarrow y=-2.$

Transformando la expresión original:

$$\lim_{y\to(-2)}\frac{N}{D}=\lim_{y\to(-2)}\frac{y^3+5y^2+2y-5}{y^3+6y^2+11y+6}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	1	5	2	-8
-2		-2	-6	8
	1	3	-4	0

$$N=(y+2)\left(y^2+3y-4\right)=(y+2)(y-1)(y+4)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	6	11	6
-2		-2	-8	-6
	1	4	3	0

$$D=\left(y+2\right)\left(y^2+4y+3\right)=\left(y+2\right)\left(y+1\right)\left(y+3\right)$$

Sustituyendo los valores equivalentes en la expresión original (*transformada*):

$$\lim_{y\to(-2)}\frac{N}{D}=\lim_{y\to(-2)}\frac{\left(y-1\right)\left(y+2\right)\left(y+4\right)}{\left(y+1\right)\left(y+2\right)\left(y+4\right)}=\lim_{y\to(-2)}\frac{\left(y-1\right)}{\left(y-1\right)}=\frac{-3}{-1}=3.$$

6.- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg^3x-2tg^2x-tgx+2}{3tg^3x+2tg^2x-7tgx+2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$$

Recordar que si $x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow tgx\to 1$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$$N=\left(tgx-1\right)\left(tg^2x-tgx-2\right)=\left(tgx-1\right)\left(tgx+1\right)\left(tgx+2\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	3	2	-7	2
1		3	5	-2
	3	5	-2	0

$$D=\left(tgx-1\right)\left(3tg^2x+5tgx-2\right)$$

Se hace ahora $3tg^2x+5tgx-2=0$ y se aplica la resolvente, siendo la variable tgx.

$$\left(tgx\right)_1=-2;\left(tgx\right)_2=\frac{1}{3}$$

Entonces, se puede escribir que:

$$D = 3\left(tgx - 1\right)\left(tgx + 2\right)\left(tgx - \frac{1}{3}\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{tg \to 1} \frac{N}{D} = \lim_{tgx \to 1} \frac{\left(tgx - 1\right)\left(tgx + 1\right)\left(tgx - 2\right)}{3\left(tgx - 1\right)\left(tgx + 2\right)\left(tgx - \frac{1}{3}\right)} =$$

$$\Rightarrow \lim_{tgx \to 1} \frac{\left(tgx + 1\right)\left(tgx - 2\right)}{3\left(tgx + 2\right)\left(tgx - \frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}$$

7.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{4sen^3x - 3senx + 1}{4sen^3x - 12sen^2x + 9senx - 2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$

Recordar que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Para el denominador, (N), se aplica Ruffini:

	4	0	-3	1
(1/2)		2	1	-1
	4	2	-2	0

$$N = \left(senx - \frac{1}{2}\right)\left(4sen^2x + 2senx - 2\right) = 4 \cdot 2\left(senx - \frac{1}{2}\right)\left(2sen^2x + senx - 1\right)$$

Para el denominador;(D), se aplica Ruffini:

	4	-12	9	-2
(1/2)		2	-5	2
	4	-10	4	0

$$D = \left(senx - \frac{1}{2}\right)\left(4sen^2x - 10senx + 4\right) = 4 \cdot 2\left(senx - \frac{1}{2}\right)\left(2sen^2x - 5senx + 2\right)$$

Introduciendo los valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{senx\to\frac{1}{2}} \frac{N}{D} = \lim_{senx\to\frac{1}{2}} \frac{8\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(2sen^2x+senx-2\right)}{8\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(2sen^2x-5senx+2\right)} =$$

$$\lim_{senx\to\frac{1}{2}} \frac{N_1}{D_1} = \lim_{senx\to\frac{1}{2}} \frac{\left(2sen^2x+senx-2\right)}{\left(2sen^2x-5senx+2\right)} = \frac{0}{0}$$

Como se mantiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ se continúa simplificando la nueva expresión $\frac{N_1}{D_1}$.

Para el numerador, $\left(N_1\right)$, se aplica Ruffini:

	2	1	-1
(1/2)		1	1
	2	2	0

$$N_1 = \left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(2senx+2\right) = 2\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(senx+1\right)$$

Para el denominador, $\left(D_1\right)$, se aplica Ruffini:

	2	-5	2
(1/2)		1	-2
	2	-4	0

$$D_1 = \left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(2senx-4\right) = 2\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(senx-2\right)$$

Sustituyendo valores en la expresión actual:

$$\lim_{senx\to\frac{1}{2}} \frac{2\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(senx+1\right)}{2\left(senx-\frac{1}{2}\right)\left(senx-2\right)} = \lim_{senx\leftarrow\frac{1}{2}} \frac{\left(senx+1\right)}{\left(senx-2\right)} = -1$$

8.- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{16sen^4x-8sen^2x-3}{16sen^4x-16sen^2x+3}=\lim_{senx\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador, (N), se aplica Ruffini:

	16	0	-8	0	-3
$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$		$\boxed{8\sqrt{3}}$	12	$\boxed{2\sqrt{3}}$	3
	16	$\boxed{8\sqrt{3}}$	4	$\boxed{2\sqrt{3}}$	0

$$N=\left(senx-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(16sen^3x+8\sqrt{3}sen^2x+4senx+2\sqrt{3}\right)$$

Para el denominador; D, se aplica Ruffini:

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	16	0	-16	0	3
		$\boxed{8\sqrt{3}}$	12	$\boxed{-2\sqrt{3}}$	3
	16	$\boxed{8\sqrt{3}}$	-4	$\boxed{-2\sqrt{3}}$	0

$$D=\left(senx-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(16sen^3x+8\sqrt{3}sen^2x-4senx-2\sqrt{3}\right)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original:

$$\lim_{senx\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\left(senx-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(16sen^3x+8\sqrt{3}sen^2x+4senx+2\sqrt{3}\right)}{\left(senx-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(16sen^3x+8\sqrt{3}sen^2x-4senx-2\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{senx\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{16sen^3x+8\sqrt{3}senx+4senx+2\sqrt{3}}{16sen^3x+8\sqrt{3}sen^2x-4senx-2\sqrt{3}}=2$$

9.- $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4^{3x}+2\cdot 4^{2x}-5\cdot 4^{x}-6}{4^{3x}-10\cdot 4^{2x}+23\cdot 4^{x}-14}=\dfrac{0}{0}$

Se hace $4^x = y \Rightarrow x \to \dfrac{1}{2} \Rightarrow y \to 2.$

Luego, la expresión original (*transformada*), será:

$$\lim_{y\to 2} \frac{y^3+2y^2-5y-6}{y^3-10y^2+23y-14}=\lim_{y\to 2}\frac{N}{D}=\frac{0}{0}$$

Para el numerador (N), se aplica Ruffini:

	1	2	-5	-6
2		2	8	6
	1	4	3	0

$$N=(y-2)\left(y^2+4y+3\right)=(y-2)(y+1)(y+3)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	-10	23	-14
2		2	-16	14
	1	-8	7	0

$$D=(y-2)\left(y^2-8y+7\right)=(y-2)(y-1)(y-7)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original (*transformada*):

$$\lim_{y\to 2}\frac{N}{D}=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y+1)(y+3)}{(y-2)(y-1)(y-7)}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y+1)(y+3)}{(y-1)(y-7)}=-3$$

10.- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\pi^{3x}+4\pi^{2x}-11\pi^{x}+6}{\pi^{3x}+11\pi^{2x}-25\pi^{x}+13}=\dfrac{0}{0}$

Se hace $\pi^x = y \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow y \to 1$

Entonces, la expresión original se transforma en:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^3+4y^2-11y+6}{y^3+11y^2-25y+13} = \lim_{y\to 1} \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador,(N), se aplica Ruffini:

	1	4	-11	6
1		1	5	-6
	1	5	-6	$\boxed{0}$

$$N = (y-1)\left(y^2+5y-6\right) = (y-1)(y-1)(y+6) = (y-1)^2(y+6)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	11	-25	13
1		1	12	-13
	1	12	-13	$\boxed{0}$

$$D = (y-1)\left(y^2+12y-13\right) = (y-1)(y-1)(y+13) = (y-1)^2(y+13)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original (*transformada)*:

$$\lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2(y+6)}{(y-1)^2(y+13)} = \lim_{y\to 1} \frac{(y+6)}{(y+13)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

11.- $\lim_{x\to(-1)} \dfrac{4\cdot 2^{3x}+8\cdot 2^{2x}-11\cdot 2^x+3}{2\cdot 2^{3x}-2^{2x}-2\cdot 2^x+1} = \dfrac{0}{0}$

Se hace $2^x = y \Rightarrow x \to -1 \Rightarrow y \to 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

Luego, la expresión original transformada será:

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{4y^3+8y^2-11y+3}{2y^3-y^2-2y+1} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Para el numerador,(N), se aplica Ruffini:

	4	8	-11	3
(1/2)		2	5	-3
	4	10	-6	0

$$N=\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(4y^2+10y-6\right)=4\cdot 2\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+3\right)=$$

$$N=8\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\left(y+3\right)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	2	-1	-2	1
(1/2)		1	0	-1
	2	0	-2	0

$$D=\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(2y^2-2\right)=2\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y^2-1\right)=2\cdot 2\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-1\right)\left(y+1\right)$$

Sustituyendo los valores equivalentes en la expresión original (*transformada*):

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{8\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\left(y+3\right)}{4\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+1\right)\left(y-1\right)}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+3\right)}{\left(y+1\right)\left(y-1\right)}=0$$

12.- $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^{2x}+e^{x+1}-2e^2}{e^{2x}-3e^{x+1}+2e^2}=\dfrac{0}{0}$

Se hace $e^x=y\Rightarrow x\to 1\Rightarrow y=e$

También recordar que $e^{x+1}=e\cdot e^x$

Luego, se transforma la expresión original en:

$$\lim_{y\to e} \frac{y^2+ey-2e^2}{y^2-3ey+2e^2} = \lim_{y\to e} \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Para el denominador, (N), se aplica Ruffini:

	1	e	$\boxed{-2e^2}$
e		e	$\boxed{2e^2}$
	1	2e	$\boxed{0}$

$$N = (y-e)(y+2e)$$

Para el denominador, (D), se aplica Ruffini:

	1	(-3e)	$\boxed{2e^2}$
e		e	$\boxed{-2e^2}$
	1	(-2e)	$\boxed{0}$

$$D = (y-e)(y-2e)$$

Sustituyendo valores equivalentes en la expresión original (*transformada*):

$$\lim_{y\to e} \frac{(y-e)(y+2e)}{(y-e)(y-2e)} = \frac{3}{-1} = -3$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #35.

Tema: Cuestionario resumen de guías del #24 al #34.

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

- Para dividir un monomio ax^m entre bx^n se dividen primero los coeficientes entre si y luego las potencias. Si $m \geq n$, entonces $ax^m \div bx^n = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot x^{m-n}$.
- Al dividir los polinomios $P(x)$ entre $Q(x)$ sobre Q, tales que el grado de $P(x)$ sea mayor o igual al grado de $Q(x)$, existen dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que: $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$. El grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. El polinomio $P(x)$ es el dividendo, el polinomio $Q(x)$ es el divisor, $C(x)$ es el polinomio cociente y $R(x)$ es el residuo. Si $R(x) = 0$, se dice que la división es exacta, de lo contrario la división es inexacta.
- Para dividir dos polinomios entre si se deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

(a) Se ordenan en forma decreciente tanto el polinomio dividendo como el divisor.
(b) Se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del polinomio divisor. El resultado es el primer término del cociente, el cual se multiplica por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
(c) Este proceso se continúa hasta que el grado del polinomio obtenido sea menor que el grado del polinomio divisor.

- Hay dos maneras de obtener una fracción equivalente a otra:

(a) **Por amplificación**: multiplicando tanto el numerador como el denominador de la fracción por un mismo polinomio.
(b) **Por simplificación**: dividendo tanto el numerador como el denominador de la fracción entre un mismo polinomio.

PREGUNTAS:

1.- Efectuar las siguientes divisiones:

(a) $54x^3 \div 9x^2 =$

(b) $-30y^{10} \div \left(-10y^5\right) =$

© $45z^{100} \div \left(-5z^{50}\right) =$

(d) $14m^2a \div 7ma =$

(e) $3x^2y^6 \div \left(-3xy^5\right) =$

(f) $2x^{13}y^{10}z \div \left(4x^{10}y^{10}\right) =$

2.- Resolver las siguientes divisiones:

(a) $\left(4x^3 + 2x^2 - 4x\right) \div (-2x) =$

(b) $\left(4x^4 - 3x^3 + 4x^2\right) \div x^2 =$

© $(13x + 26) \div (-13) =$

(d) $\left(3m^6 - m^4 + 3m^3\right) \div \left(-3m^3\right) =$

(e) $\left(-10y^{10} + 100y^8 - y^4\right) \div \left(10y^4\right) =$

(f) $\left(\frac{1}{2}x^{16} + \frac{1}{4}x^{12} - 2x^{20} + 4x^{10}\right) \div \left(-\frac{1}{2}x^8\right) =$

(g) $\left(z^3n + z^2n - zn\right) \div (-zn) =$

(h) $\left(8p^{21} - 24p^{18} - 16p^{14} + 12p^{10}\right) \div \left(-4p^8\right) =$

3.- Realizar las siguientes divisiones de polinomios, indicando el resto en cada caso:

(a) $\left(a^5-3a+1\right)\div\left(a-1\right)=$

(b) $\left(6x^2+3x+x^7+5\right)\div\left(x+6\right)=$

© $\left(2x^3+1+4x^5\right)\div\left(x-1\right)=$

(d) $\left(4x^6-3x^2+4x+1\right)\div\left(2x^2+x\right)=$

(e) $\left(4x^2+2x+4\right)\div\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)=$

(f) $\left(x^5+1\right)\div\left(x+1\right)=$

(g) $\left(a^4+7a+1\right)\div\left(a+1\right)=$

(h) $\left(\frac{3}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{5}{3}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)=$

(i) $\left(x^{10}-x^5+1\right)\div\left(x+1\right)=$

(j) $\left(p^6-1\right)\div\left(p+1\right)=$

(k) $\left(2x^3+x^2+x^6-3x^4+x-2\right)\div\left(x^2+x-2\right)=$

(l) $\left(x^{12}+2x^7-\frac{1}{2}x^8-x^3+\frac{3}{2}x^5+3\right)\div\left(\frac{1}{2}x^5+1\right)=$

4.- Indicar cuál de los pares de fracciones son equivalentes:

(a) $\frac{x+1}{x+2}$ y $\frac{3x^2+3x}{3x^2+6x}$

(b) $\frac{x}{2x+1}$ y $\frac{x^2-x}{2x^2+x}$

© $\frac{x+3}{3}$ y $\frac{x^2-9}{3x-9}$

(d) $\dfrac{x-10}{x+10}$ y $\dfrac{x^2-100}{x^2+100}$

(e) $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-12}$ y $\dfrac{x-1}{x-2}$

5.- Efectuar las operaciones indicadas en cada caso:

(a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x+3}+\dfrac{6x}{x+3}=$

(b) $\dfrac{p+1}{p-1}+\dfrac{p}{p-1}=$

© $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}=$

(d) $\dfrac{5}{\left(x+5\right)^2}+\dfrac{5}{\left(x+5\right)}=$

(e) $\dfrac{5}{a+2}+\dfrac{3}{a+2}=$

(f) $\dfrac{3}{3a+7}+\dfrac{8}{a+7}=$

(g) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}=$

(h) $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}=$

(i) $\dfrac{x}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}=$

(j) $\dfrac{3x}{x^2-2x-3}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+1}=$

(k) $\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}+\dfrac{4}{x^2+3x-10}=$

(l) $\dfrac{x^2}{x^2-x}-\dfrac{x+1}{x}=$

(m) $\dfrac{m^2}{m^2-2m+1}-\dfrac{1}{3-3m}=$

(n) $\dfrac{2x}{\left(x^2-y^2\right)}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y-x}=$

6.- En los siguientes ejercicios se deben multiplicar las fracciones y expresar el resultado en su forma más simple:

(a) $\dfrac{4}{(2x+1)}\cdot\dfrac{x}{(1-2x)}=$

(b) $\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)}\cdot\dfrac{(x+1)}{4x^2}=$

© $\dfrac{3}{\left(x^2-2x\right)}\cdot\dfrac{(x-2)}{x}=$

(d) $\dfrac{(x+2)}{\left(x^2-9\right)}\cdot\dfrac{(x+3)}{\left(x^2-4\right)}=$

(e) $\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)}{\left(x^2-4x+3\right)}\cdot\dfrac{\left(x^2-7x+12\right)}{\left(x^2-11x+18\right)}=$

(f) $\dfrac{\left(9-m^2\right)}{\left(m^2+5m+6\right)}\cdot\dfrac{(m+2)}{(m-3)}=$

(g) $\dfrac{(2-x)}{\left(2x+x^2\right)}\cdot\dfrac{\left(x^2+4x+4\right)}{\left(x^2-4\right)}=$

7.- En los siguientes ejercicios se debe hallar los cocientes y simplificar:

(a) $\dfrac{2}{2x+1}\div\dfrac{x}{\left(4x^2-1\right)}=$

(b) $\dfrac{5}{(x-3)} \div \dfrac{2}{(3-x)} =$

© $\dfrac{(x^2-9)}{(x^2-3x)} \div (x^2-x-12) =$

(d) $\dfrac{m+n}{m^2-n^2} \div \dfrac{m^2-mn}{m^2-2mn+n^2} =$

(e) $(x+2) \div \dfrac{x^2-4}{x} =$

(f) $\dfrac{y^2+y-2}{y^2+4y} \div \dfrac{2y^2-8}{y^2+2y-8} =$

8.- En los siguientes ejercicios, realizar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma más sencilla posible:

(a) $\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{3x+9}\right) =$

(b) $x^2y^4\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}\right) =$

© $\left(1+\dfrac{2}{z}\right)\div\left(1-\dfrac{4}{z^2}\right) =$

(d) $\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)\div\left(\dfrac{3}{x-2}\right) =$

(e) $\left(\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right) =$

(f) $\left[\dfrac{x^4-1}{x^2-1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)\right]\div\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) =$

(g) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a+1}}{a-\dfrac{1}{a+1}} =$

(h) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}}=$

(i) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=$

(j) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x+y}=$

9.- Dados los polinomios :

$$P(x)=x+1; Q(x)=x^2-9; R(x)=x^2-1; T(x)=x-3.$$

Calcular: $\left[P(x)\div Q(x)\right]\div\left[R(x)\div T(x)\right]=$

10.- En un rectángulo de dimensiones ***a*** y ***b*** se producen los siguientes cambios:

1.- Se duplica la base y se reduce la altura en 5,0 cm.
2.- Se añaden 6,0 cm. a la base y 2,0 cm. a la altura.
3.- Se divide la base entre 3 y se le añade 1,0 cm. a la altura.
4.- Se añaden 2,0 cm. a la base y se reduce la altura a la mitad.

En la siguiente tabla se debe expresar algebraicamente el perímetro y el área del rectángulo en cada cambio.

	Base	Altura	Perímetro	Area
Inicio	a	b	2a+2b	a·b
1er cambio				
2do cambio				
3er cambio				
4to cambio				

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #36.

Tema: Sistemas de inecuaciones.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

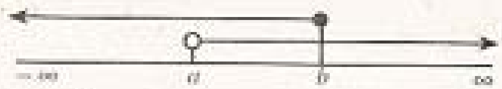
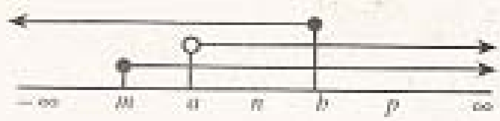
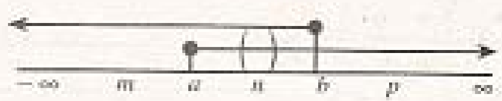
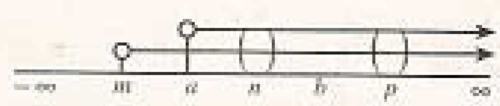
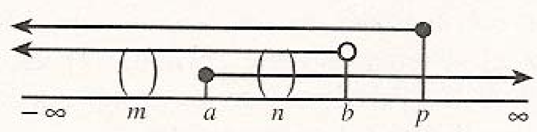
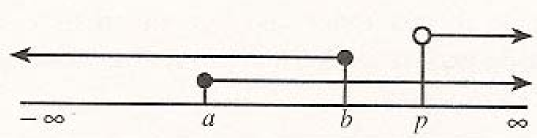
Marco Teórico:

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones simultáneas. Resolver el sistema consiste en hallar el valor o los valores de las variables que satisfacen todas y cada una de las desigualdades planteadas o, por el contrario el constatar que los valores no existen.

Para hallar la solución de un sistema de inecuaciones, se resuelve por separado cada una de las inecuaciones que lo conforman y se analiza al final (aquí será de mucha utilidad la gráfica de las soluciones) si existen soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema.

En el siguiente cuadro se dan ejemplos de la expresión analítica, gráfica y de intervalo de las soluciones de algunos sistemas. (Para todos los ejemplos $m < a < n < b < p$).

Ejemplos de solución de sistemas

Forma analítica	Forma gráfica	Forma de intervalo
1) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$[a,b]$
2) $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$(a,b]$
3) $\begin{cases} x \geq a \\ x < b \end{cases}$		$[a,b)$
4) $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$		(a,b)
5) $\begin{cases} x > a \\ x \geq b \end{cases}$		$[b,\infty)$
6) $\begin{cases} x < a \\ x \leq b \end{cases}$		$(-\infty,a)$
7) $\begin{cases} x \geq m \\ x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$(a,b]$
8) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \\ x \neq n \end{cases}$		$[a,b]-\{n\}$
9) $\begin{cases} x > m \\ x > a \\ x \neq n \\ x \neq p \end{cases}$		$(a,\infty)-\{n,p\}$
10) $\begin{cases} x \neq m \\ x \geq a \\ x \neq n \\ x < b \\ x \leq p \end{cases}$		$[a,b)-\{n\}$
11) $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \\ x > p \end{cases}$		NO HAY SOLUCION

Ejemplo #1:

Resolver el siguiente sistema:

$$\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{2}\leq 3-\frac{2x-1}{6}......................(1)$$
$$\frac{4x-1}{6}+2x>13-\frac{x+1}{4}........................(2)$$

Se llevará cada inecuación por separado a su mínima expresión:

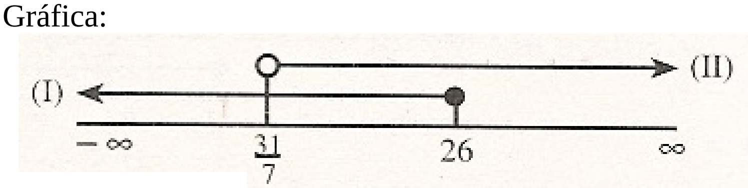
Primera inecuación: $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{x-3}{2}\leq 3-\dfrac{2x-1}{6}$

Se multiplica la inecuación por 12 para eliminar denominadores:

$$3x-6-6x+18\leq 36-4x+2 \Rightarrow x\leq 26$$

Segunda inecuación: $\dfrac{4x-1}{6}+2x>156-3x-3 \Rightarrow x>\dfrac{31}{7}$

Gráfica:



Resultado: $(\dfrac{31}{7},26]$

Ejemplo #2:

Resolver el siguiente sistema:

$$\frac{3x-3}{2}-\frac{2-6x}{3}>x.........................(1)$$
$$\frac{x+1}{4}+\frac{x-4}{3}\leq\frac{x+5}{2}.......................(2)$$
$$\frac{2-2x}{3}-\frac{5x-15}{2}\geq 1.......................(3)$$

Primera inecuación: $\frac{3x-3}{2}-\frac{2-6x}{3}>x$

Eliminando denominadores y agrupando términos semejantes:

$$9x-9-4+12x>6x \Rightarrow x>\frac{13}{15}$$

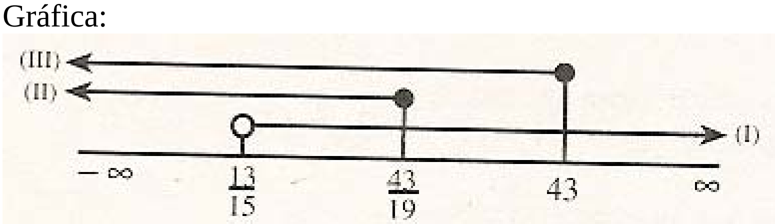
Segunda inecuación: $\frac{x+1}{4}+\frac{x-4}{3}\leq\frac{x+5}{2}$

$$3x+3+4x-16\leq 6x+30 \Rightarrow x\leq 43$$

Tercera inecuación: $\frac{2-2x}{3}-\frac{5x-15}{2}\geq 1$

$$4-4x-15x+45\geq 6 \Rightarrow -19x\geq -43 \Rightarrow 19x\leq 43 \Rightarrow x\leq\frac{43}{19}$$

Gráfica:



Resultado: $\left(\frac{13}{15},\frac{43}{19}\right]$

Ejemplo #3:

Resolver el siguiente sistema:

$$(x+5)^3\geq(x+7)(x+2)(x+1)+(x+3)(5x-1)\text{.........................}(1)$$

$$\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-1}{3}>\frac{4x-1}{4}+\frac{5x-1}{5}+\frac{6x-1}{6}\text{....................................}(2)$$

$$(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)\leq(x+5)(x+6)+(x+7)(x+8)\text{....}(3)$$

$$2x^2+7x+6\neq 0\text{..}(4)$$

Primera inecuación:

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125 \geq x^3 + 10x^2 + 23x + 14 + 5x^2 + 14x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 38x \geq -114 \Rightarrow x \geq -3$$

Segunda inecuación:

$$60x - 30 + 60x - 20 > 60x - 15 + 60x - 12 + 60x - 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -60x > 13 \Rightarrow 60x < -13 \Rightarrow x < -\frac{13}{60}$$

Tercera inecuación:

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 + 7x + 12 \leq x^2 + 11x + 30 + x^2 + 15x + 56 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -16x \leq 72 \Rightarrow 16x \geq -72 \Rightarrow x \geq -\frac{9}{2}$$

Cuarta condición: $2x^2 + 7x + 6 \neq 0$

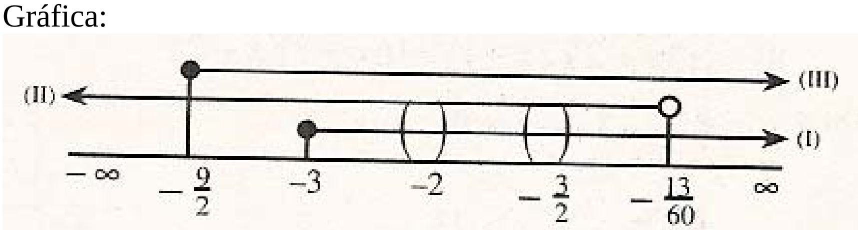
Para que la expresión anterior sea distinta de cero, la variable no debe tomar valores que anulen la expresión. Se calculan por tanto las raíces o cerois de la expresión para descartar esos valores.

Factorizando: $2x^2 + 7x + 6 = \dfrac{(2x+4)(2x+3)}{2}$

De donde los valores de x para esta expresión deben ser:

$$x \neq -2; x \neq -\frac{3}{2}$$

Gráfica:



Resultado: $(-3,-\frac{13}{60}]-\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\}$

PREGUNTAS:

1.- Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\frac{3x-5}{2}+9\geq\frac{2x+4}{3}+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{2x-3}{4}+\frac{x-7}{6}<\frac{x-9}{12}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

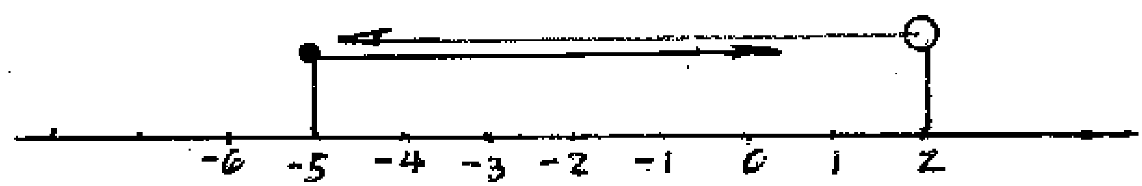
Primera inecuación:

$$9x-15+54\geq 4x+8+6\Rightarrow 9x+39\geq 4x+14\Rightarrow x\geq -5$$

Segunda inecuación:

$$6x-9+2x-14<x-9\Rightarrow 8x-23<x-9\Rightarrow x<2$$

Gráfica:



Solución: $[-5,\infty)\cap(-\infty,2)$

2. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}>2+\frac{3x-2}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{3x-4}{7}+x>2+\frac{5x-2}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

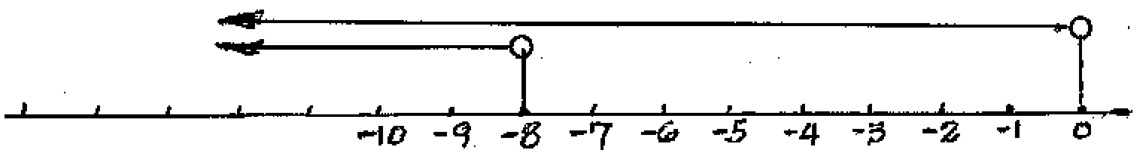
Primera inecuación:

$$5x+20-3x+12>30+3x-2 \Rightarrow x<2$$
$$(-\infty,2)$$

Segunda inecuación:

$$9x-12+21x>42+35x-14 \Rightarrow x<-8$$
$$(-\infty,-8)$$

Gráfica:



Solución: $(-\infty,-8)$

3.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$3x-1<x-4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\frac{3x-4}{3}+\frac{x+1}{2}>\frac{3(x+1)}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Primera inecuación:

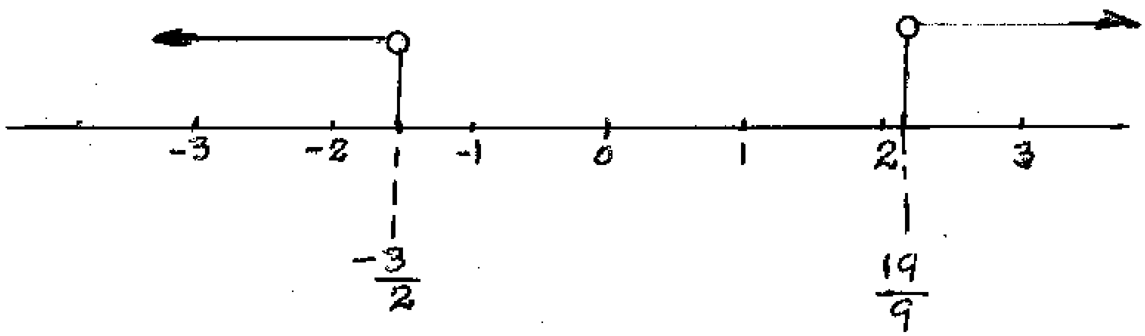
$$3x-1<x-4 \Rightarrow 2x<-3 \Rightarrow x<-\frac{3}{2}$$

Segunda inecuación:

Multiplicando todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$12x-16+6x+6>9x+9 \Rightarrow 9x>19 \Rightarrow x>\frac{19}{9}$$

Gráfica:



Solución: No hay solución porque las gráficas de cada inecuación no tiene puntos en común. Divergen.

4.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x-7>3+x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{15x-35}{6}\geq\frac{14}{3}+\frac{3x}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Primera inecuación:

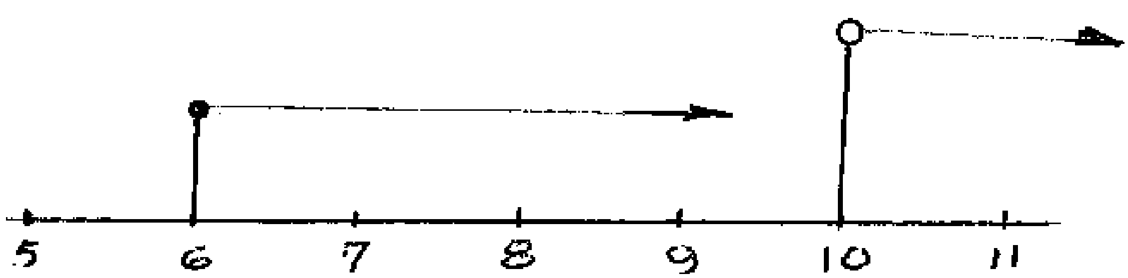
$$2x-7>3+x\Rightarrow x>10$$

Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$30x-70\geq 56+9x\Rightarrow 21x\geq 126\Rightarrow x\geq\frac{126}{21}\Rightarrow x\geq 6$$

Gráfica:



Solución: $(10,+\infty)$

5. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{x+1}{4}+2x \geq \frac{1-4x}{6}+13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{x-2}{4}+\frac{2x-1}{6} \leq 3+\frac{x-3}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Primera inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$3x+3+24x \geq 2-8x+156 \Rightarrow 27x+8x \geq 158-3 \Rightarrow 35x \geq 155 \Rightarrow$$

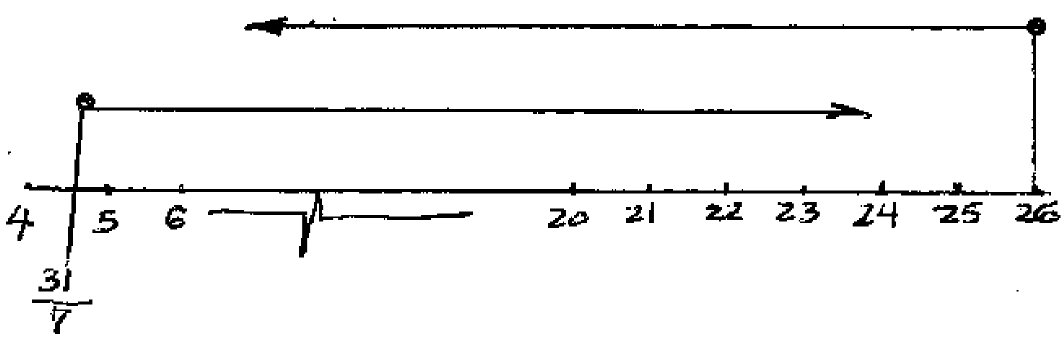
$$\Rightarrow x \geq \frac{155}{35} \Rightarrow x \geq \frac{31}{7}$$

Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$3x-6+4x-2 \leq 36+6x-18 \Rightarrow 7x-8 \leq 6x+18 \Rightarrow x \leq 26$$

Gráfica:



Solución: $\left[\frac{31}{7}, 26\right]$

6.- Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{2\left(6-x^2\right)}{3} \leq \frac{x(3-2x)}{3} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) > (x+2)(x-3) - \frac{3}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Primera inecuación:

Multip0licar por (3) para eliminar denominadores:

$$2\left(6-x^2\right) \leq x(3-2x) - 3 \Rightarrow 12 - 2x^2 \leq 3x - 2x^2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 3 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{15}{3} \Rightarrow x \geq 5$$

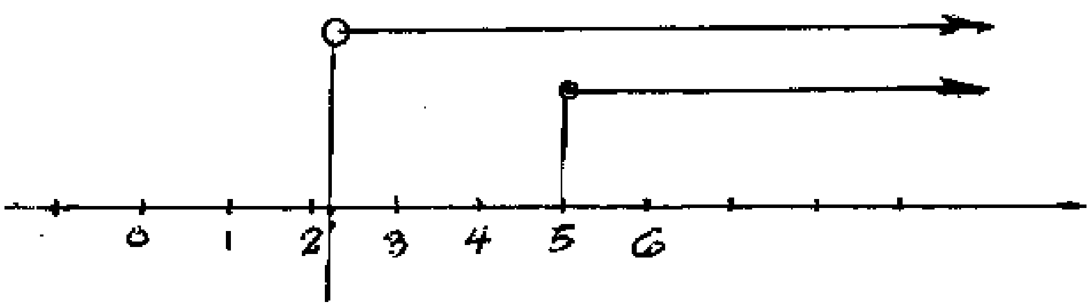
Segunda inecuación:

$$\frac{(2x+3)}{2} \cdot \frac{(2x-1)}{2} > \left(x^2 - x - 6\right) + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\left(4x^2 - 2x + 6x - 3\right)}{4} > \frac{3\left(x^2 - x - 6\right) + 2}{3}$$

Multiplicar ahora por 12 ambos miembros de la desigualdad para eliminar denominadores:

$$12x^2 + 12x - 9 > 12x^2 - 12x - 64 \Rightarrow 24x > 56 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$$

Gráfica:



Solución: $[5, +\infty)$

7.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{3x^2+x-1}{3} \geq (x+1)(x-2)-\frac{3}{2} \text{.........................} (1)$$

$$(x-1)^2-\frac{5}{3} < x\left(x+\frac{3}{5}\right) \text{....................................} (2)$$

Primera inecuación:

Multiplicar todos los términos por 6 para eliminar denominadores:

$$6x^2+2x-2 \geq 6\left(x^2-x-2\right)-9 \Rightarrow 8x \geq -19 \Rightarrow x \geq -\frac{19}{8}$$

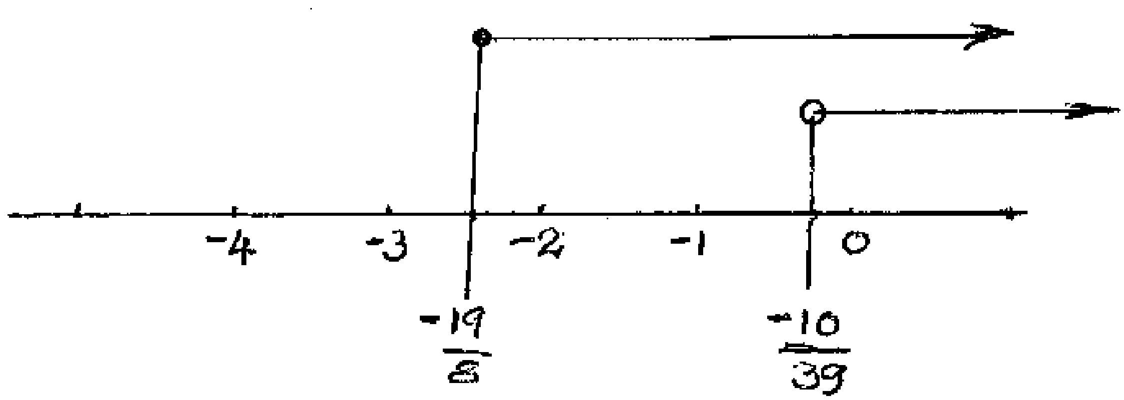
Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 15 para eliminar denominadores:

$$15(x-1)^2-25 < 15x\left(x+\frac{3}{5}\right) \Rightarrow 15\left(x^2-2x+1\right)-25 < 15x^2+9x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30x-9x < 25-15 \Rightarrow -39x < 10 \Rightarrow x > -\frac{10}{39}$$

Gráfica:



Solución: $\left(-\frac{10}{39}, +\infty\right)$

8.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x(x-1)(x+2)+5(x-1)^2 \geq (x+2)^3 \text{..............................}(1)$$
$$(3x+2)(2x-1) > (6x+7)(x-2)\text{..................................}(2)$$
$$x^2-3x-4 \neq 0\text{...}(3)$$

Primera inecuación:

$$x(x^2+x-2)+5(x^2-2x+1) \geq x^3+3(x^2)(2)+3(x)(2^2)+2^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3+x^2-2x+5x^2-10x+5 \geq x^3+6x^2+12x+8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24x \leq 5-8 \Rightarrow 24x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{8}$$

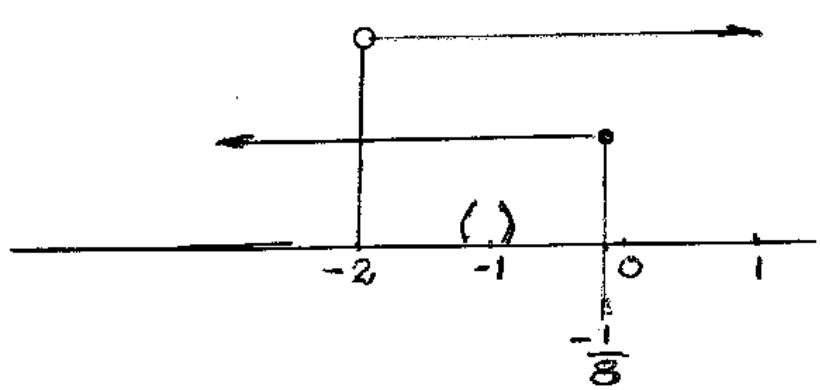
Segunda inecuación:

$$6x^2-3x+4x-2 > 6x^2-12x+7x-14 \Rightarrow x-2 > -5x-14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x > -12 \Rightarrow x > -2$$

Tercera condición:

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1) \neq 0$$
$$x_1=4; x_2=-1$$

Gráfica:



Solución:

$$(-2,-\frac{1}{8}]-\{-1\}$$

9.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}+x>23..............................(1)$$
$$3(4-x)-18x<5..........................(2)$$
$$\frac{5x+30}{3}>x+\frac{10x}{9}...........................(3)$$

Primera inecuación:

$$\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}+x>23$$

Se multiplican todos los términos por 20 para eliminar denominadores:

$$8x-5x+20x>460\Rightarrow 23x>460\Rightarrow x>\frac{460}{23}\Rightarrow x>20$$

Segunda inecuación:

$$3(4-x)-18x<5\Rightarrow 12-3x-18x<5\Rightarrow 21x>7\Rightarrow x>\frac{1}{3}$$

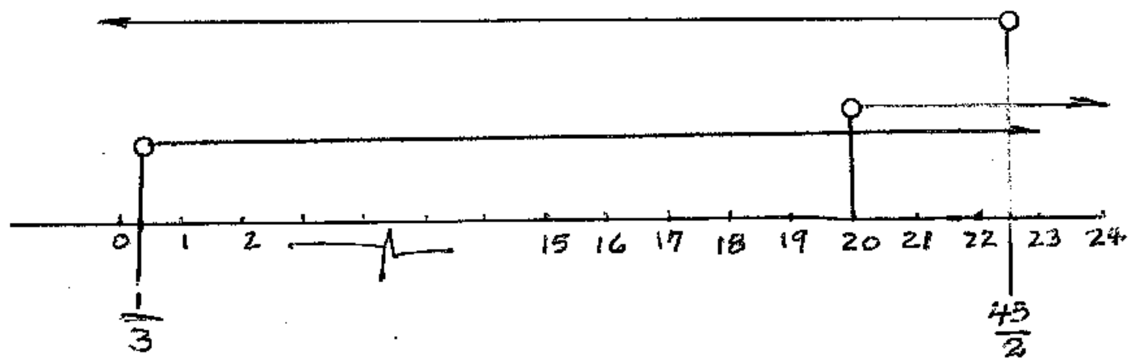
Tercera inecuación:

$$\frac{5x+30}{3}>x+\frac{10x}{9}$$

Se multiplican todos los términos por 9 para eliminar denominadores:

$$15x+90>9x+10x \Rightarrow 90>19x-15x \Rightarrow x<\frac{90}{4} \Rightarrow x<\frac{45}{2}$$

Gráfica:



Solución: $\left(20,\frac{45}{2}\right)$

10.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{6} \le \frac{1-x}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\frac{x-1}{6} \le \frac{2-x}{3}-\frac{x+1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\frac{x}{20} \ge \frac{x-4}{5}+\frac{x-5}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Primera inecuación:

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{6} \le \frac{1-x}{2}$$

Se multiplican todos los términos por 6 para eliminar denominadores:

$$4x+2-x+2 \le 3-3-3x \Rightarrow 3x+4 \le 3-3x \Rightarrow$$
$$6x \le 3-4 \Rightarrow 6x \le -\frac{1}{6}$$

Segunda inecuación:

$$\frac{x-1}{6} \leq \frac{2-x}{3} - \frac{x+1}{4}$$

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$2x-2 \leq 8-4x-3x-3 \Rightarrow 2x-2 \leq 5-7x \Rightarrow 9x \leq 7 \Rightarrow x \leq \frac{7}{9}$$

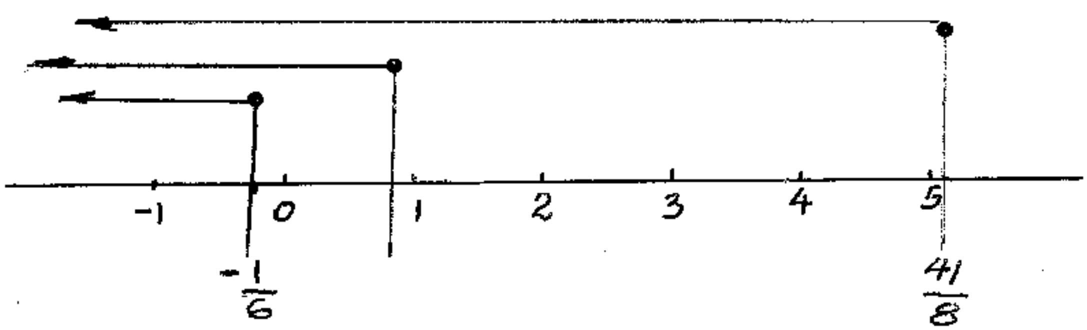
Tercera inecuación:

$$\frac{x}{20} \geq \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{4}$$

Se multiplican todos los términos por 20 para eliminar los denominadores:

$$x \geq 4x-16+5x-25 \Rightarrow x \leq \frac{41}{8}$$

Gráfica:



Solución: $(-\infty, -\frac{1}{6}]$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #37.
Tema: Problemas misceláneos.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Al dividir un polinomio de cuarto grado por $(x-3)$ da un resto de $r_1 = 100$ y al dividirlo por $(x+1)$ da como resto $r_2 = -4$. ¿Cuál será el resto al dividirlo por $(x-3)(x+1)$?

El divisor es $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$; o sea un polinomio de grado 2, por lo tanto el residuo tendrá que ser de la forma general $Ax + B$, ya que el residuo siempre tiene al menos un grado menor que el divisor.

Haciendo x = -1 en el polinomio dado su residuo será:

$-4 = -A + B$

Haciendo ahora x = 3 en el polinomio dado:

$100 = 3A + B$

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones:

$-4 = -A + B$

$100 = 3A + B$

Se obtiene que A = 26   y   B = 22.

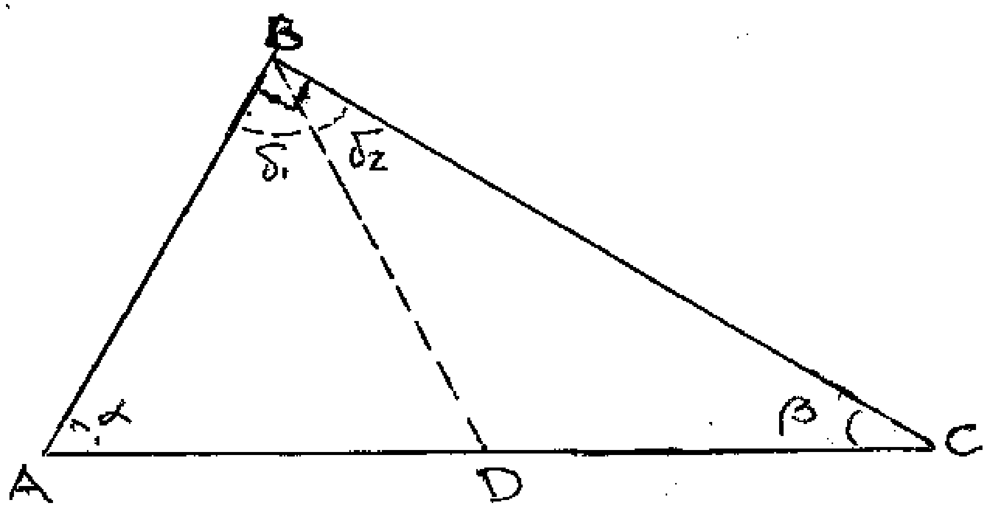
La solución es entonces:

$$R = 26x + 22$$

2.- Dado un triángulo rectángulo, si se une el punto medio de la hipotenusa con el vértice contrario, demostrar que la distancia del llamado punto medio de la hipotenusa a cada uno de los vértices son iguales.

Dada la figura siguiente, se trata de demostrar que $AD = DC = DB$.

Gráfica:



Si ***D*** es el punto medio entre A y ***C***, entonces $\angle\alpha + \angle\beta = 90^o$; y también $\angle\delta_1 + \angle\delta_2 = 90^o$. Entonces, por ser ángulos complementarios, se cumplen las siguientes igualdades trigonométricas:

$$sen\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = sen\beta$$

$$sen\delta_1 = \cos\delta_2$$

$$\cos\delta_1 = sen\delta_2$$

Del triángulo ***ADB***, por la ***Ley del Seno***, podemos escribir:

$$\frac{AD}{sen\delta_1}=\frac{BD}{sen\alpha}\Rightarrow AD=DB\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}$$

Del triángulo ***DBC,*** por la ***Ley del Seno***, podemos escribir:

$$\frac{DC}{sen\delta 2}=\frac{DB}{sen\beta}\Rightarrow DC=DB\cdot\frac{sen\delta_2}{sen\beta}$$

Como ***D*** es el punto medio entre ***A*** y ***C***, entonces $AD=DC$, por lo tanto:

$$DB\cdot\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}=DB\cdot\frac{sen\delta_2}{sen\beta}\Rightarrow\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}=\frac{sen\delta_2}{sen\beta}\Rightarrow\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}-\frac{sen\delta_2}{sen\beta}=0$$

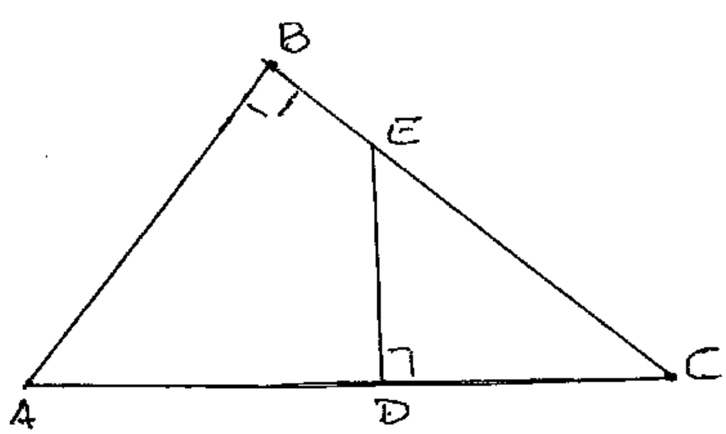
$$\Rightarrow\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}-\frac{\cos\delta_1}{\cos\alpha}=0\Rightarrow\frac{sen\delta_1\cdot\cos\alpha-sen\alpha\cdot\cos\delta 1}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}=0\Rightarrow$$

$$\frac{sen\left(\delta_1-\alpha\right)}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}=0\Rightarrow sen\left(\delta_1-\alpha\right)=0\Rightarrow\delta_1=\alpha$$

Si $\delta_1=\alpha$, el triángulo ***ADB*** es isósceles y por tanto $AD=DB$ y por ***D*** ser el punto medio de ***AC***, entonces, queda demostrado que:

$$AD=DC=DB$$

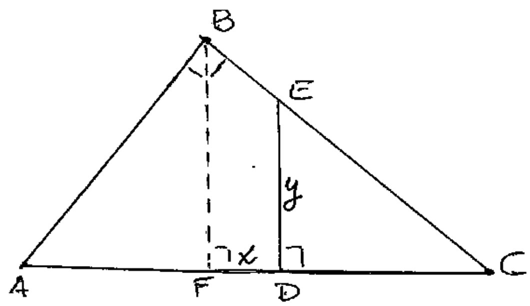
3.- Dado un triángulo rectángulo ***ABC***, con $\angle B=90^{\circ}$, con el cateto $AB=3,0\left(cm\right)$ y el cateto $BC=4,0\left(cm\right)$, encontrar el valor de la perpendicular a la hipotenusa DE de modo que al área del polígono ***ABED*** sea igual al área del triángulo ***DEC.***



Al ser el triángulo ***ABC*** un triángulo rectángulo, su hipotenusa puede ser calculada como sigue:

$$AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ahora, desde el vértice ***B*** se trazará una perpendicular ***BF*** a la hipotenusa ***AC***, como se puede ver en la figura siguiente:



Considerando de nuevo el triángulo ***ABC***, éste ha sido dividido en tres nuevas figuras geométricas: el triángulo ABF, el trapecio $BEDF$ y el triángulo DEC, y el problema consiste en encontrar el valor de ***DE*** para que el área del triángulo ***ABF***, más el área del trapecio ***BEDF***, seas igual al área del triángulo ***DEC***.

Ahora, se considera de nuevo el triángulo original y se aplica el ***Teorema de Euclides*** para calcular el valor de ***AF***:

$$AB^2 = AF \cdot AC \Rightarrow (3)^2 = (AF) \cdot (5) \Rightarrow 9 = (AF) \cdot 5 \Rightarrow AF = \frac{9}{5}$$

Conocido ***AF***, se puede calcular por diferencia la distancia ***FC***:

$$AC = 5 = AF + FC = \frac{9}{5} + FC \Rightarrow FC = \frac{16}{5}$$

Conocido ***FC***, podemos llamar a $FD = x \Rightarrow DC = FC - x = \frac{16}{9} - x$

Llamaremos también a la distancia buscada, $DE = y$.

Conocidos todos estos valores, podemos establecer una primera expresión matemática que relaciones las áreas de las figuras geométricas envueltas en el problema:

$$Area\left(ABF\right)+Area\left(BEDF\right)=Area\left(DEC\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}\right)\left(2,3979\right)+\frac{\left(2,379+y\right)}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\left(y\right)\left(\frac{16}{5}-x\right)\Rightarrow$$
$$\left(\frac{9}{5}\right)\left(2,3979\right)+\left(2,3979+y\right)\cdot x=\left(y\right)\left(\frac{16}{5}-x\right)=$$
$$4,316+2,3979x+xy=3,2y-xy\Rightarrow$$
$$4,316+2,3979x-3,2y+2xy=0.....................................(1)$$

Considerando ahora los triángulos rectángulos ***FBC*** y ***DEC***, éstos son semejantes por tener los tres ángulos iguales; entonces, se puede escribir:

$$\frac{BF}{y}=\frac{FC}{DC}\Rightarrow\frac{2,3979}{y}=\frac{\frac{16}{5}}{\left(\frac{16}{5}-x\right)}\Rightarrow\frac{2,3979}{y}=\frac{3,2}{\left(3,2-x\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(2,3979\right)\left(3,2-x\right)=3,2y\Rightarrow7,67328-2,3979x=3,2y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow7,67328-2,3979x-3,2y=0.................................(2)$$

Ahora, se deberán resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) para encontrar el valor ***"y"*** buscado:

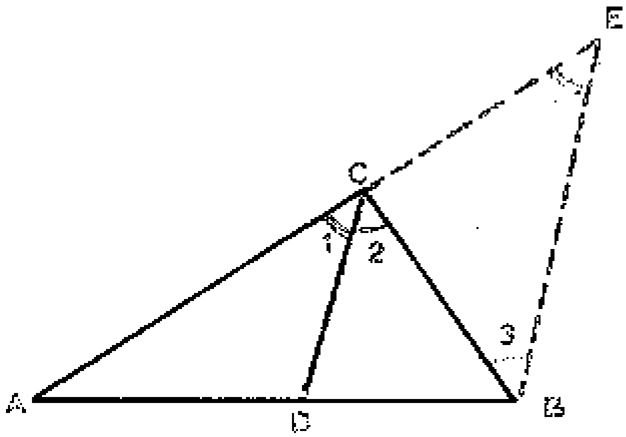
De la ecuación (2):

$$x=\frac{7,67328-3,2y}{2,3979}$$

Introduciendo este valor en la ecuación (1):

$$4,316+2,3979\left(\frac{7,6728-3,2y}{2,3979}\right)-3,2y+2\left(\frac{7,67328-3,2y}{2,3979}\right)y=0$$
$$\Rightarrow4,216+7,67328-3,2y-3,2y+6,4y-2,669y^2=0$$
$$\Rightarrow11,9898-2,669y^2=0\Rightarrow y^2=\frac{11,9898}{2,669}=4,4922\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{4,4922}=2,11\left(cm\right)$$

4.- La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



En el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$ y $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son los segmentos determinados por la bisectriz $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$.

Se tratará de demostrar que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Para empezar, tracemos por $\boldsymbol{B}$ la recta $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y se prolonga el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a $\overline{BE}$ en $\boldsymbol{E}$, formándose el ΔBCE.

Del triángulo ***ABE***:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pero:

$\angle 1 = \angle 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (bi\sec triz)$

$\angle E = \angle 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (correspondientes)$

De las dos igualdades anteriores se deduce que:

$$\angle E = \angle 2 \Rightarrow \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \angle E = \angle 3$$

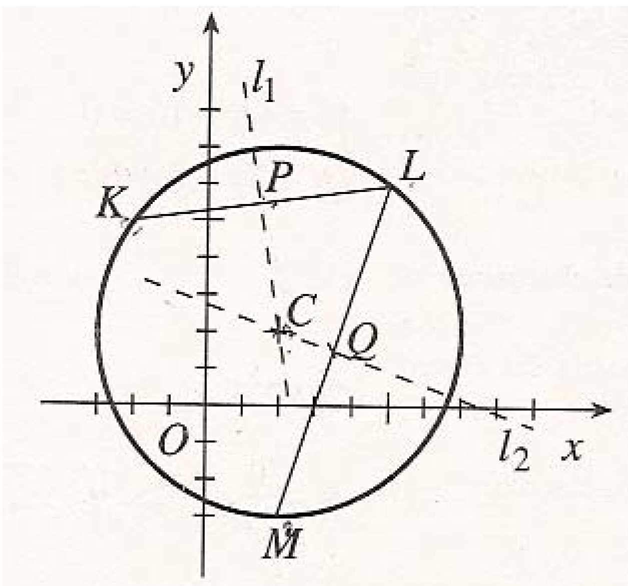
O sea, el triángulo ***BCE*** es isósceles y por tanto: $\overline{CE} = \overline{CB}$

Sustituyendo esta igualdad en ecuación (1) se encuentra que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

5.- Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:

$$K(-2,5); L(5,6); M(2,-3).$$



METODO DE LAS MEDIATRICES:

Se hallará la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo formado por los vértices ***KLM.*** Primero hallaremos la ecuación lineal de dos de las mediatrices de los lados del triángulo mencionado y donde se corten las mediatrices, ese punto será el circuncentro y la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices será el radio de la circunferencia buscada.

Cálculo de la ecuación de la mediatriz l_1 correspondiente al lado ***KL***:

El punto medio P del lado KL es iguala a:

$$P\left(\frac{-2+5}{2},\frac{5+6}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$$

La pendiente de la línea recta ***KL*** es $m_{(K,L)} = \dfrac{6-5}{5+2} = \dfrac{1}{7}$; luego, como l_1 es perpendicular a su recta correspondiente (KL), entonces:

$$m_{l_1} = -7.$$

La ecuación de l_1 será: $y - \dfrac{11}{2} = (-7)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow l_1 \equiv 7x + 7 - 16$

En forma análoga se hallará la ecuación de l_2, la mediatriz correspondiente al lado ***LM***, cuyo punto medio es ***Q***:

Siendo $Q\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

La pendiente de ***LM***: $m_{LM} = \dfrac{-3-6}{2-5} = 3$

Pendiente de la mediatriz l_2 es $m_{l_2} = -\dfrac{1}{3}$

Ecuación de l_2 es $y - \dfrac{3}{2} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{7}{2}\right) \Rightarrow l_2 \equiv x + 3y - 8 = 0$

Para hallar el circuncentro, se debe buscar las coordenadas del punto de intercepción de las dos rectas mediatrices l_1 y l_2:

$$7x + y - 16 = 0$$
$$x + 3y - 8 = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneas se encuentra el circuncentro:

$$C(2,2)$$

El radio de la circunferencia circunscrita será:

$$R = d_{(C,K)} = \sqrt{\left(-2-2\right)^2 + \left(5-2\right)^2} = 5$$

Ahora se puede escribir la ecuación canónica de la circunferencia y de allí la ecuación general:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$$

$$\left(x-2\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = \left(5\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

METODO DE LA ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

La ecuación general de la circunferencia es la siguiente:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dado que los puntos ***K***, ***L*** y ***M*** pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma.

Para el punto ***K***:

$$\left(-2\right)^2 + \left(5\right)^2 + A\left(-2\right) + B\left(5\right) + C = 0 \Rightarrow -2A + 5B + C = 0..................\left(1\right)$$

Para el punto ***L***:

$$\left(5\right)^2 + \left(6\right)^2 + A\left(5\right) + B\left(6\right) + C = 0 \Rightarrow 5A + 6B + C = -61.....................\left(2\right)$$

Para el punto ***M***:

$$\left(2^2\right) + \left(-3\right)^2 + A\left(2\right) + B\left(-3\right) + C = 0 \Rightarrow 2A - 3B + C = -13......................\left(3\right)$$

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones encontradas, por el método de ***Cramer:***

$$A = -4; B = -4; C = -17.$$

La ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos ***K***, ***L*** y ***M*** es:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

METODO DE LA ECUACION CANONICA DE LA CIRCUNFERENCIA.

Sea una circunferencia de radio R y de centro $C(h,k)$, entonces, su ecuación canónica es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

Luego, como los puntos K, L y M pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación canónica de la misma.

Sustituyendo las variables por las coordenadas de K:

$(-2-h)^2+(5-k)^2=R^2$ …………………..…..(1)

Sustituyendo por las variables de L:

$(5-h)^2+(6-k)^2=R^2$ ……………………..…(2)

Sustituyendo por los valores de M:

$(2-h)^2+(-3-k)^2=R^2$ ……………………(3)

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$(-2-h)^2+(5-k)^2=(5-h)^2+(6-k)^2 \Rightarrow 7h+k=16$......................$(4)$

Igualando (1) y (3):

$(-2-h)^2+(5-k)^2=(2-h)^2+(-3-k)^2 \Rightarrow h-2k=-2$....................$(5)$

Resolviendo (4) y (5), simultáneamente:

$$h=2$$
$$k=2$$

Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3):

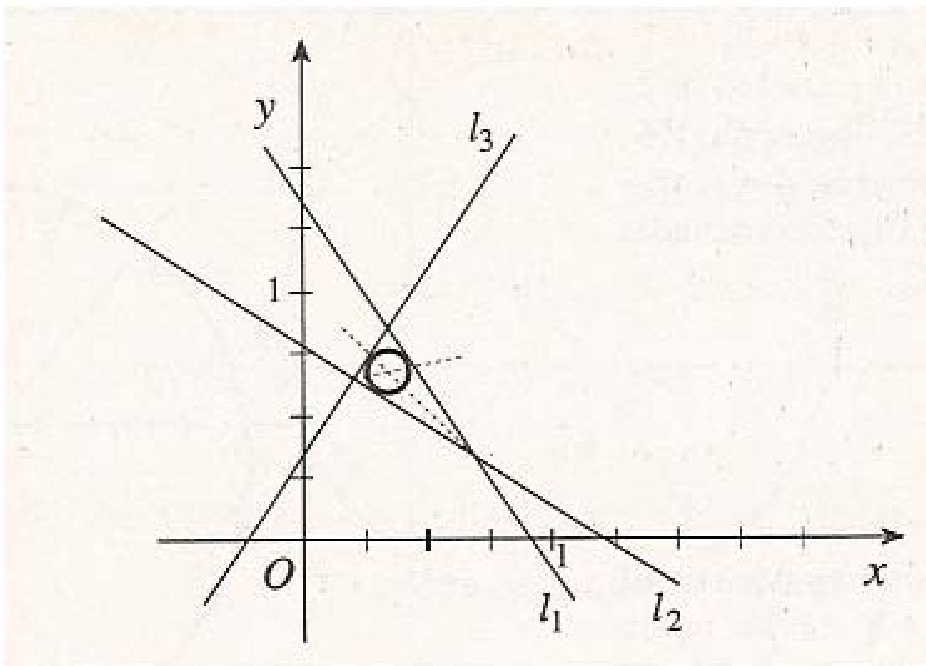
$$R=5$$

La ecuación canónica de la circunferencia y su correspondiente ecuación general por tanto es:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(5)^2 \Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-17=0$$

6.- Hallar la ecuación general de la circunferencia inscrita en el triángulo que forman las siguientes rectas:

$$l_1 \equiv 3x+2y-3=0$$
$$l_2 \equiv 2x+3y-2=0$$
$$l_3 \equiv 3x-2y+1=0$$



La ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2:
Se parte de que cualquier punto de la bisectriz tiene la misma distancia a ambas rectas: Llamando ***P(x , y)*** un punto cualquiera de la bisectriz, se escribe entonces:

$$\frac{3x+2y-3}{\sqrt{13}}=-\frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x+y-1=0..........................(1)$$

La ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas l_2 y l_3:

$$\frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}}=-\frac{3x-2y+1}{-\sqrt{13}} \Rightarrow x-5y+3=0.........................(2)$$

Ahora debemos encontrar el punto de cruce de las rectas (1) y (2):

$$x+y-1=0$$
$$x-5y+3=0$$

$$x=\frac{1}{3};\ y=\frac{2}{3}$$

Entonces el centro de la circunferencia inscrita es: $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

El radio de la circunferencia inscrita es la distancia de ***C*** a cualquiera de las rectas que conforman el triángulo:

$$R=d_{(C,l_1)}=\frac{\left|3\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)-3\right|}{\sqrt{13}}=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{13}}=\frac{2}{3\sqrt{13}}$$

Conocidos el Centro y el Radio de la circunferencia inscrita, se puede escribir entonces la ecuación canónica:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3\sqrt{13}}\right)^2$$

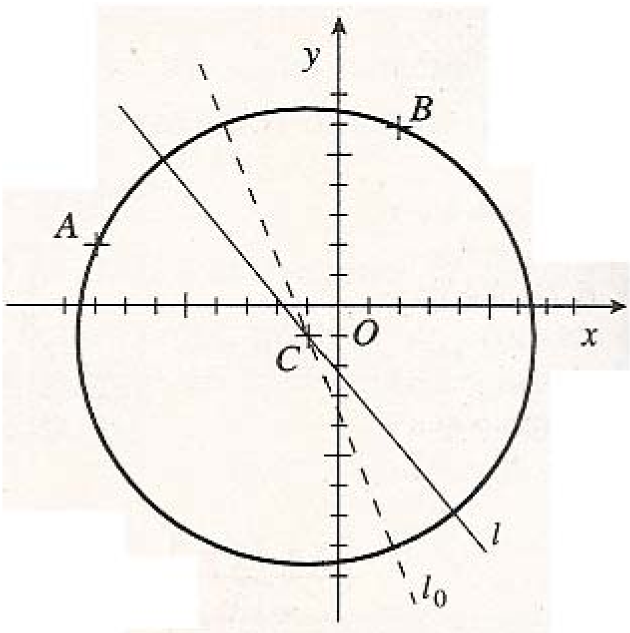
Desarrollando la ecuación canónica se encuentra la ecuación general buscada:

$$117x^2+117y^2-78x-156y+61=0$$

7.- Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(-8,2) y B(2,6) y tiene su centro sobre la recta $l\equiv 5x+4y+9=0.$

El centro de la circunferencia es el punto de cruce de la recta dada con la mediatriz del segmento de recta ***AB***. O sea, debemos primero encontrar la ecuación de dicha mediatriz. Se debe recordar que cada punto de la mediatriz es equidistante de los puntos ***A*** y ***B***.

$$d_{(A,C)} = d_{(B,C)}$$



Calculando las distancias:

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 \Rightarrow l_0 \equiv 5x + 2y + 7 = 0$$

Para encontrar el centro de la circunferencia se debe encontrar el punto de intercepción de las dos líneas rectas siguientes:

$$5x + 4y + 9 = 0$$
$$5x + 2y + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se encuentra que:

$$C(-1,-1)$$

El radio será la distancia del centro $\boldsymbol{C}$ a cualquiera de los puntos $\boldsymbol{A}$ o $\boldsymbol{B}$:

$$R = d_{(C,A)} = \sqrt{(-8+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{58}$$

Conocidos el centro y el radio se puede escribir la ecuación canónica de la circunferencia:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2$$

Desarrollando la ecuación canónica de la circunferencia se encuentra la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 56 = 0$$

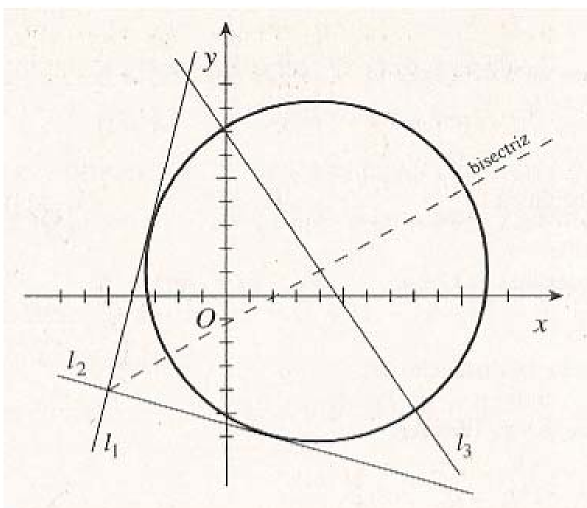
8.- Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a las rectas:

$$l_1 \equiv 7x - 2y + 27 = 0$$

$$l_2 \equiv 2x + 7y + 38 = 0$$

y que tiene su centro sobre la recta

$$l_3 \equiv 3x + 2y - 14 = 0$$



Solución:

Si la circunferencia es tangente a las rectas l_1 y l_2 su centro se encuentra sobre la bisectriz del ángulo que forman ambas rectas. La intersección de dicha bisectriz con l_3 nos da el centro de la circunferencia buscada.

Como e3l cruce de dos rectas determina dos ángulos, el problema tendrá dos soluciones.

Ecuación de las bisectrices:

$$\frac{7x - 2y + 27}{\sqrt{49 + 4}} = \pm \frac{2x + 7y + 38}{\sqrt{4 + 49}} \Rightarrow 7x - 2y + 27 = \pm 2x + 7y + 38$$

Caso #1: $7x-2y+27=2x+7y+38 \Rightarrow 5x-9y-11=0$

Se resolverá un sistema de ecuaciones de esta bisectriz y la recta l_3:

$$5x-9y-11=0$$
$$3x+2y-14=0$$

La solución del sistema es:

$x=4$
$y=1$ por tanto, el centro de la circunferencia es $C(4,1)$.

El radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes:

$$R=d_{(C,l_1)}=\frac{|7(4)-2(1)+27|}{\sqrt{53}}=\sqrt{53}$$

Entonces, la ecuación canónica de la circunferencia correspondiente es:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{53}\right)^2$$

En forma general:

$$x^2+y^2-8x-2y-36=0$$

Caso #2:

$$7x-2y+27=-(2x+7y+38) \Rightarrow 9x+5y+65=0$$

Habrá entonces que resolver el sistema de ecuaciones conformado por la ecuación de esta bisectriz y la de l_3:

$$9x+5y+65=0$$
$$3x+2y-14=0$$

La solución es:

$$x = -\frac{200}{3}$$
$$y = 107$$
por lo tanto, el centro de la circunferencia para este caso es $C\left(-\frac{200}{3}, 107\right)$

Calculando la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes, tal y como se hizo en el **caso #1**:

$$R = \frac{37\sqrt{53}}{3}$$

La ecuación canónica de la circunferencia del **caso #2** es:

$$\left(x + \frac{200}{3}\right)^2 + (y - 107)^2 = \left(\frac{37\sqrt{53}}{3}\right)^2$$

De donde, su ecuación general será:

$$9x^2 + 9y^2 + 1200x - 1926y + 70484 = 0$$

9.- Demostrar que $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ es el baricentro de un triángulo cualquiera de vértices: $A(x_1, y_1); B(x_2 y_2); C(x_3, y_3)$.

El baricentro, (G), es el centro de gravedad de un triángulo y es el punto donde se cruzan todas las medianas.

Si se toma la longitud (L_M), de una mediana cualquiera, el baricentro se encuentra a a $\frac{2}{3}L_M$ de su vértice correspondiente y a $\frac{1}{3}L_M$ del punto medio del lado opuesto correspondiente; o sea, que para cada mediana el punto G se encuentra en un punto cuya razón de división, partiendo del vértice es: $\lambda = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

Entonces si llamamos ***D*** al punto medio del lado ***BC***, opuesto al vértice ***A***, tenemos que las coordenadas de este punto serán:

$$D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

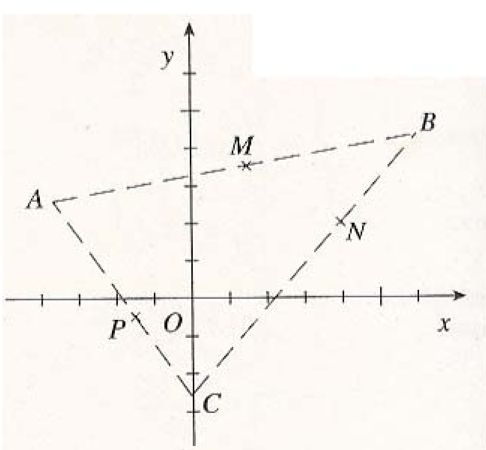
Y las coordenadas del punto ***G*** serán:

$$x_G=\frac{x_1+\lambda x_D}{1+\lambda}$$
$$y_G=\frac{y_1+\lambda y_D}{1+\lambda}$$

De donde:

$$x_D=\frac{\left[x_1+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\right]}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$
$$y_D=\frac{\left[y_1+2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)\right]}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

10.- 11.- $M\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right);N(4,2)$ y $P\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar los vértices del triángulo.



Cálculo de las abscisas:

La abscisa de cada punto medio es la semisuma de las abscisas de los extremos del respectivo segmento. Podemos hacer, pues, los siguientes planteamientos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 3 \text{............................}(1)$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 8 \text{............................}(2)$$

$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow x_C + x_A = -3 \text{........................}(3)$$

Existe entonces un sistema de ecuaciones simultáneas con las ecuaciones (1), (2) y (3).

Se utilizará el ***método de Cramer***, por determinantes para resolver este sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - (0 + 0 + 0) = 2$$

$$\Delta_{x_A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 0 - (0 + 0 + 8) = -8$$

$$x_A = \frac{\Delta_{x_A}}{\Delta} = \frac{-8}{2} = -4$$

Sustituyendo ahora este valor en la ecuación (1):

$$-4 + x_B = 3 \Rightarrow x_B = 7$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2):

$$7 + x_C = 8 \Rightarrow x_C = 1$$

Cálculo de las ordenadas:

Se utilizará el mismo método de cálculo que el ya utilizado para las abscisas:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Se resuelven ahora, por la misma metodología anterior las ecuaciones (4), (5) y (6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+0-(0+0+0) = 2$$

$$\Delta_{y_A} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7-1+0-(0+4+0) =$$

$$y_A = \frac{\Delta_{y_A}}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

De la ecuación (6):

$1 + y_C = -1 \Rightarrow y_C = -1-1 = -2$

De la ecuación (5):

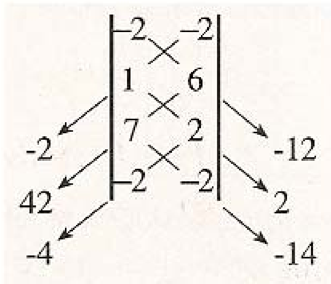
$$y_B - 2 = 4 \Rightarrow y_B = 4+2 = 6$$

Entonces, los vértices serán los siguientes:

$$A(-4,1); B(7,6); C(1,-2)$$

11.- Determinar el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2,-2); B(1,6); C(7,2)$:

Utilizaremos el siguiente procedimiento:

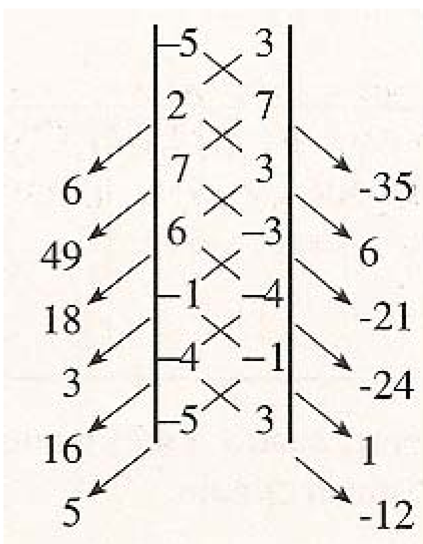


$$A=\frac{1}{2}\left[-12+2-14-\left(-2+42-4\right)\right]=\frac{1}{2}\left[-60\right]=-30$$

Tratándose de un área se toma el valor absoluto, o sea: $A=30$

12.- Determinar el área del polígono cuyos vértices son:

$A(-5,3);B(2,7);C(7,3);D(6,-3);E(-1,-4);F(-4,-1)$



$$A=\frac{1}{2}\left[-35+6-21-24+1-12-\left(6+49+18+3+16+5\right)\right]=$$

$$A=\frac{1}{2}\left(-182\right)=-91$$

Como se trata de área, se toma el valor absoluto, o sea: $A=91$.

13.- Determinar si los puntos $A(-2,7);B\left(-\frac{3}{2},4\right);C(0,-5)$ son colineales:

Primer método de solución:

Si los tres puntos son colineales, se cumple que no conforman un triángulo y por tanto se debe cumplir que están sobre la misma recta y la suma de las longitudes de los dos segmentos menores debe ser igual a la longitud total del segmento mayor:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2+\left(4-7\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=3,04138$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-5-4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)+\left(81\right)}=\sqrt{\frac{9+324}{4}}=\sqrt{\frac{333}{4}}=9,12414$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}=12,1655$$

El valor anterior se debe comparar con la longitud del segmento $\overline{AC}$

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(0+2\right)^2+\left(-5-7\right)^2}=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}=12,1655$$

O sea, los tres puntos son colineales.

Segundo método de solución:

Si los tres puntos son colineales, se toma uno de ellos y se calculan las pendientes que forma ese punto dado con cada uno de los otros dos puntos, si las pendientes son iguales es porque los tres puntos con colineales:

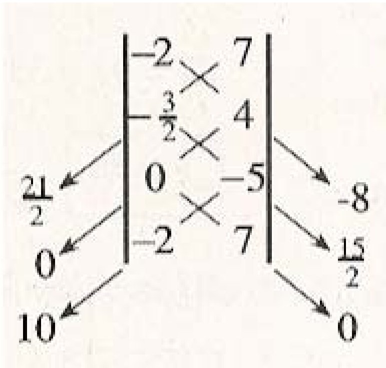
$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-7}{-\frac{3}{2}+2}=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$$

$$m_{AC}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{-5-7}{0+2}=\frac{-12}{2}=-6$$

Como las dos pendientes son iguales y parten y el punto A es común a los dos segmentos, entonces los tres puntos son colineales.

Tercer método de solución:

Si los tres puntos son colineales, el área del triángulo hipotético que formarían es igual a cero.

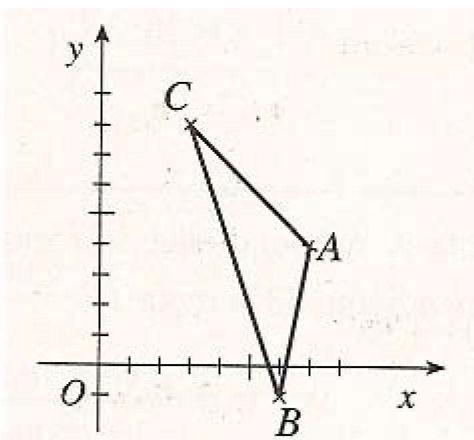


$$A=\frac{1}{2}\left[-8+\frac{15}{2}-\left(-\frac{21}{2}+10\right)\right]=0$$

Si no existe área del triángulo hipotético es porque éste no existe y los tres puntos son colineales.

14- Calcular los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

$$A(7,4);B(6,-1);C(3,8)$$



Cálculo del valor del ángulo α el cual es el que forma la recta inicial $\boldsymbol{AC}$ con la recta final $\boldsymbol{AB}$:

$$m_1=m_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-4}{3-7}=-1$$

$$m_2=m_{AB}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{-1-4}{6-7}=5$$

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{5+1}{1+(-1)(5)} = -1,5 \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} - 56^{\circ}18' = 123^{\circ}42'$$

Cálculo del ángulo β conformado por el lado inicial ***AB*** y el lado final ***BC***:

$$m_1 = m_{AB} = 5$$

$$m_2 = m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{8+1}{3-6} = -3$$

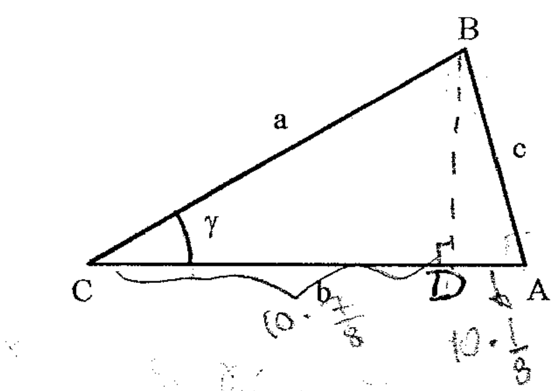
$$tg\beta = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{-3-5}{1+(5)(-3)} = 0,5714 \Rightarrow \beta = 29^{\circ}45'$$

Se debe ahora recordar que en todo triángulo se cumple que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} \Rightarrow \gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta \Rightarrow$$

$$\gamma = 180^{\circ} - (123^{\circ}42' + 29^{\circ}45') = 26^{\circ}33''$$

15.- Dado un triángulo isósceles ***ABC***, donde $a = b = 10$ y $\cos\gamma = \dfrac{7}{8}$.



Encontrar el valor del lado ***c***.

PRIMER METODO DE SOLUCION.

La manera más simple de resolver este problema es aplicando la ley del coseno, como sigue:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\lambda = (10)^2 + (10)^2 - 2(10)(10)\left(\frac{7}{8}\right) =$$

$$\Rightarrow 200 - 200\left(\frac{7}{8}\right) = 200\left(1 - \frac{7}{8}\right) = 200\left(\frac{1}{8}\right) = 25 \Rightarrow c = 5$$

SEGUNDO METODO DE SOLUCION.

Desde el vértice ***B*** se baja una perpendicular al lado ***b***, formando en ese lado dos segmentos b_1 y b_2 tales que $b_1 + b_2 = b.$ Además la recta perpendicular a ***b*** trazada desde ***B*** la llamamos ***h*** (altura).

Considerando ahora el triángulo ***BCD*** y □ γ podemos escribir:

$$b_1 = a \cdot \cos\gamma = (10)\left(\frac{7}{8}\right) =$$

Y por lo tanto:

$$b_2 = b - b_1 = 10 - (10)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{10}{8}$$

Conocido $b_1 = 10\left(\frac{7}{8}\right)$ se puede calcular ***h*** en el ΔBCD:

$$h^2 = a^2 - (b_2)^2 = 10^2 - 10^2\left(\frac{7}{8}\right)^2 = 10^2\left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$$

Ahora, considerando el ΔADB:

$$c^2 = h^2 + (b_1)^2 = 10^2\left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right] + 10^2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 10^2\left[1 - \frac{49}{64} + \frac{1}{64}\right] =$$

$$\Rightarrow c^2 = 10^2\left(\frac{16}{64}\right) = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow c = 5$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #38.
Tema: Productos notables.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

- $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$
- $(x+a)(x+a)=(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$
- $(x-a)(x-a)=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$
- $(x+a)(x+a)(x+a)=(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$
- $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$
- $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
- $(x-a)(x-a)(x-a)=(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$
- $(a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-2bc-c^2$

PREGUNTAS:

1.- Resolver:

$(x-5)(x+8)=$

$\Re = x^2+3x-40$

2.- Resolver:

$$(9+4m)^2 =$$

$$\Re = 81+72m+16m^2$$

3.- Resolver:

$$(4m^5+5n^6)^2 =$$

$$\Re = 16m^{10}+40m^5n^6+25n^{12}$$

4.- Resolver:

$$(7a^2b^3+5x^4)^2 =$$

$$\Re = 49a^4b^6+70a^2b^3x^4+25x^8$$

5.- Resolver:

$$(8x^2y+9m^3)^2 =$$

$$\Re = 64x^4y^2+144x^2ym^3+81m^6$$

6.- Resolver: $(x+y+z)^2 =$

$$(x+y+z)^2 = \left[x+(y+z)\right]^2 = x^2+2x(y+z)+(y+z)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2 =$$

$$\Re \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

7.- Resolver: $(x+y-z)^2 =$

$$\left[x+\left(y-z\right)\right]^2 = x^2+2x\left(y-z\right)+\left(y-z\right)^2 \Rightarrow x^2+2xy-2xz+y^2-2yz+z^2 \Rightarrow$$
$$\Re \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$$

8.- Resolver:

$$\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-a^2\right)=$$
$$\Re = x^4-a^4$$

9.- Resolver:

$$\left(x^{a+1}+y^{x-2}\right)^2 =$$
$$\Re = x^{2a+2}+2\left(x^{a+1}\right)\left(y^{x-2}\right)+y^{2x-4}$$

10.- Resolver:

$$\left(1-8xy\right)\left(8xy+1\right)=\left(1-8xy\right)\left(1+8xy\right)=$$
$$\Re = 1-64x^2y^2$$

11.- Resolver:

$$\left(a^{x+1}-2b^{x-1}\right)\left(2b^{x-1}+a^{x+1}\right)=\left(a^{x+1}-2b^{x-1}\right)\left(a^{x+1}+2b^{x-1}\right)=$$
$$\Re = a^{2x+2}-4b^{2x-2}$$

12.- Resolver: $\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)=$

$$\left[\left(x+y\right)+z\right]\cdot\left[\left(x+y\right)-z\right]=\left(x+y\right)^2-z^2$$
$$\Re = x^2+y^2+2xy-z^2$$

13.- Resolver:

$$(x+y+z)(x-y-z)=$$

$$\left[x+(y+z)\right]\cdot\left[x-(y+z)\right]=x^2-(y-z)^2$$

$$\Re=x^2-y^2+2yz-z^2$$

14.- Resolver:

$$(x^3-x^2-x)(x^3+x^2+x)=$$

$$\left[x^3-(x^2+x)\right]\cdot\left[x^3+(x^2+x)\right]=(x^3)^2-(x^2+x)^2=$$

$$=x^6-(x^4+2x^3+x^2)=$$

$$\Re=x^6-x^4-2x^3-x^2$$

15.- Resolver:

$$(m-n-1)(m-n+1)=$$

$$\left[(m-n)-1\right]\cdot\left[(m-n)+1\right]=(m-n)^2-(1)^2=m^2-2mn+n^2-1$$

$$\Re=m^2-2mn+n^2-1$$

16.- Resolver:

$$(x+y-2)(x-y+2)=$$

$$\left[x+(y-2)\right]\cdot\left[x-(y-2)\right]=x^2-(y-2)^2=x^2-(y^2-4y+4)=$$

$$\Re=x^2-y^2+4y-4$$

17.- Resolver:

$$(n^2+2n+1)(n^2-2n-1)=$$

$$=\left[n^2+(2n+1)\right]\cdot\left[n^2-(2n+1)\right]=(n^2)^2-(2n+1)^2=n^4-(4n^2+4n+1)=$$

$$\Re=n^4-4n^2-4n-1$$

18.- Resolver:

$$\left(a^2-2a+3\right)\left(a^2+2a+3\right)=$$

$$=\left[\left(a^2+3\right)-2a\right]\cdot\left[\left(a^2+3\right)+2a\right]=\left(a^2+3\right)^2-\left(2a\right)^2=$$

$$=a^4+6a^2+9-4a^2=$$

$$\Re=a^4+2a^2+9$$

19. Resolver:

$$\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+5x-6\right)=$$

$$=\left[x^2-\left(5x-6\right)\right]\cdot\left[x^2+\left(5x-6\right)\right]=\left(x^2\right)^2-\left(5x-6\right)^2=$$

$$\Re=x^4-25x^2+60x-36$$

20.- Resolver:

$$\left(xy^2-9\right)\left(xy^2+12\right)=$$

$$=\left(xy^2\right)^2+\left(12-9\right)xy^2+\left(12\right)\left(-9\right)=$$

$$\Re=x^2y^4+3xy^2-108$$

21.- Resolver:

$$\left(a^{x+1}-6\right)\left(a^{x+1}-5\right)=$$

$$=\left(a^{x+1}\right)^2-\left(6+5\right)a^{x+1}+\left(-6\right)\left(-5\right)=$$

$$\Re=a^{2x+2}-11a^{x+1}+30$$

22.- Resolver:

$$(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)=$$

$$(a+2)(a-2)(a+3)(a-3)=(a^2-4)(a^2-9)=$$

$$\Re=a^4-13a^2+36$$

23.- Resolver:

$$(2x+1)^3=$$

$$=(2x)^3+3(2x)^2+3(2x)+1=$$

$$\Re=8x^3+12x^2+6x+1$$

24.- Resolver:

$$(4n+3)^3=$$

$$=(4n)^3+3(4n)^2(3)+3(4n)(3)^2+(3)^3=$$

$$\Re=64n^3+144n^2+108n+27$$

25.- Resolver:

$$(a^2-2b)^3=$$

$$=(a^2)^3-3(a^2)^2(2b)+3(a^2)(2b)^2-(2b)^3=$$

$$\Re=a^6-6a^4b+12a^2b^2-8b^3$$

26.- $(2x+3y)^3 =$

Solución:

$(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 =$

$R = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

27.- $(1-a^2)^3 =$

Solución:

$$1-3(a^2)+3(a^2)^2-(a^2)^3 =$$

$$R = 1-3a^2+3a^4-a^6$$

28.- $(x^3y^3-6)(x^3y^3+8)=$

Solución:

$$(x^3y^3)^2+(8-6)(x^3y^3)-48=$$

$$R = x^6y^6+2x^3y^3-48$$

29.- $(x+1)(x-1)(x^2-2)=$

Solución:

$$(x^2-1)(x^2-2)=$$

$$R = x^4-3x^2+2$$

30.-

$(a+3)(a^2+9)(a-3)=$

Solución:

$$R=(a^2-9)(a^2+9)=a^4-81$$

31.- $\left(x+5\right)\left(x-5\right)\left(x^2+1\right)=$

Solución:

$$\left(x^2-25\right)\left(x^2+1\right)=x^4-\left(25-1\right)x^2-25=$$
$$R=x^4-24x^2-25$$

32.- $\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a+2\right)\left(a-2\right)=$

Solución:

$$\left(a^2-1\right)\left(a^2-4\right)=a^4-\left(1+4\right)a^2+4=$$
$$R=a^4-5a^2+4$$

33.- $\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(a-2\right)\left(a+3\right)=$

Solución:

$$\left(a^2-4\right)\left(a^2-9\right)=a^4-\left(4+9\right)a^2+36=$$
$$R=a^4-13a^2+36$$

COCIENTES NOTABLES:

Obtener el cociente de:

1.- $\dfrac{x^2-1}{x+1}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)}=\left(x-1\right)$$

2.- $\dfrac{1-x^2}{1-x}=$

Solución:

$$R = \frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)} = (1+x)$$

3.-

$$\frac{x^2 - y^2}{x+y} =$$

Solución:

$$R = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = x - y$$

4.-

$$\frac{y^2 - x^2}{y-x} =$$

Solución:

$$R = \frac{(y+x)(y-x)}{(y-x)} = y + x$$

5.- $\dfrac{x^2 - 4}{x+2} =$

Solución:

$$R = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$$

6.- $\dfrac{9 - x^4}{3 - x^2} =$

Solución:

$$R = \frac{(3-x^2)(3+x^2)}{3-x^2} = 3 + x^2$$

7.- $\dfrac{a^2 - 4b^2}{a+2b} =$

Solución:

$$R=\frac{(a+2b)(a-2b)}{a+2b}=a-2b$$

8.- $\dfrac{25-36x^4}{5-6x^2}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(5+6x^2\right)\left(5-6x^2\right)}{5-6x^2}=5+6x^2$$

9.- $\dfrac{4x^2-9m^2n^4}{2x+3mn^2}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(2x-3mn^2\right)\left(2x+3mn^2\right)}{\left(2x+3mn^2\right)}=2x-3mn^2$$

10.-
$\dfrac{36m^2-49n^2x^4}{6m-7nx^2}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(6m-7nx^2\right)\left(6m+7nx^2\right)}{6m-7nx^2}=6m+7nx^2$$

11.- $\dfrac{81a^6-100b^8}{9a^3+10b^4}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(9a^3-10b^4\right)\left(9a^3+10b^4\right)}{9a^3+10b^4}=9a^3-10b^4$$

12.- $\dfrac{a^4b^6-4x^8y^{10}}{a^2b^3+2x^4y^5}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(a^2b^3-2x^4y^5\right)\left(a^2b^3+2x^4y^5\right)}{a^2b^3+2x^4y^5}=a^2b^3-2x^4y^5$$

13.- $\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n+y^n}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(x^n-y^n\right)\left(x^n+y^n\right)}{x^n+y^n}=x^n-y^n$$

14.- $\frac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}-10}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(a^{x+1}-10\right)\left(a^{x+1}+10\right)}{a^{x+1}-10}=a^{x+1}+10$$

15.- $\frac{1-9x^{2m+4}}{1+3x^{m+2}}=$

Solución:

$$R=\frac{\left(1-3x^{m+2}\right)\left(1+3x^{m+2}\right)}{\left(1+3x^{m+2}\right)}=1-3x^{m+2}$$

16.- $\frac{\left(x+y\right)^2-z^2}{\left(x+y\right)-z}=$

Solución:

$$\frac{\left[\left(x+y\right)+z\right]\left[\left(x+y\right)-z\right]}{\left(x+y\right)-z}=\left(x+y\right)+z$$

17.- $\dfrac{1-(a+b)^2}{1+(a+b)}=$

Solución:

$$R=\frac{\left[1-(a+b)\right]\left[1+(a+b)\right]}{1+(a+b)}=1-(a+b)$$

18.- $\dfrac{4-(m+n)^2}{2+(m+n)}=$

Solución:

$$R=\frac{\left[2+(m+n)\right]\left[2-(m+n)\right]}{2+(m+n)}=2-(m+n)$$

19.- $\dfrac{x^2-(x-y)^2}{x+(x-y)}=$

Solución:

$$R=\frac{\left[x+(x-y)\right]\left[x-(x-y)\right]}{x+(x-y)}=x-(x-y)$$

20.- $\dfrac{(a+x)^2-9}{(a+x)+3}=$

Solución:

$$R=\frac{\left[(a+x)-3\right]\left[(a+x)+3\right]}{(a+x)+3}=(a+x)-3$$

COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS CUBOS DE DOS CANTIDADES:

1.- $\frac{1+a^3}{1+a}=$

Solución:

$$R=1-a+a^2$$

2.- $\frac{1-a^3}{1-a}=$

Solución:

$$R=1+a+a^2$$

3.- $\frac{x^3+y^3}{x+y}=$

Solución:

$$R=x^2-xy+y^2$$

4.- $\frac{8a^3-1}{2a-1}=$

Solución:

$R=4a^2+2a+1$

5.- $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}=$

Solución:

$$R=4x^2-6xy+9y^2$$

6.- $\frac{27m^3-125n^3}{3m-5n}=$

Solución:

$$R = 9m^2 + +15mn + 25n^2$$

7.- $\frac{64a^3 + 343}{4a + 7} =$

Solución:

$$R = 16a^2 - 28a + 49$$

8.- $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} =$

Solución:

$$R = 36 + 30y + 25y^2$$

9.- $\frac{1 + a^3b^3}{1 + ab} =$

Solución:

$$R = 1 - ab + a^2b^2$$

10.- $\frac{729 - 512b^3}{9 - 8b} =$

Solución:

$$R = 81 + 72b + 64b^2$$

11.- $\frac{a^3x^3 + b^3}{ax + b} =$

Solución:

$$R = a^2x^2 - abx + b^2$$

12.- $\frac{n^3 - m^3x^3}{n - mx} =$

Solución:

$$R = n^2 + nmx + m^2x^2$$

13.- $\dfrac{x^6 - 27y^3}{x^2 - 3y} =$

Solución:

$$R = x^4 + 3x^2y + 9y^2$$

14.- $\dfrac{8a^9 + y^9}{2a^3 + y^3} =$

Solución:

$$R = 4a^6 - 2a^3y^3 + y^6$$

15.- $\dfrac{1 - x^{12}}{1 - x^4} =$

Solución:

$$R = 1 + x^4 + x^8$$

16.- $\dfrac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1} =$

Solución:

$$R = 9x^4 - 3x^2 + 1$$

17.- $\dfrac{64a^3 + b^9}{4a + b^3} =$

Solución:

$$R = 16a^2 - 4ab^3 + b^6$$

18.- $\dfrac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} =$

Solución:

$$R = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

19.- $\dfrac{125 - 343x^{15}}{5 - 7x^5} =$

Solución:

$$R = 25 + 35x^5 + 49x^{10}$$

20.- $\dfrac{n^6 + 1}{n^2 + 1} =$

Solución:

$$R = n^4 - n^2 + 1$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #39.
Tema: Circunferencia y Círculo.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

- Ecuación canónica de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ donde $C(h,k)$ es el centro y $\boldsymbol{R}$ es el radio.
- Ecuación general de la circunferencia: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ donde siempre debe cumplirse que $A=B>0$, como también que no exista término $\boldsymbol{xy}$.
- Dada una ecuación cuadrática arbitraria, si es conocido que la curva describe una circunferencia, la ecuación puede ser algebraicamente transformada, utilizando la técnica de complementación de cuadrados, obteniéndose la ecuación canónica, donde el centro y el radio pueden ser determinados.

PREGUNTAS:

1.- Escriba las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

(a).- Centro a $(-1,3)$ y radio igual a 9.

$$\left[x-(-1)\right]^2+(y-3)^2=(9)^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=81 \Rightarrow x^2+y^2+2x-6y-71=0$$

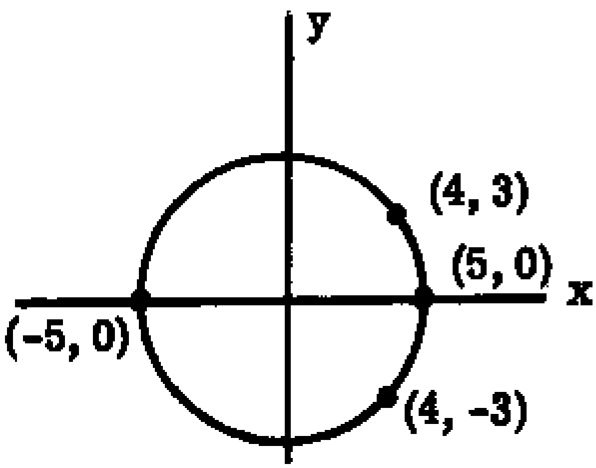
(b).- Centro a $(2,-3)$ y radio iguala 5.

$$(x-2)^2+\left[y-(-3)\right]^2=(5)^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=25 \Rightarrow x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

2.- Encontrar el centro y el radio de una circunferencia que tiene la ecuación general siguiente: $x^2-4x+y^2+8y-5=0$

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+8y+16\right)=5+4+16=25 \Rightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+4)^2=25 \Rightarrow C(2,-4); R=5$$

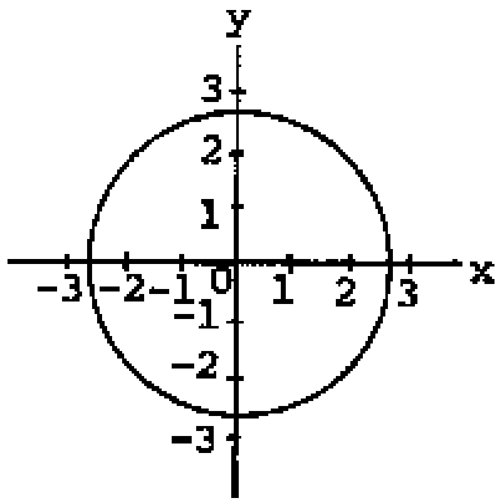
3.- Discuta el gráfico de la ecuación $x^2+y^2=25$



Esta es una ecuación de la forma $x^2+y^2=R^2$ y por lo tanto su gráfico es una circunferencia de radio 5 y centro en el origen. Nótese que esta gráfica no representa una función ya que, excepto por x =-5 y x = 5 , cada permisible valor de ***x*** está asociado con dos valores de ***y***.

El dominio de esta función es $\{x| -5 \le x \le 5\}$ y el rango $\{y| -5 \le y \le 5\}$.

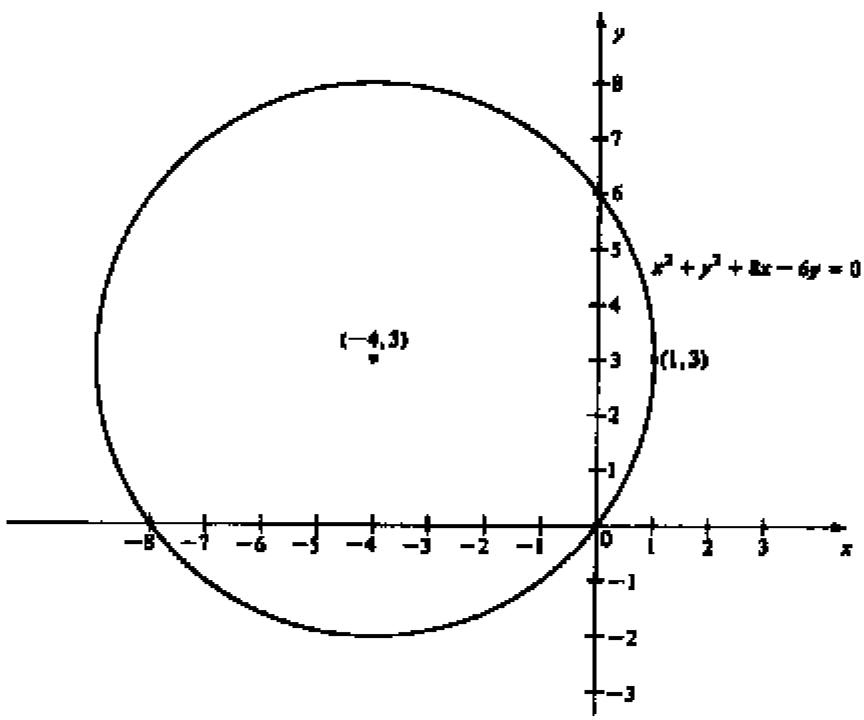
4.- Grafique la ecuación $2x^2+2y^2-13=0.$



$$2x^2+2y^2=13 \Rightarrow \frac{2x^2+2y^2}{2}=\frac{13}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{13}{2}$$

De donde $C(0,0)$ y $R=\sqrt{\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

5.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:
$K(1,3); L(-8,0); M(0,6)$.



Se partirá de la ecuación general de la circunferencia: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

Para el punto $K(1,3)$: $(1)^2+(3)^2+D(1)+E(3)+F=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D+3F+F=-10$...(1)

Para el punto $L(-8,0)$: $(-8)^2+(0)^2+D(-8)+E(0)+F=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -8D+F=-64$..(2)

Para el punto $M(0,6)$: $(0)^2+(6)^2+D(0)+E(6)+F=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6E+F=-36$...(3)

Entonces, se debe resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para ello, se multiplica la ecuación (1) por 8 y se le suma a (2) para eliminar D, se obtiene:

$24E+9F=-144$...(4)

Trabajando ahora con las ecuaciones (3) y (4), se obtiene:

$F=0$
$E=-6$

Introduciendo estos valores en (1):

$D=8$

La ecuación general buscada será entonces:

$$x^2+y^2+8x-6y=0$$

De donde, utilizando el método de complementación de cuadrados, po0demos encontrar la ecuación canónica:

$$\left(x^2+8x\right)+\left(y^2-6y\right)=0 \Rightarrow \left(x^2+8x+16\right)+\left(y^2-6y+9\right)=16+9=25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=25$$

De aquí, se concluye que:

$$C(-4,3);R=5$$

6.- Encontrar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:

$$P(4,0);Q(-4,0);R(0,4).$$

La ecuación general de la circunferencia puede ser escrita como:

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Para el punto $P(4,0)$:

$$(4)^2+(0)^2+2D(4)+2E(0)+F=0 \Rightarrow 8D+F=-16..........................(1)$$

Para el punto $Q(-4,0)$:

$$(-4)^2+(0)^2+2D(-4)+2E(0)+F=0 \Rightarrow -8D+F=-16.....................(2)$$

Para el punto $R(0,4)$:

$$(0)^2+(4)^2+2D(0)+2E(4)+F=0 \Rightarrow 8E+F=-16............................(3)$$

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones conformado por (1), (2) y (3):

$$D=0;E=0;F=-16.$$

La ecuación general buscada será entonces:

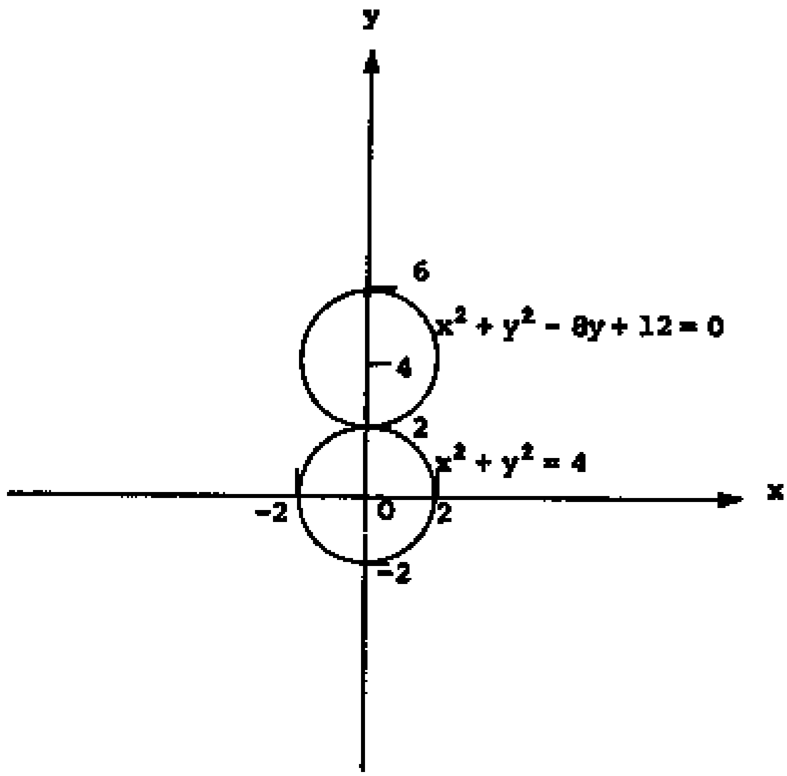
$$x^2+y^2-16=0$$

7.- Encontrar la intersección entre las dos siguientes circunferencias:

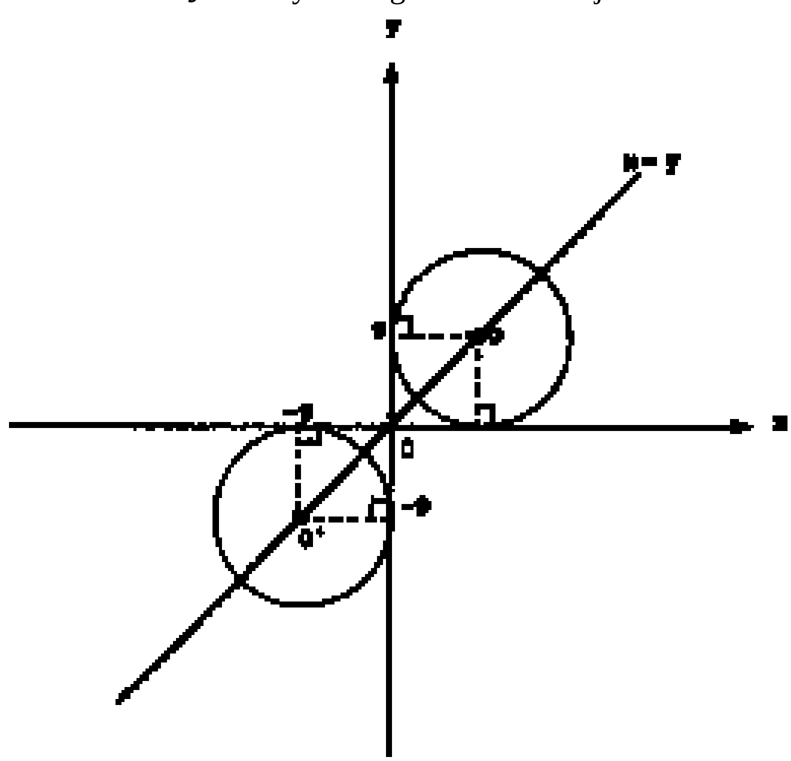
$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2-8y+12=0$$

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2=8y-12$$
$$4=8y-12 \Rightarrow 8y=16 \Rightarrow y=2$$

Introduciendo el valor de $\boldsymbol{y = 2}$ en la primera ecuación, se encuentra que $\boldsymbol{x = 0}$. Como hay una sola solución, las dos circunferencias deben ser necesariamente tangentes.



8.- Encontrar la ecuación canónica de la circunferencia que tiene radio $R = 9$, con centro sobre la recta $l \equiv y = x$ y es tangente a ambos ejes de coordenadas ***x, y.***



Como se puede ver en la gráfica anterior, existen dos soluciones a este problema, con centros en $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{O'}$. Las coordenadas de ambos centros los llamaremos:

$$O(a,b)$$

$$O'(c,d)$$

Como los puntos (a,b) y (c,d) están ambos sobre la recta $l \equiv y = x$, entonces:

$$a = b$$

$$c = d$$

Las ecuaciones serán:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = (9)^2$$
$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = (9)^2$$

Como las circunferencias son tangentes a los ejes de coordenadas, necesariamente se debe cumplir que:

$$a = b = 9$$
$$c = d = -9$$

Y las ecuaciones serán en definitiva:

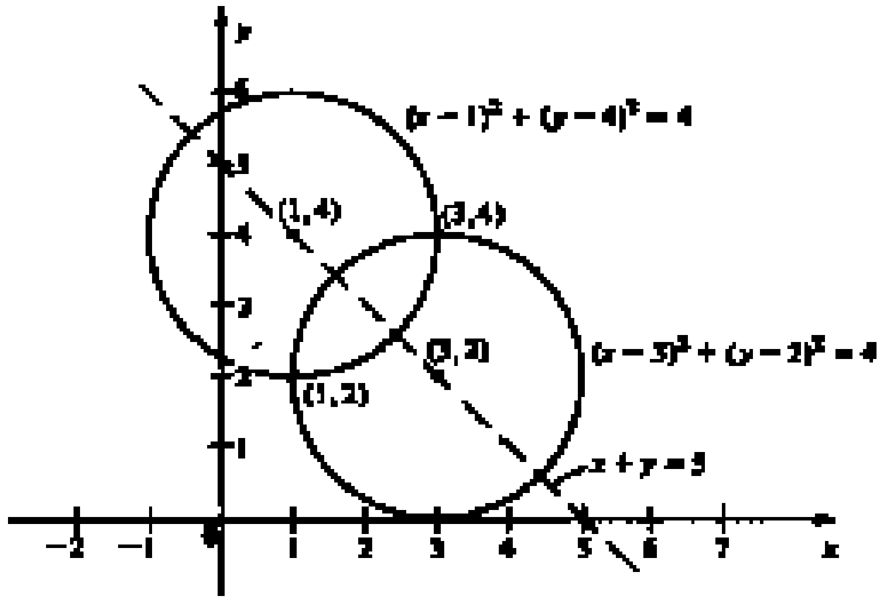
$$(x-9)^2 + (y-9)^2 = 81$$
$$(x+9)^2 + (y+9)^2 = 81$$

9.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$ y tiene radio igual a $R = 2$.

Para resolver este problema es mejor usar de entrada la ecuación canónica de la circunferencia; o sea:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

Como los dos puntos dados son puntos de la circunferencia, los valores de sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma:



$$(1-h)^2+(2-k)^2=(2)^2=4 \Rightarrow 1-2h+h^2+4-4k+k^2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2h+h^2-4k+k^2=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(3-h)^2+(4-k)^2=(2)^2=4 \Rightarrow 9-6h+h^2+16-8k+k^2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -6h+h^2-8k+k^2=-21 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Restando ahora (2) de (1):

$$4h+4k=20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$h=\frac{20-4k}{4}=(5-k)$$

Resolviendo ahora (1) y (3):

$$-2(5-k)+(5-k)^2-4k+k^2=-1 \Rightarrow k^2-6k+8=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (k-4)(k-2)=0 \Rightarrow k_1=2; k_2=4$$

Y como $h=5-k,$ sus correspondientes valores serán: $h_1=3; h_2=1$

Entonces, una circunferencia tendrá por centro $C_1(1,4)$ y la otra $C_2(3,2)$ y las correspondientes ecuaciones canónicas serán:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=4$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

10.- Encontrar la ecuación canónica de una circunferencia que tiene radio igual a 4, y es tangente a la recta $l \equiv x=-y$ en el punto $(0,0)$.

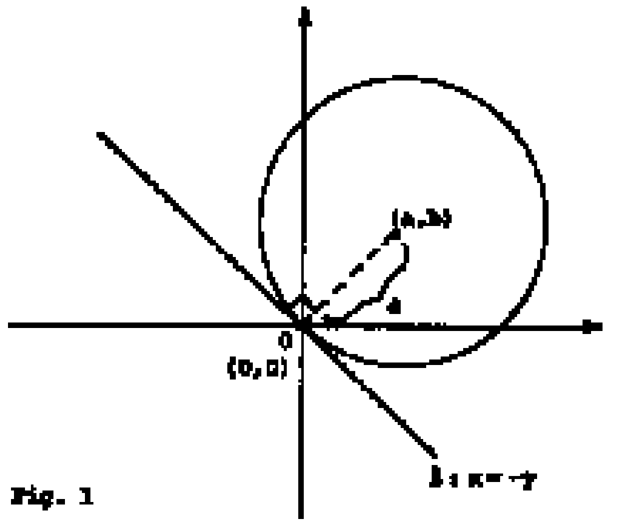
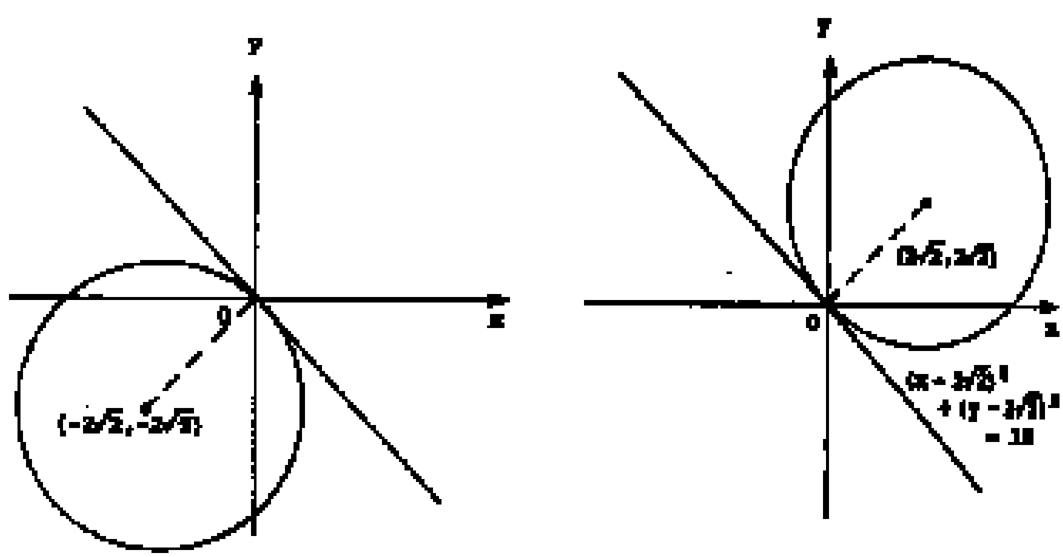


Fig. 1



$(x+2\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2=16$

Fig. 2

Partiendo de la ecuación canónica, tenemos que:

$(x-a)^2+(y-b)^2=(4)^2$ donde (a,b) es el centro de la circunferencia.

Utilizando ahora la fórmula que nos da la distancia de un punto, (a,b), a una recta $x=-y \Rightarrow x+y=0$, tenemos:

$$\left|\frac{(1-a)+(1-b)+0}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}\right|=4 \Rightarrow \left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right|=4$$

Como son dos incógnitas, se necesita otra ecuación, para ello se calculará la pendiente, m, del radio que pasa por (a,b) y , sabiendo que el radio es perpendicular a la recta $x=-y$, cuya pendiente es $m_2=-1$

$$m_1=\frac{b-0}{a-0}=-\frac{1}{m_2} \Rightarrow -\frac{1}{(-1)} \Rightarrow \frac{b}{a}=1$$

Entonces, se resolverán simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right|=4$$

$$\frac{b}{a}=1$$

De donde se obtiene:

$$a_1=2\sqrt{2} \Rightarrow b_1=2\sqrt{2}$$

$$a_2=-2\sqrt{2} \Rightarrow b_2=-2\sqrt{2}$$

Luego, existen dos soluciones y las ecuaciones requeridas son:

$$\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-2\sqrt{2}\right)^2=16$$

$$\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y+2\sqrt{2}\right)^2=16$$ como se muestra en la figura #2

11.- Dadas dos circunferencias representadas por sus ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

las cuales se intersecan en dos puntos, demostrar que la ecuación de la línea recta determinada por esos dos puntos es igual a: $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0.$

Se deberá demostrar que cada punto de intersección pertenece a la circunferencia y al mismo tiempo pertenece a la recta. Denotemos los puntos de intersección por:

(x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Si los puntos pertenecen a las circunferencias, entonces sus coordenadas deben satisfacer las ecuaciones de las mismas:

$$x_1^2 + y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0......................................(1)$$
$$x_1^2 + y_1^2 + D_2x_1 + E_2y_1 + F_2 = 0......................................(2)$$

Restando (2) de (1):

$$(D_1 - D_2)x_1 + (E_1 - E_2)y_1 + (F_1 - F_2) = 0......................................(3)$$

Lo que demuestra que el punto (x_1, y_1) satisface la ecuación (3). De igual manera se puede demostrar que el punto (x_2, y_2) satisface la ecuación (3) o similar. Entonces, como dos puntos distintos determinan una recta, se puede concluir que la ecuación:

$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$ es la ecuación de la recta conformada por los dos puntos de intersección de las dos circunferencias.

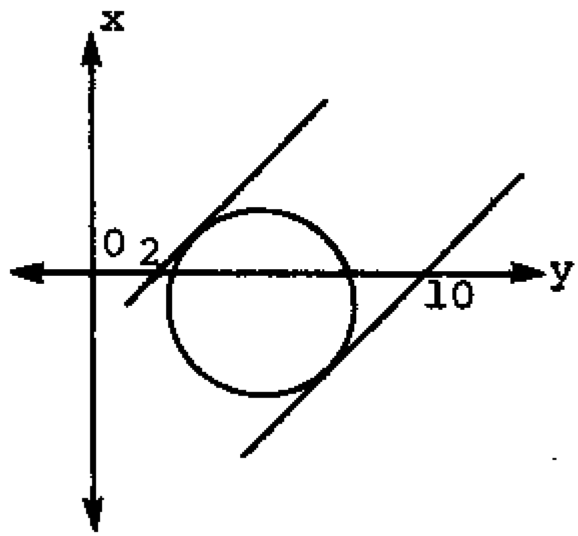
12.- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ con pendiente igual a 1.

Como la pendiente de la línea recta buscada es dada, se debe saber donde la recta corta al eje de las y para poder encontrar así la ecuación de dicha recta, utilizando la forma:

$y = mx + b$ donde ***m*** es la pendiente y ***b*** es el valor donde la recta corta al eje ***y***.

Como ***m* = *1***, dado, entonces se puede escribir $y = x + b.$



Ahora se procederá a encontrar ***b*** y para ello se introducirá el valor $y = x + b$ en la ecuación de la circunferencia, como sigue:

$$x^2 + (x+b)^2 - 10x + 2(x+b) + 18 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + (x^2 + 2xb + b^2) - 10x + 2x + 2b + 18 = 0$$

Agrupando términos semejantes:

$$2x^2 + (2b-8)x + (b^2 + 2b + 18) = 0$$

Aquí se deberá aplicar la fórmula resolvente para ecuaciones de segundo grado, o sea:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La fórmula anterior da dos soluciones; pero, como existe un solo punto de tangencia entre una recta y una circunferencia el discriminante de la fórmula resolvente deberá ser necesariamente igual a cero, entonces:

$$B^2 - 4AC = (2b-8)^2 - 4(2)(b^2 + 2b + 18) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4b^2 - 32b + 64 - 8b^2 - 16b - 144 = 0 \Rightarrow -4b^2 - 48b - 80 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4(b^2 + 12b + 20) = 0$$

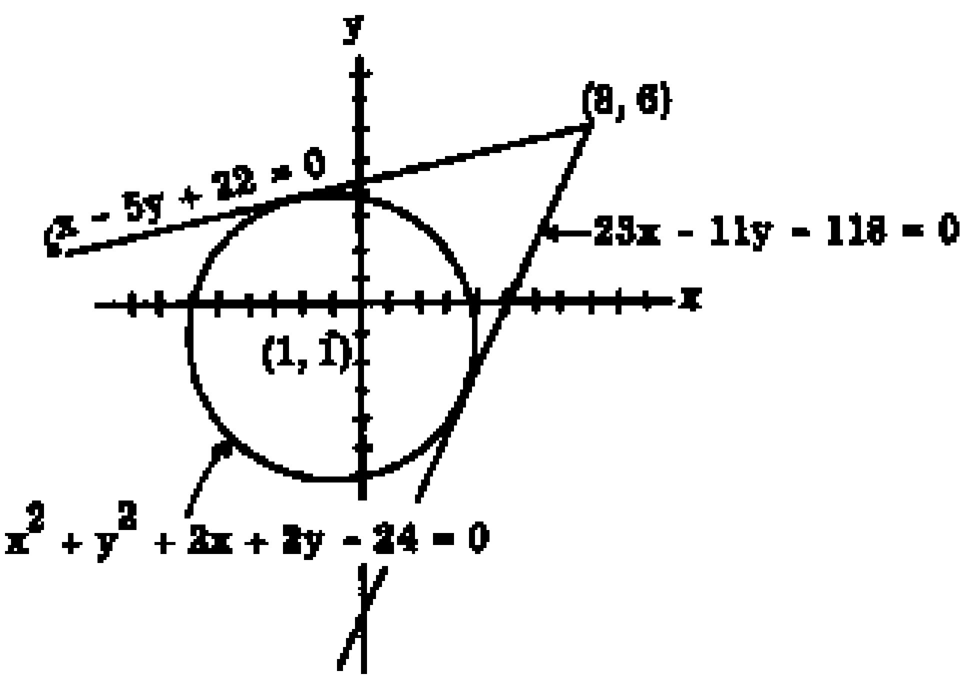
Resolviendo esta nueva ecuación cuadrática para encontrar ***b***, se encuentran dos valores:

$$(b+10)(b+2)=0$$
$$b_1=-10$$
$$b_2=-2$$

Entonces, existen dos líneas rectas, con pendiente igual a 1 y que son tangentes a la circunferencia dada:

$$y=x-10$$
$$y=x-2$$

13.- Encontrar la ecuación de la línea recta trazada desde el punto $(8,6)$ tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x+2y-24=0$.



Cualquier línea pasando por el punto dado tendrá una ecuación de la forma:

$y-6=m(x-8)\Rightarrow y=mx-8m+6$ Se deberá entonces encontrar el valor de la pendiente $\boldsymbol{m}$; para ello, se introducirá el valor $y=mx-8m+6$ en la ecuación de la circunferencia, como sigue:

$$x^2+\left(mx-8m+6\right)^2+2x+2\left(mx-8m+6\right)-24=0$$
$$x^2+\left(m^2x^2-16m^2x+12mx+64m^2-96m+36\right)+2x+\left(2mx-16m+12\right)-24=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(m^2+1\right)x^2-\left(16m^2-14m-2\right)x+\left(64m^2-112m+24\right)=0$$

Utilizando la fórmula resolvente para encontrar la solución de una ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]\pm\sqrt{\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]^2-4\left(m^2+1\right)\left(64m^2-112m+24\right)}}{2\left(m^2+1\right)}$$

Como x es la coordenada de un punto de tangencia, este solo puede ser tomado como un solo valor, por lo tanto, el discriminante de la ecuación resolvente anterior deberá ser igual a cero. Al igualar el discriminante a cero, se podrá encontrar el valor de $\boldsymbol{m}$ y por consiguiente, encontrar la ecuación de la tangente buscada:

$$\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]^2-4\left(m^2+1\right)\left(64m^2-112m+24\right)=0$$
$$\left(256m^4-448m^3+132m^2+56m+4\right)-\left(256m^4-448m^3+352m^2-448m+96\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -220m^2+504m-92=0\Rightarrow -4\left(55m^2-126m+23\right)=0\Rightarrow\left(5m-1\right)\left(11m-23\right)=0$$
$$\Rightarrow m_1=\frac{1}{5};m_2=\frac{23}{11}$$

Volviendo ahora a la ecuación de la tangente que pasa por el punto (8,6):

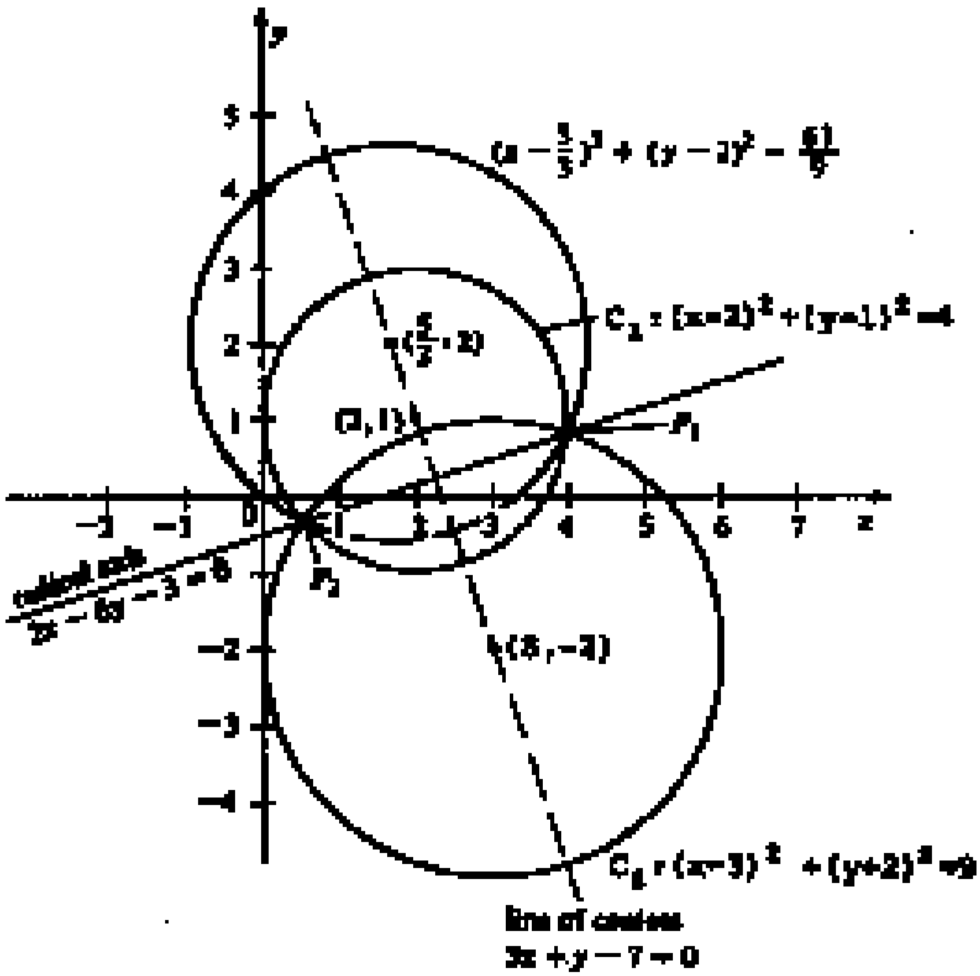
$y-6=m\left(x-8\right)$ y sustituyendo por los valores de $\boldsymbol{m}$ encontrados:

Para $m_1=\frac{1}{5}\Rightarrow y-6=\frac{1}{5}\left(x-8\right)\Rightarrow 5y-30=x-8\Rightarrow x-5y+22=0$

Para $m_2=\frac{23}{11}\Rightarrow y-6=\frac{23}{11}\left(x-8\right)\Rightarrow 11y-66=23x-184\Rightarrow 23x-11y-118=0$. O sea, que existen dos tangentes trazadas desde el mismo punto que cumplen con las condiciones del problema. Ver gráfica.

14.- Encontrar las intersecciones, si existe alguna, de las dos circunferencias dadas por las fórmulas siguientes:

$$C_1\equiv x^2+y^2-4x-2y+1=0$$
$$C_2\equiv x^2+y^2-6x+4y+4=0$$



El paso algebraico obvio es restar la segunda ecuación de la primera ecuación, lo que da como resultado:

$$2x - 6y - 3 = 0$$

Esta es la ecuación de una línea recta y su significación es que cualquier punto común a las dos circunferencias C_1 y C_2 debe reposar sobre esta línea recta.

La ecuación de la línea recta puede reescribirse como:

$$x = 3y + \frac{3}{2}$$

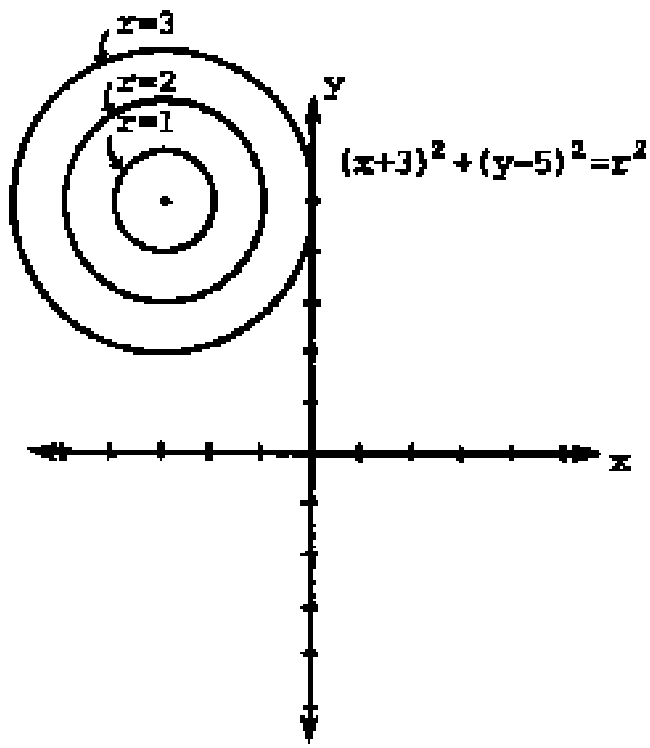
Introduciendo ahora este valor de $\boldsymbol{x}$ en la ecuación de C_1, se pueden encontrar los dos valores reales de $\boldsymbol{y}$, lo que permitirá, con el uso de $x = 3y + \frac{3}{2}$ encontrar los correspondientes valores de $\boldsymbol{x}$.

El resultado final será:

$$P_1\left(\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{135}}{20};\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{135}}{20}\right)=(3,99;0,83)$$

$$P_2\left(\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{135}}{20};\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{135}}{20}\right)=(0,51;-0,33)$$

15.- Escribir la ecuación de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro sea $(-3,5)$.

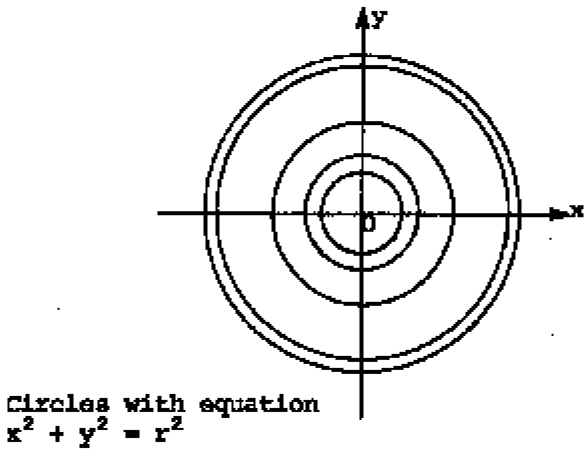


Basta con escribir la ecuación $(x+3)^2+(y-5)^2=R^2$ y darle valores reales positivos mayores que cero a R para tener toda una familia de circunferencias concéntricas.

15.- Encontrar las ecuaciones de las familias de circunferencias que cumplan con las siguientes condiciones:

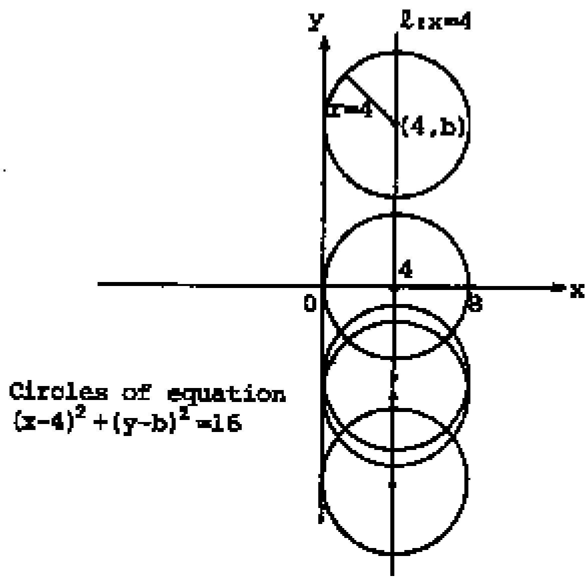
(a) Centro común en $(0,0)$.
(b) Radio igual a 4 y centro sobre la línea recta $x=4$.

Las soluciones son los siguientes:
(a).-



La forma canónica de las circunferencias descritas es: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ donde $a=b=0.$ Las ecuaciones se reducen a $x^2+y^2=R^2$.

(b).-



De nuevo, la solución es una ecuación de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ donde ***R* = 4** y ***a* = 4**, ya que el centro de la circunferencia está sobre la recta ***x* = 4**. Entonces, la ecuación requerida es: $(x-4)^2+(y-b)^2=16$ teniendo a ***b*** como parámetro.

16.- Encontrar las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada por la siguiente ecuación general: $x^2+y^2-10x+4y+17=0.$

$$\left(x^2-10x+?\right)+\left(y^2+4y+?\right)=-17\Rightarrow\left(x^2-10x+25\right)+\left(y^2+4y+4\right)=-17+25+4=12$$

$$\Rightarrow\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2=\left(\sqrt{12}\right)^2\Rightarrow C\left(5,-2\right);R=\sqrt{12}$$

17.- Escribir la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por su ecuación general:

$$6x^2-12x+6y^2+36y=36.$$

Se dividen ambos miembros de la igualdad por 6:

$$x^2-2x+y^2+6y=6\Rightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)=6+1+9=16\Rightarrow$$

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=16\Rightarrow C\left(1,-3\right);R=4.$$

18.- Encontrar la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por la ecuación general:

$$16x^2+16y^2+8x-32y=127$$

$$16\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}x-2y\right)=127\Rightarrow 16\left\{\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)\right\}=127+4+16=147$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{147}{16}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(\sqrt{\frac{147}{16}}\right)^2$$

19.- Escribir la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por su ecuación general:

$$16x^2-48x-75+16y^2+8y=0$$

$$16x^2-48x+16y^2+8y=75\Rightarrow 16\left[\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+8y+16\right)\right]=75+36+256=367\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+4\right)^2=\frac{367}{16}=\left(\sqrt{\frac{367}{16}}\right)^2$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #40.
Tema: Coordenadas.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Por coordenadas se entiende las magnitudes utilizadas para localizar un punto en un sistema de coordenadas, bien sea en un plano, en un espacio tridimensional o en un espacio de $\boldsymbol{n}$ dimensiones. Las coordenadas a lo largo de un eje deben preservar la posición relativa de espacios entre puntos; es decir, si un punto se encuentra entre otros dos en el espacio, las magnitudes de las coordenadas correspondientes deberían reflejar este hecho.

La proyección de un punto sobre un eje de coordenada es meramente la coordenada del punto correspondiente a ese eje. Así, la proyección de $(3,5)$ sobre el eje de las $\boldsymbol{x}$ es 3 y sobre el eje de las $\boldsymbol{y}$ es 5. La proyección de un segmento de línea recta $\boldsymbol{AB}$ sobre una de las coordenadas es el segmento de línea obtenido al proyectar los puntos extremos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ y luego se identifican las líneas segmentos entre los puntos proyectados.

Para encontrar el punto medio entre dos puntos se hace lo mismo que para encontrar el punto medio de un segmento de línea entre dos puntos, y ésto es lo mismo que que encontrar los puntos medios de las proyecciones del segmento de línea sobre cada uno de los ejes de coordenadas. Así, que dados los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto medio se obtiene al encontrar los puntos medios sobre los dos ejes, como sigue:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Para encontrar un punto cualquiera x_m entre x_1 y x_2, tal que la distancia entre x_m y x_1 es ***a*** y entre x_m y x_2 es ***b***, se utiliza la ecuación:

$$\frac{x_m-x_1}{x_2-x_m}=\frac{a}{b}=\lambda \Rightarrow x_m-x_1=\lambda\left(x_2-x_m\right)=\lambda x_2-\lambda x_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m+\lambda x_m=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x_m\left(1+\lambda\right)=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x_m=\frac{x_1+\lambda x_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

De igual manera se puede demostrar que:

$$y_m=\frac{y_1+\lambda y_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

Encontrar la distancia entre dos puntos $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$ está dada por la ecuación siguiente basada en el teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

La pendiente de una línea recta es el cambio de altura vertical provocado por un desplazamiento horizontal específico. Dados dos puntos sobre una misma línea recta, $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$, la pendiente de la línea recta está dada por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La pendiente de una línea recta puede también ser definida como la tangente del ángulo que la línea recta forma cuando cruza el eje de las ***x***. Basado en este hecho, dadas las pendientes de dos líneas rectas, es posible calcular el ángulo hecho a la intersección de las dos líneas. Para resolver este problema se utilizará una identidad trigonométrica; es decir que si m_1 y m_2 son las pendientes de las dos líneas, estos valores son iguales a $tg\alpha_1$ y $tg\alpha_2$, donde α_1 y α_2 son los respectivos ángulos de intersección de las dos líneas con el eje de las ***x***. El ángulo de intersección puede ser calculado con la fórmula:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\theta = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + \left(tg\alpha_1\right)\left(tg\alpha_2\right)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + \left(m_1\right)\left(m_2\right)} =$$

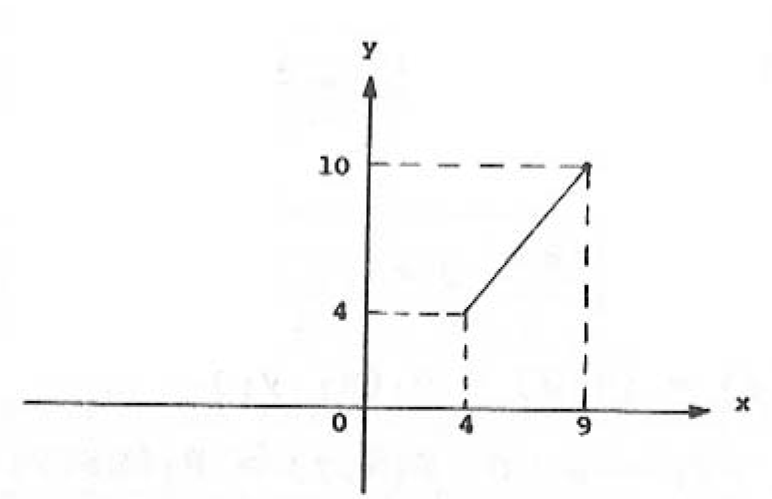
Tres puntos en el espacio se dicen que son colineales si todos pertenecen a la misma línea recta. Se puede determinar si varios puntos son colineales de varias maneras. Si ***A, B*** y ***C*** son puntos tales que la proyección de ***B*** sobre el eje de las ***x*** yace entre las proyecciones de ***A*** y ***C***; entonces, ***A, B*** y ***C*** son colineales., o sea, si:

$$\left|AB\right| + \left|BC\right| = \left|AC\right|$$

Otra manera de determinar si tres puntos son colineales, es que normalmente tres puntos forman un triángulo el cual tiene un área, si el área que forman los tres puntos es igual a cero, el triángulo no existe y, los tres puntos están todos sobre la misma línea recta. Un último método para determinar si tres puntos son colineales es que partiendo del mismo punto las pendientes que forma ese punto con los otros dos son iguales.

PREGUNTAS:

1.- Encontrar las proyecciones de ***AB*** sobre los ejes de coordenadas, siendo las coordenadas de los puntos los siguientes: $A\left(4,4\right); B\left(9,10\right)$.



Por definición, la proyección del segmento de línea recta $\overline{P_1P_2}$ el cual une los puntos $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y $P_2\left(x_2, y_2\right)$ sobre el eje de las ***x*** es $\left(x_2 - x_1\right)$, y sobre el eje de las ***y*** es $\left(y_2 - y_1\right)$. Entonces las proyecciones buscadas serán:

Eje de las ***x***: $\left(9-4\right)=5$.

Eje de las y: $(10-4)=6$.

2.- Encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide los siguientes segmentos en las razones dadas:

(a).- $P_1(4,4)$ y $P_2(8,8)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\frac{-1}{2}=\lambda=-\frac{1}{2}$

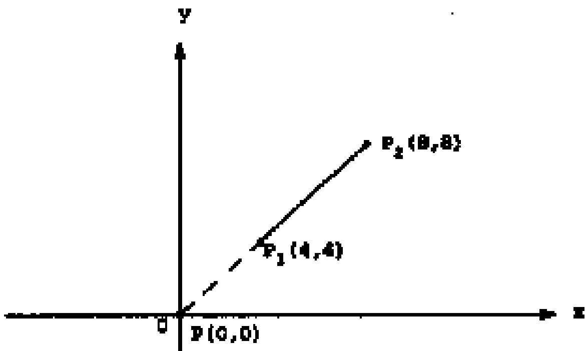


Fig. 1

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4-4}{\frac{1}{2}}=2(0)=0$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2(0)=0$$

(b).- $P_1(4,9)$ y $P_2(9,10)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\lambda=\frac{0}{a}=0$

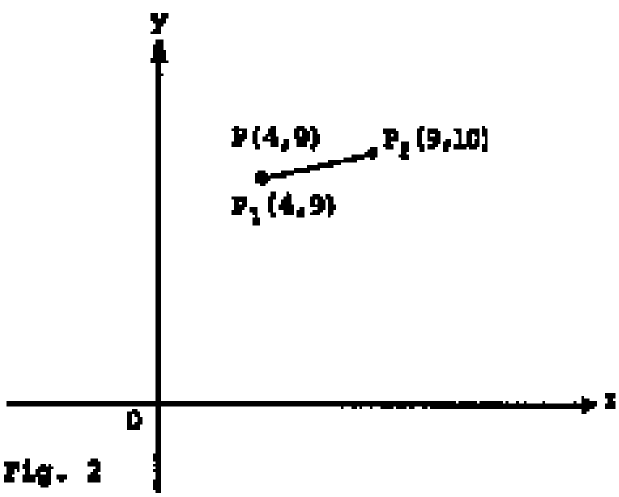


Fig. 2

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{(1+\lambda)} = \frac{4+(0)9}{1+0} = 4 = x_1$$

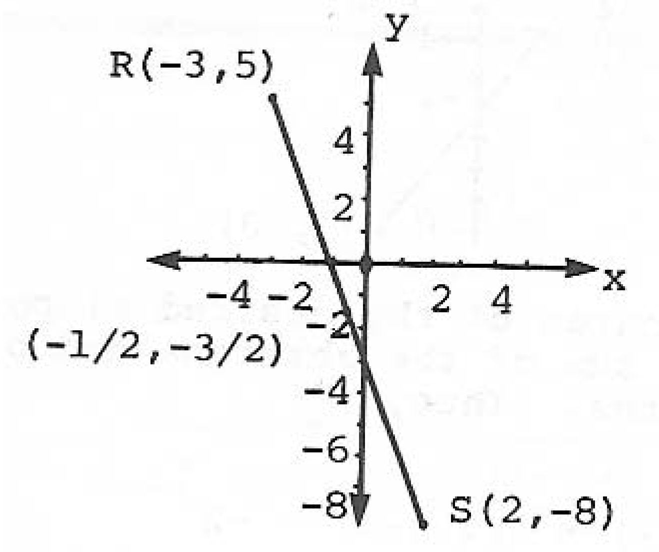
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{(1+\lambda)} = \frac{9+(0)10}{1+0} = 9 = y_1$$

3.- Encontrar el punto medio del segmento comprendido entre $R(-3,5)$ y $S(2,-8)$.

La fórmula para calcular el punto medio de un segmento, dadas las coordenadas de sus puntos extremos es la siguiente:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ Entonces:

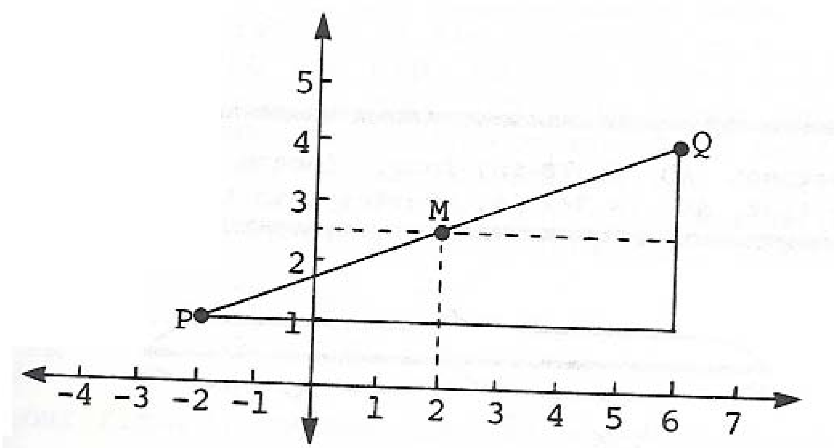
$$x_m = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}; y_m = \frac{5+(-8)}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_m\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$



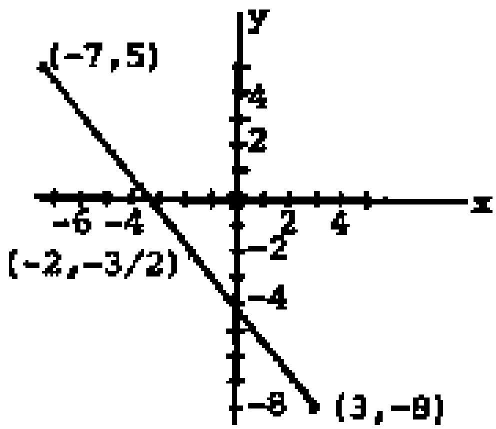
4.- ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$?

Sea $M(x,y)$ el punto medio de un segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$.

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = 2; y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

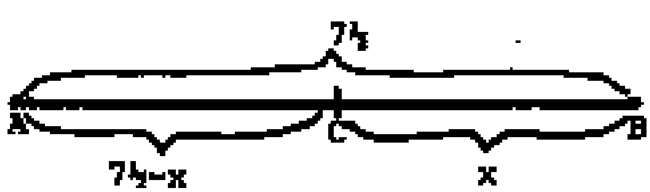


5.- Determine las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son los puntos $A(3,-8)$ y $B(-7,5)$.



$$x_M=\frac{3+(-7)}{2}=-2;\, y_M=\frac{(-8)+5}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow M\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$$

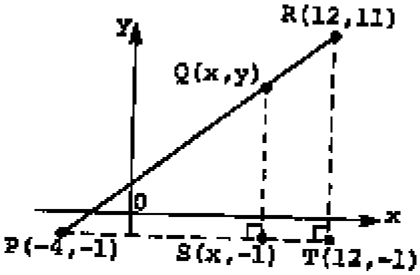
6.- El segmento de línea recta ***AB*** tiene una longitud de $7\frac{1}{2}(pulgadas)$. Localizar el punto C, entre ***A*** y ***B*** de manera que ***AC*** es $\frac{3}{2}(pulgadas)$ más corto que dos veces ***CB***.



Sea $\boldsymbol{x}$ la longitud de $\boldsymbol{CB}$ en pulgadas. Entonces, $\left(7\frac{1}{2}-x\right)$ es la longitud de $\boldsymbol{AC}$ y ya sabemos que $\boldsymbol{AC}$ es $\frac{3}{2}(pu\lg adas)$ más corto que dos veces $\boldsymbol{BC}$. Entonces, podemos escribir que:

$$7\frac{1}{2}-x=2x-3\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{15}{2}-x=2x-\frac{3}{2}\Rightarrow x=3\Rightarrow CB=3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC=7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}(pu\lg adas)$$

7.- Encontrar el punto Q que se encuentra a $\frac{3}{4}$ de la longitud del punto $P(-4,-1)$ al punto $R(12,11)$ a lo largo del segmento PR.

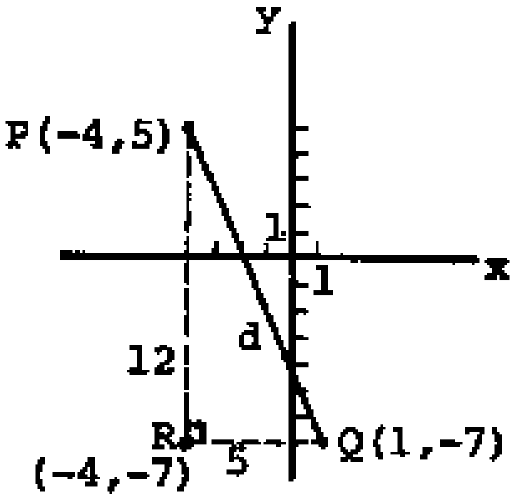


El problema consiste en encontrar las coordenadas del punto Q. Sabemos que $\overline{PQ}=\frac{3}{4}$ y por lo tanto $\overline{QR}=\frac{1}{4}$; de donde $\lambda=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$

$$x_Q=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{-4+(3)(12)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

$$y_Q=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{-1+(3)(11)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

8.- Encontrar la longitud del segmento de recta comprendido entre $P(-4,5)$ y $Q(1,-7)$, basándose en la información suministrada por la gráfica siguiente.



De la gráfica concluimos que se cumple:

$$\left(\overline{PR}\right)^2 + \left(\overline{RQ}\right)^2 = \left(\overline{PQ}\right)^2 \Rightarrow (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{169} = 13$$

9.- ¿Cuál es la distancia entre los puntos $(2,3)$ y $(7,11)$?

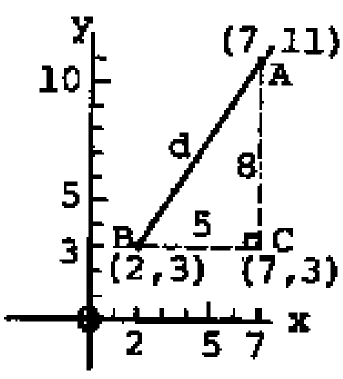


Fig. A

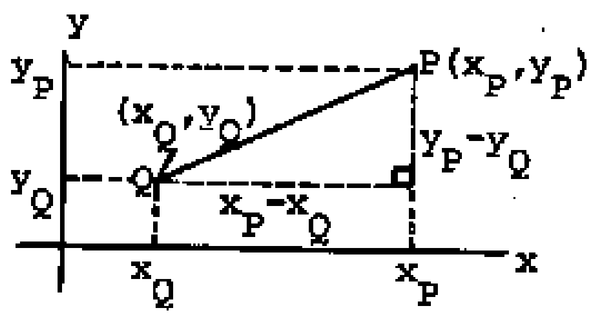


Fig. B

Observando la figura A, el triángulo ABC:

$$\left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 \Rightarrow (5)^2 + (8)^2 = 25 + 64 = 89 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{AB}\right) = \sqrt{89}$$

Generalizando, podemos observar la figura B, con los puntos P y Q:

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{\left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2}$$

10.- Encontrar la distancia que existe del origen de coordenadas cartesianas al punto (x, y).

Si denominamos $P_1(0,0)$ y $P_2(x, y)$, entonces:

$$d_{(P_1,P_2)} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

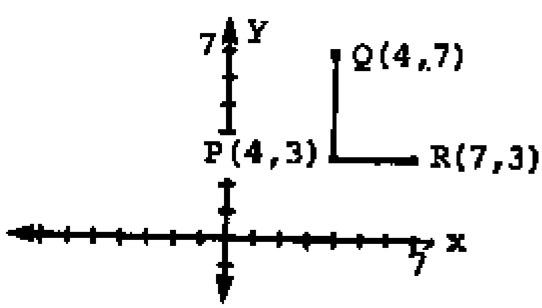
11.- Encontrar la distancia y la pendiente entre los siguientes puntos:
$(3,-5)$
$(2,4)$

Hagamos $P_1(x_1, y_1) \equiv (3,-5)$ y $P_2(x_2, y_2) \equiv (2,4)$

Luego: $d_{(P_1,P_2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{82}$

Para la pendiente: $m_{(P_1,P_2)} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4+5}{2-3} = -9$

11.- Dados los puntos $P(4,3); Q(4,7); R(7,3)$, encontrar las longitudes de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$.



Los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ tienen la misma abscisa y por lo tanto su distancia es igual a:

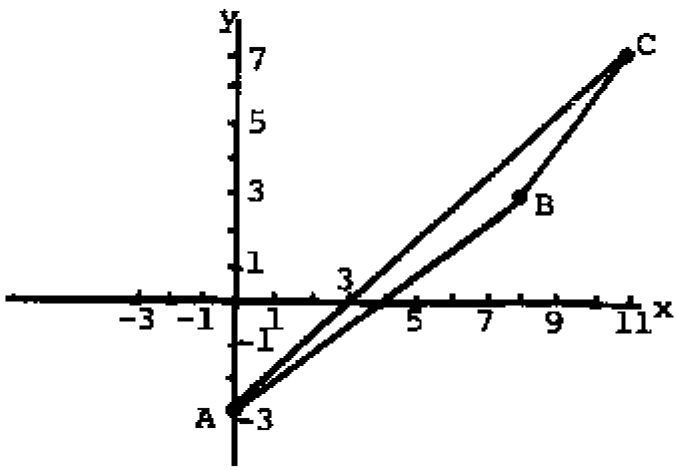
$$d_{(P,Q)} = \left|y_P - y_Q\right| = |3-7| = 4$$

Los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{R}$ tiene la misma ordenada y por lo tanto su distancia es igual a:

$$d_{(P,R)} = |x_P - x_R| = |4-7| = 3$$

12.- Usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, demostrar que los tres puntos siguientes son colineales:

$$A(0,-3); B(8,3); C(11,7)$$



Tres puntos son colineales si los tres pertenecen a la misma línea recta. Eso quiere decir que en este caso, se debería cumplir que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$d_1 = \overline{AB} = \sqrt{(8-0)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$d_2 = \overline{AC} = \sqrt{(11-0)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{210} \approx 14,74$$

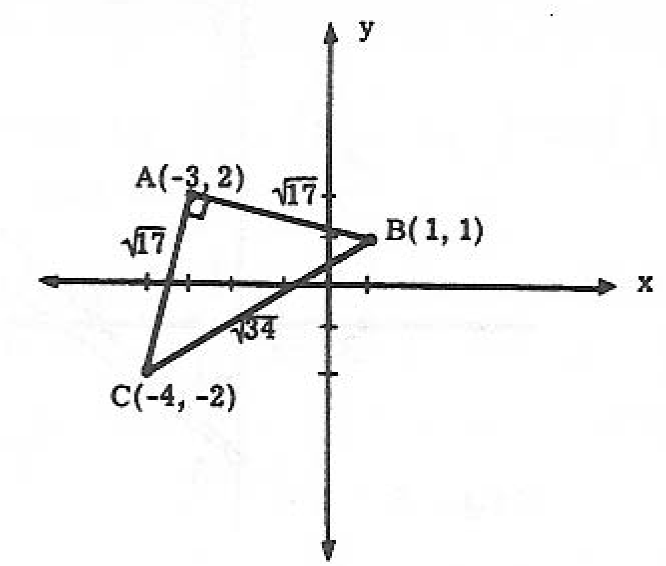
$$d_3 = \overline{BC} = \sqrt{(11-8)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Entonces:

$$d_1 + d_3 \neq d_2$$

Como se puede ver en la gráfica los tres puntos no son colineales y forman un triángulo.

13.- Demostrar que el triángulo conformado por $A(-3,2); B(1,1); C(-4,-2)$ es un triángulo isósceles.



$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-4+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34}$$

Nótese que el triángulo es definitivamente isósceles porque $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{17}$.

Pero, también, el triángulo es rectángulo, porque:

$\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\sqrt{34}\right|^2 = \left|\sqrt{17}\right|^2 + \left|\sqrt{17}\right|^2$, o sea el $\angle A = 90^{\circ}$.

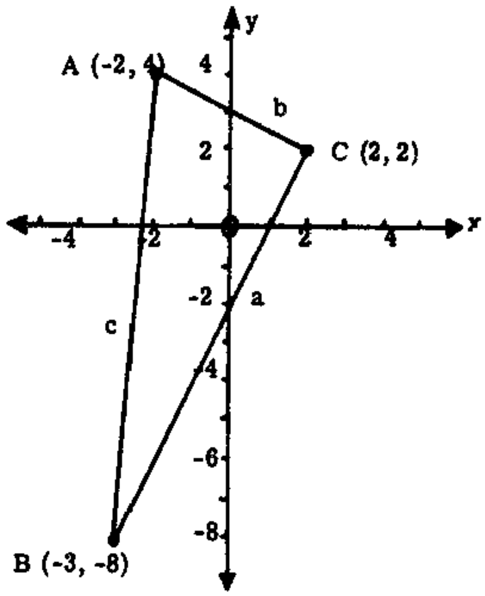
14.- Demostrar que los puntos $A(-2,4); B(-3,-8); C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Si el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es un triángulo rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces, para resolver este problema se deberán calcular las distancias entre los puntos dados y comprobar luego si se cumple la relación matemática del teorema de Pitágoras.

$$d_{(B,C)} = \sqrt{\left[2-(-3)\right]^2 + \left[2-(-8)\right]^2} = \sqrt{125} = a$$

$$d_{(C,A)} = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = b$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{[-3-(-2)]^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{145} = c$$

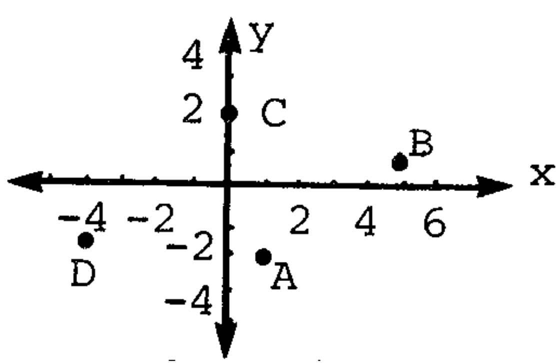


Conocidas loas distancias entre puntos se tratará de comprobar si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\sqrt{125}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2 = 125 + 20 = 145 = c^2$$

La relación se cumple y por tanto el triángulo es rectángulo, siendo $\angle C = 90^\circ$.

15.- Grafique los puntos $A(1,-2); B(5,1); C(0,2)$ en unos ejes cartesianos. Si estos tres puntos son vértices de un paralelogramo, encontrar las coordenadas del cuarto vértice ***D*** en el tercer cuadrante.



$$m_{(B,C)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{0-5} = -\frac{1}{5}$$

$$m_{(A,B)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-2)}{5-1} = \frac{3}{4}$$

Como es un paralelogramo, se debe cumplir que:

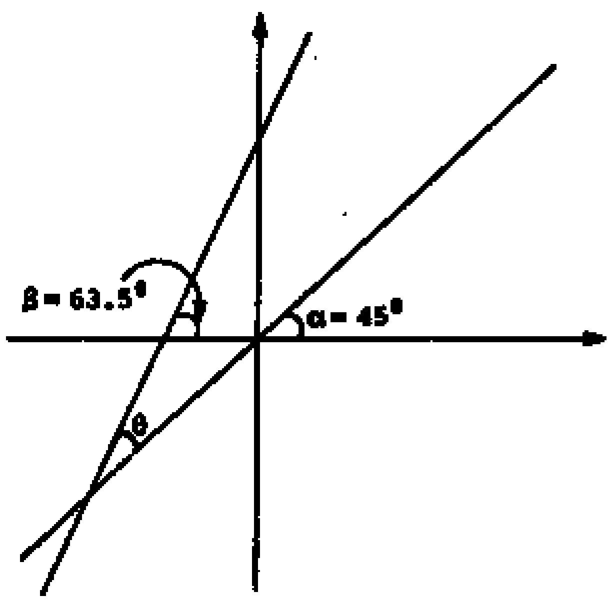
$$m_{(B,C)} = -\frac{1}{5} = m_{(A,D)} = \frac{y-(-2)}{x-1} \Rightarrow 1-x = 5y+10 \Rightarrow x+5y+9=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$m_{(A,B)} = \frac{3}{4} = m_{(D,C)} = \frac{2-y}{0-x} \Rightarrow -3x = 8-4y \Rightarrow 3x-4y+8=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

O sea, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo (1) y (2):

$$D(-4,-1)$$

16.- Encontrar el ángulo de intersección de las dos rectas mostradas en la figura siguiente:



Llamemos: $l_2 \Rightarrow m_2 = tg\left(63,5^{o}\right) = 2; l_1 \Rightarrow m_1 = tg\left(45^{o}\right) = 1$

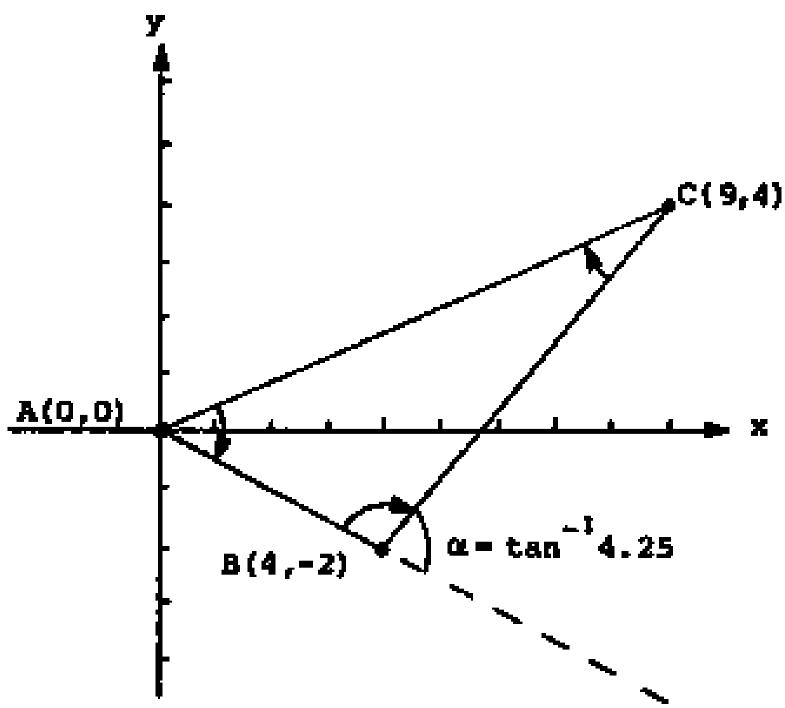
Luego: $tg(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{2-1}{1+(1)(2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,4^{o}$

17.- Encontrar la pendiente de una línea recta l_2 la cual forma un ángulo de 30º con una línea l_1 d pendiente igual a 1.

Se parte de la fórmula: $tg(\theta)=\frac{m_2-m_1}{1+(m_1)(m_2)} \Rightarrow tg(30^o)=\frac{m_2-1}{1+(1)(m_2)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolviendo: $m_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

18.- Encontrar el valor de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértice son:
$A(0,0);B(4,-2);C(9,4)$.



Se comienza por calcular las pendientes de los tres lados del triángulo:

$$m_{(A,B)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-0}{4-0}=-\frac{1}{2}$$

$$m_{(A,C)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-0}{9-0}=\frac{4}{9}$$

$$m_{B,C}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-2)}{9-4}=\frac{6}{5}$$

Luego:

$$tg\left(A\right)=\frac{m_2-m_1}{1+\left(m_1\right)\left(m_2\right)}=\frac{m_{(A,C)}-m_{(A,B)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(A,B)}\right]}=\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}=\frac{17}{14}$$

$$\angle A=tg^{-1}\left(\frac{17}{14}\right)=50,5^{\text{o}}\Rightarrow\angle A=50,5^{\text{o}}$$

También:

$$tg\left(C\right)=\frac{m_{(B,C)}-m_{(A,C)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(B,C)}\right]}=\frac{\frac{6}{5}-\frac{4}{9}}{1+\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}=0,49275$$

$$\angle C=tg^{-1}\left(0,49275\right)=26,2317^{\text{o}}$$

$$\angle B=180^{\text{o}}-\left[\angle A+\angle C\right]=180^{\text{o}}-\left(50,5^{\text{o}}+26,2317^{\text{o}}\right)=103,2683^{\text{o}}$$

Es una experiencia interesante calcular directamente el valor del ángulo ***B***:

$$tg\left(B\right)=\frac{m_{(A,B)}-m_{(B,C)}}{1+\left(m_{(A,B)}\right)\left(m_{(B,C)}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{\frac{-5-12}{10}}{\frac{10-6}{10}}=\frac{-17}{4}=-4,25$$

Eso quiere decir que el ángulo ***B*** debe estar necesariamente en el segundo cuadrante.

$tg^{-1}\left(-4,25\right)=-76,76^{\text{o}}$ por lo que el ángulo buscado será:

$$\angle B=180^{\text{o}}-76,76^{\text{o}}=103,24^{\text{o}}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41.

Tema: La línea recta.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde ***m*** es la pendiente de la línea recta y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ siendo ***a*** el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las ***x*** y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ecuación de la pendiente de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la pendiente, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$(m_1)(m_2) = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida d*** entre un punto $P_0(x_0, y_0)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax + By + C = 0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2 + B^2}$ se determina de acuerdo a cuanto sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia $\boldsymbol{d}$ será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, $\boldsymbol{d}$ será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta $\boldsymbol{l}$, se tomará como positivo el valor de la distancia:

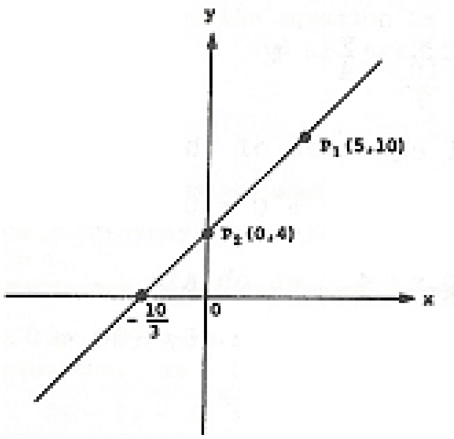
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PREGUNTAS:

1.- Escribir la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $P_1(5,10); P_2(0,4)$ y expresarla en sus diferentes formas:

La ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos se escribe a partir de la siguiente expresión:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$$



La forma reducida $y=mx+b$ es:

$$y-10=\frac{(4-10)}{(0-5)}(x-5)\Rightarrow y-10=\frac{6}{5}(x-5)\Rightarrow y=\frac{6}{5}x+4$$

La forma canónica $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es:

Para encontrar ***a,*** hacer $y=0\Rightarrow 0=\frac{6}{5}x+4\Rightarrow x=a=-\frac{10}{3}$

Para encontrar ***b***, hacer $x=0\Rightarrow y=0+4\Rightarrow y=b=4$

De donde:

$$\frac{x}{\left(-\frac{10}{3}\right)}+\frac{y}{4}=1$$

La ecuación general $Ax+By+C=0$ es:

$$y=\frac{6}{5}x+4\Rightarrow 5y=6x+4\Rightarrow 6x-5y+4=0$$

2.- Determine el valor de la constante ***A*** de tal manera que las líneas $l_1\equiv 3x-4y=12$ y $l_2\equiv Ax+6y=-9$ sean paralelas.

Si dos líneas rectas no verticales son paralelas sus pendientes deben ser iguales, o sea:

$$m_1 = m_2$$

Dada la ecuación general de una recta cualquiera:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right) \Rightarrow y = mx + b$$

O sea: $m = -\dfrac{A}{B}$

Entonces, dadas las dos rectas:

$$l_1 \equiv 3x - 4y - 12 = 0$$
$$l_2 \equiv Ax + 6y + 9 = 0$$

Si $m_1 = m_2 \Rightarrow -\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow \dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow \dfrac{3}{-4} = \dfrac{A_2}{6} \Rightarrow A_2 = A = -\dfrac{9}{2}$

3.- Encontrar la pendiente y los valores de la ordenada y la abscisa donde la recta corta los ejes de coordenadas de la recta $2x - 3y - 18 = 0.$

De problema anterior se sabe que:

$$m = -\frac{A}{B} = -\left(\frac{2}{-3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\left(\frac{-18}{-3}\right) = -6$$

Por otro lado la ecuación canónica es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Partiendo de la ecuación general:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow Ax+By=-C \Rightarrow \frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1 \Rightarrow a=-\frac{C}{A}; b=-\frac{C}{B} \Rightarrow a=-\left(\frac{-18}{2}\right)=9$$

En conclusión:

$$m=\frac{2}{3}; a=9; b=-6$$

4.- La ecuación $F=\left(\frac{9}{5}\right)C+32$ relaciona las escalas de grados de temperatura ***Fahrenheit*** y ***Centígrados.*** ¿Qué representan $\frac{9}{5}$ y 32?

La expresión de la ecuación reducida de la línea recta $y=mx+b$. Entonces, comparando la ecuación dada con esta última ecuación podemos concluir que la ecuación que relaciona las escalas de temperatura ***Fahrenheit*** y ***Centígrados*** es la ecuación reducida de una línea recta, donde $\left(\frac{9}{5}\right)$ es la pendiente ***m*** y ***32*** es la ordenada ***b*** donde la recta corta al eje de las ***y***.

Nótese que las temperaturas en escala ***Fahrenheit*** se leen en el eje de las ***y*** y las temperaturas en la escala ***Centígrados*** se leen en el eje de las ***x***.

5.- Dada la pendiente y un punto encontrar si la intersección ***b*** de la recta correspondiente con el eje de las ***y*** es positiva o negativa.

(a) $m_1=\frac{22}{7}; P_1(1,\pi)$

$$(y-y_1)=m_1(x-x_1) \Rightarrow (y-\pi)=\left(\frac{22}{7}\right)(x-1) \Rightarrow 7y-7\pi=22x-22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y=22x-(22-7\pi) \Rightarrow y=\frac{22}{7}x-\left(\frac{22-7\pi}{7}\right) \Rightarrow 22>7\pi \Rightarrow b<0$$

(b).- $m_2 = \sqrt{2}; P_2\left(1;1,414\right)$

$$y - y_2 = m_2\left(x - x_2\right) \Rightarrow y - 1,414 = \sqrt{2}\left(x - 1\right) \Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x - \sqrt{2} + 1,414 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x - \left(\sqrt{2} - 1,414\right) \Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x \Rightarrow b = 0$$

La recta pasa por el origen de coordenadas.

6.- Encontrar la ecuación general de la línea recta que pasa por los puntos $P_1\left(3,5\right)$ y $P_2\left(-1,2\right)$.

Dadas las coordenadas de dos puntos pertenecientes a una línea recta, se debe utilizar la siguiente expresión matemática para encontrar la ecuación de la recta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 3} = \frac{2 - 5}{-1 - 3} = \frac{\left(-3\right)}{\left(-4\right)} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(y - 5\right) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(x - 3\right) \Rightarrow 4y - 20 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 4y + 11 = 0$$

7.- Encontrar la ecuación reducida de la línea recta que pasa por los puntos $P_1\left(-3,1\right)$ y $P_2\left(7,11\right)$.

Este problema puede resolverse exactamente como se resolvió el problema anterior; sin embargo, es conveniente resolverlo por el siguiente método:

Se parte de la ecuación reducida de la línea recta: $y = mx + b$ y se le darán valores a ***x*** y ***y*** tomados de las coordenadas de los puntos dados:

Para $P_1 \Rightarrow 1 = \left(-3\right)m + b \Rightarrow 1 = -3m + b$..............................(1)

Para $P_2 \Rightarrow 11 = \left(7\right)m + b \Rightarrow 11 = 7m + b$.............................(2)

Resolviendo (1) y (2): $m = 1; B = 4$

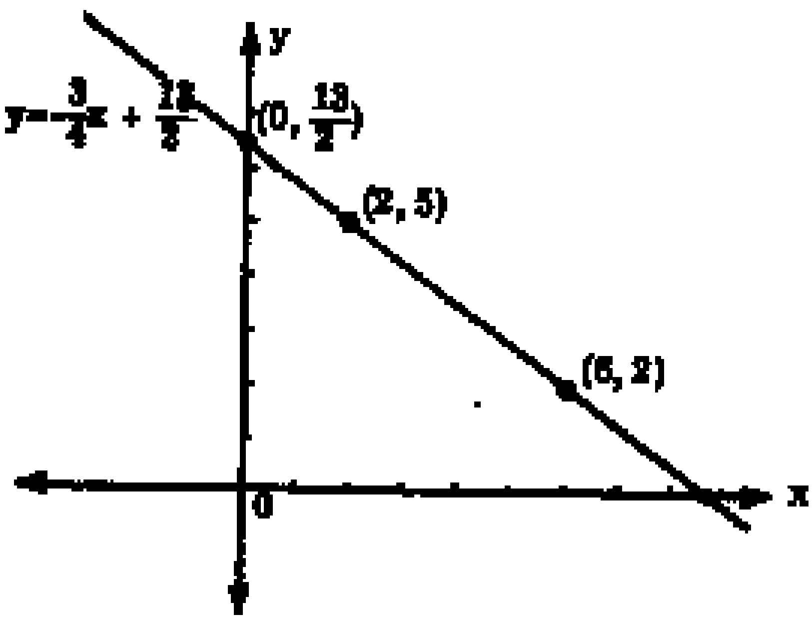
La ecuación reducida de la línea recta buscada será entonces:

$$y = x + 4$$

8.- Encontrar la ecuación general de la línea recta que pasa por el punto $P(2,5)$ y tiene pendiente igual a 3.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = (3)(x - 2) \Rightarrow y - 5 = 3x - 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

9.- Encontrar la ecuación general y la ecuación reducida de la línea recta que pasa por los puntos $P_1(2,5)$ y $P_2(6,2)$.



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{y-5}{x-2} = \frac{2-5}{6-2} = \frac{-3}{4} \Rightarrow (y-5)4 = (-3)(x-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y - 20 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 4y - 26 = 0$$

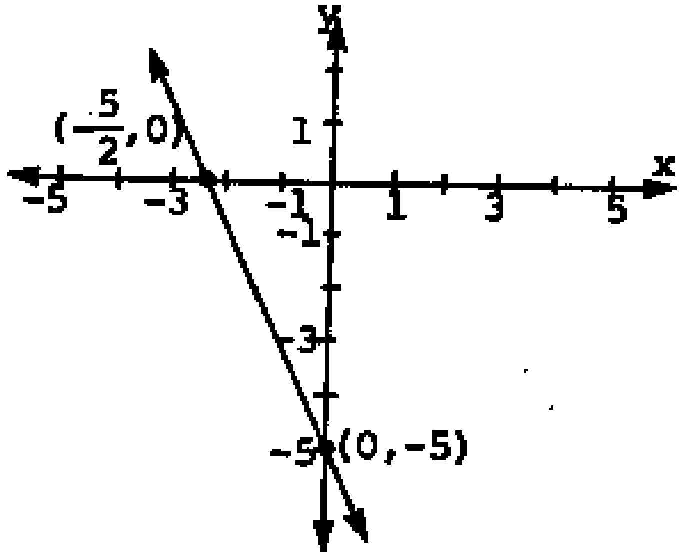
Si la ecuación general es $3x + 4y - 26 = 0$ la ecuación reducida será:

$$4y = -3x + 26 \Rightarrow y = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{26}{4}\right) \Rightarrow y = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{13}{2}\right)$$

10.- Si $f(x) = -2x - 5$ encontrar la pendiente y los valores donde la línea recta corta a los ejes de coordenadas.

Para empezar la expresión matemática dada se puede reescribir como:

$y = -2x - 5$ y comparándola con la ecuación reducida de la línea recta $(y = mx + b)$, se tiene que $m = -2; b = -5$



Para encontrar ***a*** se deberá hacer $y=0$ en la ecuación dada:

$$y=-2x-5 \Rightarrow 0=-2x-5 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=\left(\frac{-5}{2}\right)=a=-\frac{5}{2}$$

Entonces, la línea recta dada corta al eje de las ***x*** en el punto $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ y corta al eje de las ***y*** en el punto $(0,-5)$.

11.- Discuta el gráfico de la línea recta dada por la ecuación $y=-3x+4.$

La recta tiene pendiente $m=-3$ y corta al eje de las ***y*** en el punto $(0,4)$.

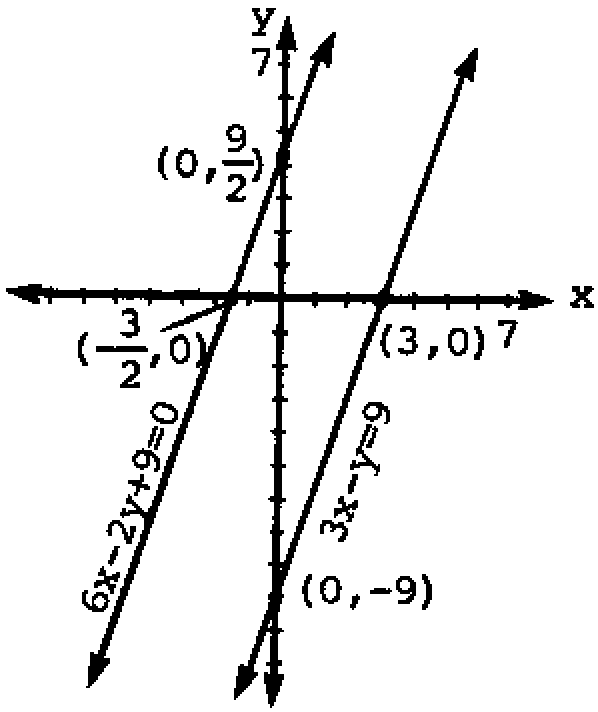
Haciendo ahora se hace $y=0$ en la ecuación dada:

$0=-3x+4 \Rightarrow x=a=\frac{4}{3}$;entonces, el punto de corte de la recta con el eje de las ***x*** es el siguiente: $\left(\frac{4}{3},0\right)$.

12.- Demostrar que las líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones son paralelas:

$$l_1 \equiv 3x-y=9$$
$$l_2 \equiv 6x-2y+9=0$$

Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales, o sea que en este caso se debería cumplir que $m_1 = m_2$.



Cálculo de m_1 :

$$3x - y - 9 = 0 \Rightarrow y = 3x - 9 \Rightarrow m_1 = 3$$

Cálculo de m_2 :

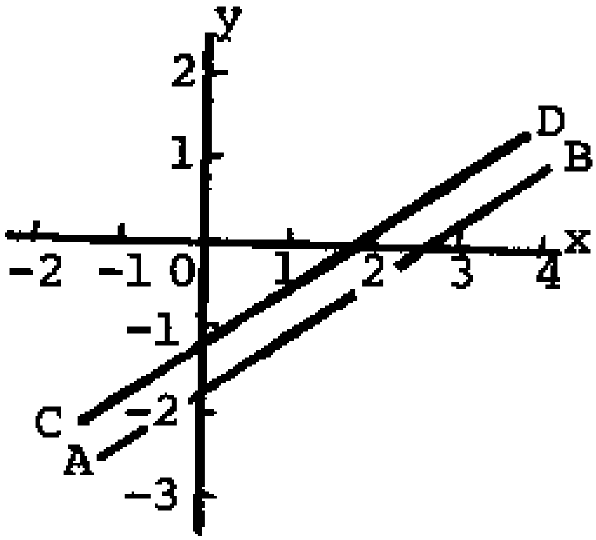
$$6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow 2y = 6x + 9 \Rightarrow y = 3x + \frac{9}{2} \Rightarrow m_2 = 3$$

Entonces, las dos rectas son paralelas porque $m_1 = m_2 = 3$

13.- Determinar si existe algún punto de intersección de las dos líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_1 \equiv 2x - 3y = 5$$
$$l_2 \equiv 6x - 9y = 10$$

Si las dos rectas son paralelas, $m_1 = m_2$, no se intersecan y por lo contrario, si $m_1 \neq m_2$, las dos rectas se cruzan en algún punto.



Se inspeccionará entonces el valor de las pendientes de las dos rectas.

Cálculo de m_1 :

$$l_1 \equiv 2x - 3y = 5 \Rightarrow 3y = 2x - 5 \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{5}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3}$$

Cálculo de m_2 :

$$l_2 \equiv 6x - 9y = 10 \Rightarrow 9y = 6x - 10 \Rightarrow y = \frac{6}{9}x - \frac{10}{9} \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{10}{9} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

O sea, que $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$ y por lo tanto las dos rectas son paralelas y no tienen punto de cruce entre ellas.

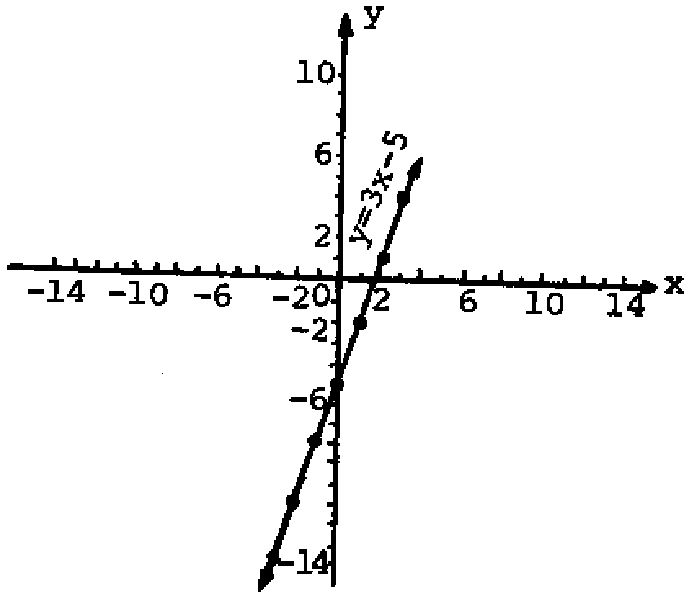
14.- Encontrar el punto de intersección entre las dos líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_1 \equiv 3x - y = 5$$
$$l_2 \equiv 9x - 3y = 15$$

Si se divide la segunda ecuación por 3 se encontrará lo siguiente:

$$\frac{9x - 3y = 15}{3} \Rightarrow 3x - y = 5$$

El resultado es exactamente la primera ecuación, lo que quiere decir que las dos ecuaciones son dependientes y tendrán por tanto la misma gráfica.



Al coincidir exactamente las gráficas de las dos rectas, la solución es múltiple, ya que cada punto de las rectas es una solución.

15.- Encontrar la ecuación general de la recta l_2 que es perpendicular a la recta $l_1 \equiv x+y+4=0$ y pasa por el punto $P(0,0)$.

La ecuación de una línea recta para este caso estará dada por:

$$y-y_1=m_2\left(x-x_1\right)$$

Luego, como las rectas $l_1 \perp l_2$, entonces se cumple que $m_2=-\dfrac{1}{m_1}$

Cálculo de m_1:

$$l_1=x+y+4=0 \Rightarrow y=-x-4 \Rightarrow m_1=-1$$

Cálculo de m_2:

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{(-1)}=1$$

Entonces la ecuación de la recta será:

$$y-(0)=(1)(x-0)\Rightarrow y=x\Rightarrow y-x=0$$

16.- Encontrar la ecuación de una línea recta que es paralela a la recta $Ax+By+C=0$, donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son constantes arbitrarias.

La pendiente de $Ax+By+C=0$ es $m=-\dfrac{A}{B}$, entonces, una línea recta paralela a la dada es $Ax+By+D=0$, donde $\boldsymbol{D}$ es una constante arbitraria.

17.- Probar que si dos líneas rectas l_1 y l_2 son perpendiculares entre ellas, entonces, las pendientes de las dos líneas rectas tienen la relación siguiente: $(m_1)(m_2)=-1$.

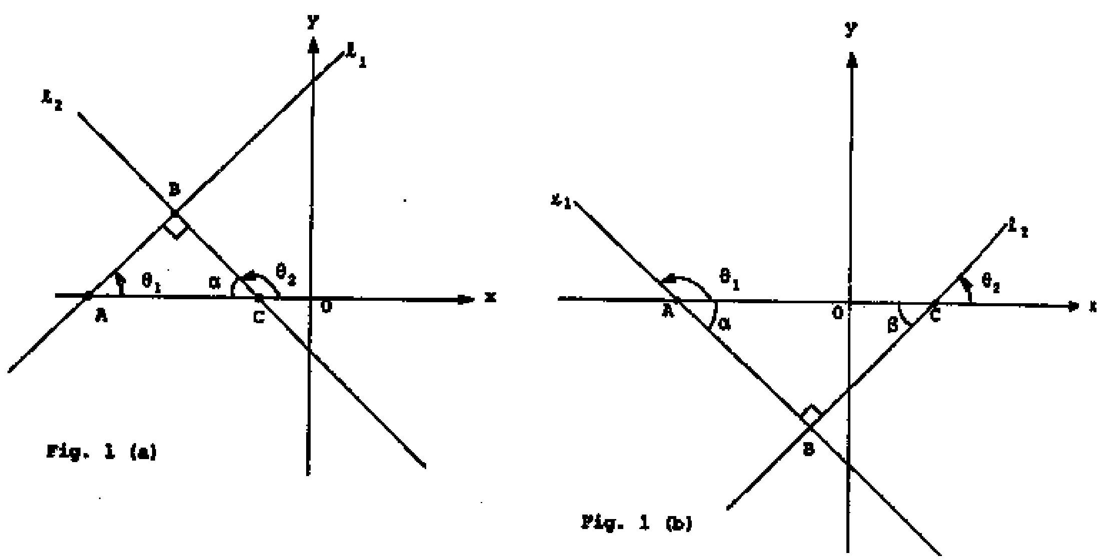


Fig. 1 (a) Fig. 1 (b)

Hagamos $m_1=tg\theta_1; m_2=tg\theta_2$

De la figura #1 ver el ΔABC:

$$\alpha=180^{\circ}-\theta_2$$

$$\theta_1+\alpha=90^{\circ}$$

$$\theta_1+\left(180^{\circ}-\theta_2\right)=90^{\circ}\Rightarrow\theta_1=\theta_2-90^{\circ}$$

$$m_1 = tg\theta_1 = tg\left(\theta_2 - 90^{o}\right) = tg\left[-\left(90^{o} - \theta_2\right)\right] = -\left[tg\left(90^{o} - \theta_2\right)\right] =$$
$$= -\left[ctg\theta_2\right] = -\frac{1}{tg\theta_2} = -\frac{1}{m_2}$$

Otra solución alternativa se obtiene viendo el ΔABC en la figura # 1b:

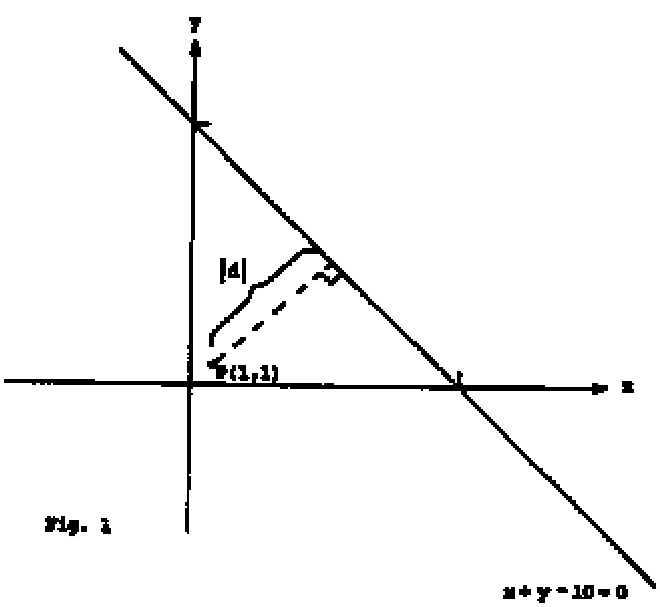
$$\beta = \theta_2$$
$$\alpha = 180^{o} - \theta_1$$
$$\beta + \alpha = 90^{o} = \theta_2 + 180^{o} - \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 90^{o}$$
$$m_1 = tg\theta_1 = tg\left(\theta_2 + 90^{o}\right) = -ctg\theta_2 = -\frac{1}{tg\theta_2} = -\frac{1}{m_2}$$

18.- Encontrar la distancia absoluta entre el punto $P(1,1)$ y la recta $l \equiv x + y - 10 = 0$.

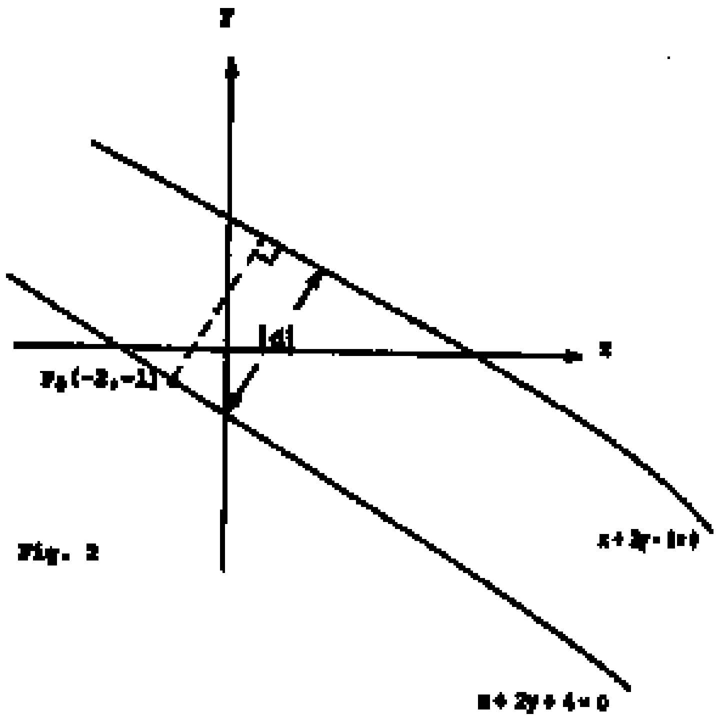
Para hacer este cálculo se utilizará la ecuación definida para calcular la distancia de una recta $Ax + By + C = 0$ y el punto $P\left(x_0, y_0\right)$:

$$|d| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{(1)(1) + (1)(1) - 10}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}\right| = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

19.- Encontrar la distancia absoluta entre $l_1 \equiv x + 2y + 4 = 0$ y $l_2 \equiv x + 2y - 9 = 0$.



19.- Encontrar la distancia absoluta entre la recta $l_1 \equiv x+2y+4=0$ y la recta $l_2 \equiv x+2y-9=0$.

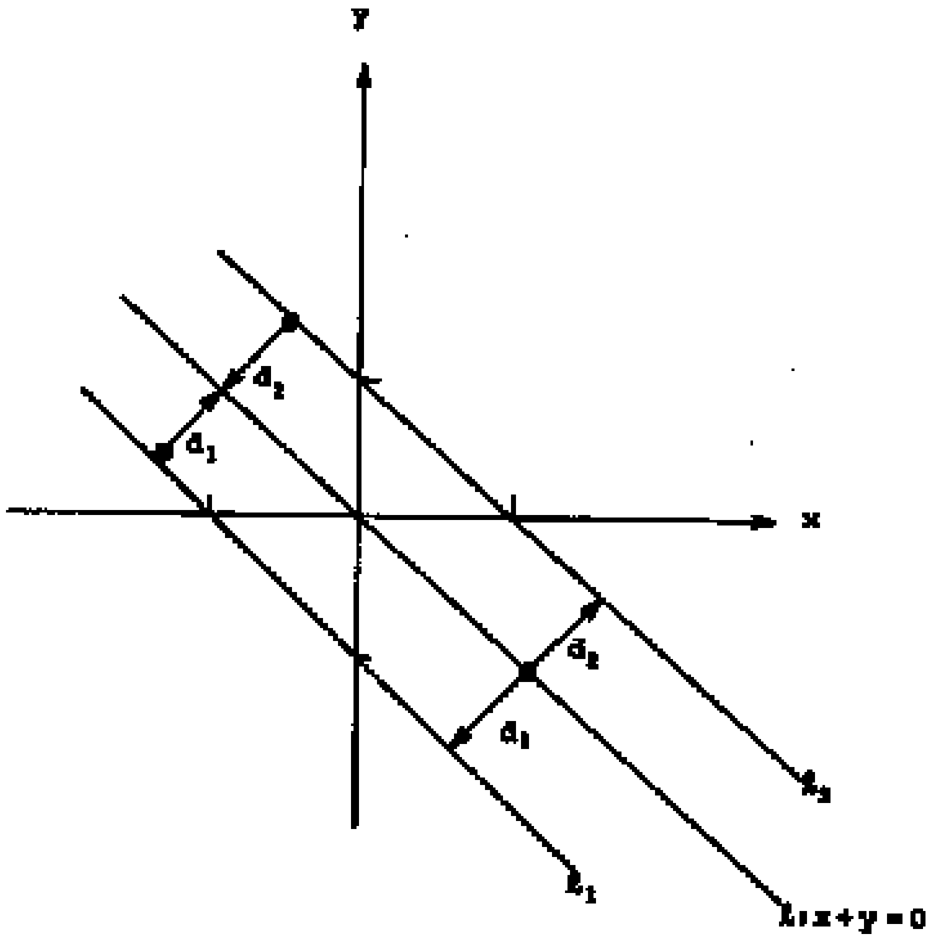


Seleccionemos un punto cualquiera de la recta l_1, dándole valores a x y calculando el valor de y. El punto más fácil es hacer $x=0$ y entonces $y=-2$. Otro punto puede ser $x=-2; y=-1$. Ambos puntos satisfacen la ecuación general de l_1. Entonces, la distancia entre el punto $P_0\left(-2,-1\right)$ a la línea recta es:

$$d=\left|\frac{1\cdot\left(-2\right)+2\cdot\left(-1\right)+4}{\sqrt{\left(1\right)^2+\left(2\right)^2}}\right|=\left|\frac{-13}{\sqrt{5}}\right|=\frac{13\sqrt{5}}{5}$$

20.- Encontrar la ecuación de la recta l, la cual es paralela y equidistante de las dos líneas rectas siguientes:

$$l_1 \equiv x+y+2=0$$
$$l_2 \equiv x+y-2=0$$



Ya se sabe que $l_1 \parallel l_2 \parallel l$, el enunciado del problema nos pide que la distancias entre las rectas sean iguales, entonces tomaremos un punto cualquiera de la recta l, digamos $P_0\left(x_0, y_0\right)$, ver gráfica anexa, y aplicando el concepto de segmentos dirigidos, diremos que:

$$d_1 = -d_2 \Rightarrow \frac{(1)\left(x_0\right)+(1)\,y_0+2}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = -\frac{(1)\left(x_0\right)+(1)\left(y_0\right)-2}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \Rightarrow$$

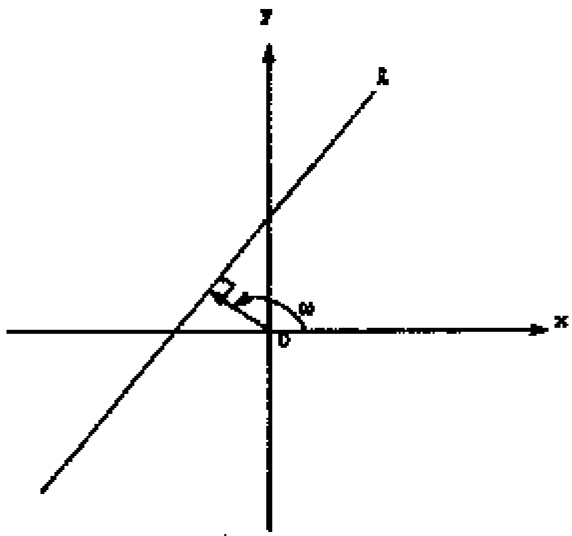
$$\Rightarrow \frac{x_0+y_0+2}{\sqrt{2}} = -\frac{x_0+y_0-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0+y_0+2 = -\left(x_0+y_0-2\right) \Rightarrow$$

$$2x_0+2y_0 = 0 \Rightarrow x_0+y_0 = 0$$

Pero, como $P_0\left(x_0, y_0\right)$ es un punto cualquiera de la recta l entonces, podemos escribir que la ecuación de la línea recta buscada es:

$$x + y = 0$$

21.- Discutir el gráfico de $Ax + By + C = 0$, donde ***A***, ***B*** y ***C*** son constantes arbitrarias, excepto que ambas, A y ***B*** no pueden ser cero.



$Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de una línea recta.

Si $C = 0$, la línea pasa a a través del origen. Si $B = 0$, la línea es paralela al eje de las ***y***, y si $A = 0$, la línea es paralela al eje de las ***x***.

La pendiente de la línea recta es igual a $m = -\frac{A}{B}$. Las intersecciones con los ejes de coordenadas son:

$$a = -\frac{C}{A}$$

$$b = -\frac{C}{B}$$

22.- Escribir la ecuación normal de una línea recta dada por su ecuación general $Ax + By + C = 0$.

La ecuación normal de una línea recta que no pasa por el origen es:

$$x\cos\alpha + ysen\alpha - \rho = 0$$

Donde $\rho > 0$ es la longitud de la longitud normal a la recta desde el origen y α es el ángulo positivo $\left(0^{o} \leq \alpha \leq 360^{o}\right)$ medido desde el lado positivo del eje de las $\boldsymbol{x}$ a la normal, tal y como se muestra en la gráfica de arriba.

Para reducir la ecuación general de la línea recta $\left(Ax + By + C = 0\right)$, a la forma normal, se deberán dividir todos los términos de la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, y tomar las siguientes decisiones en cuanto al signo del radical:

(a) Si $C \neq 0$, el signo del radical es opuesto al signo de $\boldsymbol{C}$.
(b) Si $C = 0$, el signo del radical y el signo de $\boldsymbol{B}$ son iguales.
(c) Si $B = C = 0$, el signo del radical y el signo de $\boldsymbol{A}$ son iguales.

Entonces, la ecuación normal de la línea recta será:

$$\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)x + \left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)y + \left(\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0$$

Donde:

$$\rho = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

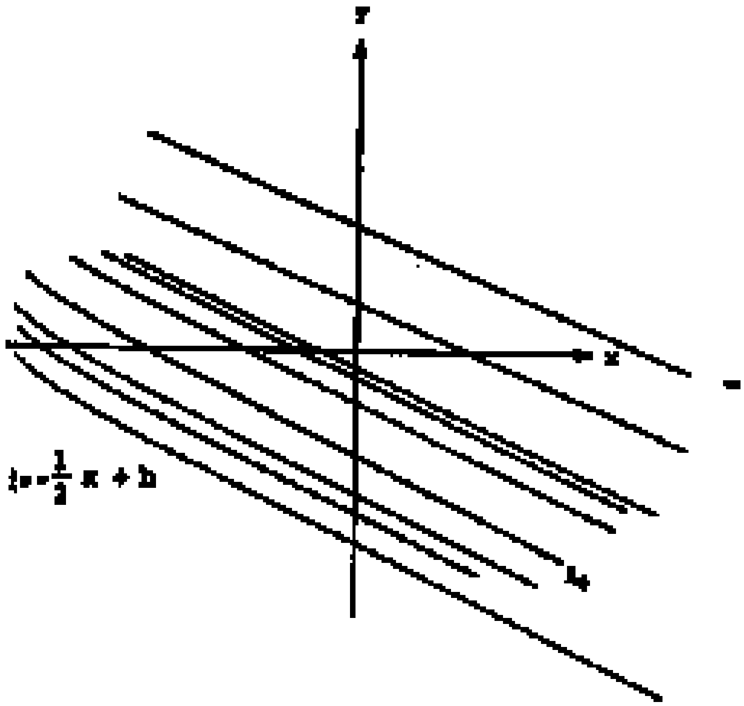
$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$sen\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

23.- Encontrar la ecuación de la familia de rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

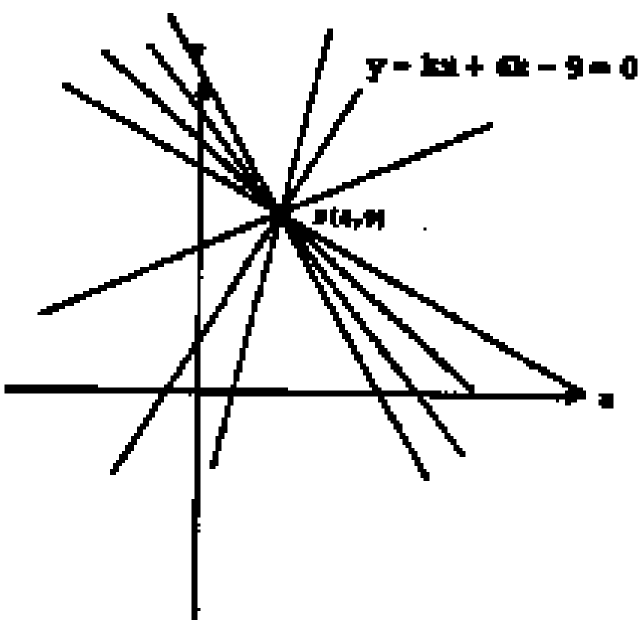
(a).- Paralelas a $l_0 \equiv x + 2y + 4 = 0.$

La pendiente de la línea recta l_0 es $m_0 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}.$ Entonces, todas las líneas rectas que tengan pendientes iguales a $m = -\frac{1}{2}$ formarán parte de esta específica familia de rectas. La ecuación reducida de esta familia de rectas será: $y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + b.$



(b) Que pasen por el punto $P_0(4,9)$.

La ecuación de la familia de líneas rectas pasando por el punto $P_0(4,9)$ es:
$y-9=m(x-4)$; donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta. Esta ecuación puede reescribirse como: $y-mx+4m-9=0.$



Para leer la gráfica: $k=m$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #42.

Tema: La parábola.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

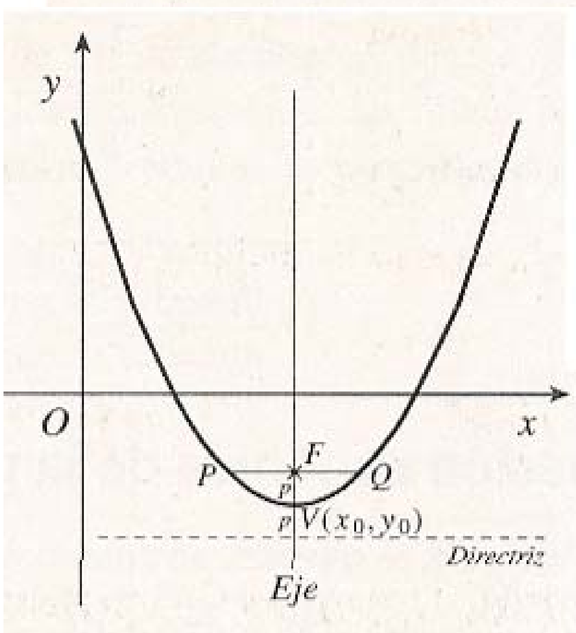
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*.



Elementos de una parábola:

Vértice: $V(x_0, y_0)$

Foco: F

Parámetro: (distancia del foco al vértice) $p = d_{(F,V)}$

Eje: (Contiene a F y V)

Directriz

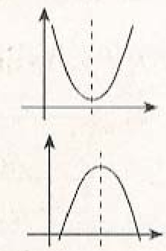
Lado recto: $PQ = 4p$

Excentricidad: $e = 1$

Ecuación canónica de la parábola

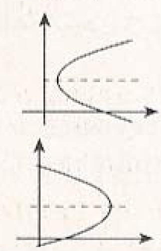
Caso I (Eje vertical)

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad \begin{cases} p > 0 \\ p < 0 \end{cases}$$



Caso II (Eje real horizontal)

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \quad \begin{cases} p > 0 \\ p < 0 \end{cases}$$



Coordenadas del foco:

Caso I	Caso II
$(x_0, y_0 + p)$	$(x_0 + p, y_0)$

Ecuación del eje:

Caso I	Caso II
$x = x_0$	$y = y_0$

Ecuación de la directriz

Caso I	Caso II
$y = y_0 - p$	$x = x_0 - p$

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = 4p$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

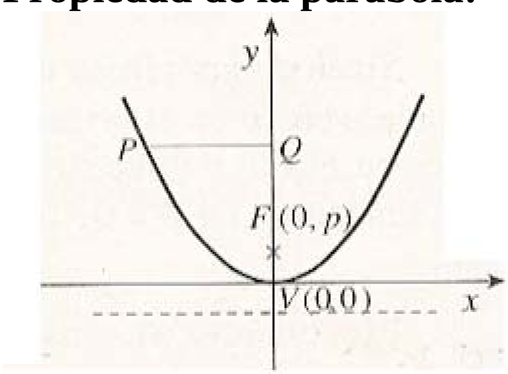
Caso I

$$m = \frac{x_1 - x_0}{2p}$$

Caso II

$$m = \frac{2p}{y_1 - y_0}$$

Propiedad de la parábola:



Desde un punto cualquiera ***P*** de una parábola se traza un segmento ***PQ*** perpendicular al eje. La abscisa de ***P*** es igual a la distancia entre ***P*** y ***Q***, y su ordenada a la distancia entre ***Q*** y ***V***.

Abscisa de ***P*** = $d_{(P,Q)}$
Ordenada de ***P*** = $d_{(Q,V)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la parábola, se tiene que:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right|$$

La ecuación general de una parábola de eje vertical que es cóncava hacia arriba (abre hacia arriba) es la siguiente:

$y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$. Es la es la misma forma de una ecuación cuadrática.

La ecuación canónica, o estándar; sin embargo, es:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$, donde el punto (h,k) es el vértice de la parábola, o sea, el punto donde la curva corta al eje de la misma. En una parábola vertical como ésta, el vértice es el punto más bajo de la parábola; y $|p|$ es la distancia entre el vértice y el foco, y entre el vértice y la línea directriz. Entonces, para este caso específico, las coordenadas del foco serán:

$F(h, k+p)$

La ecuación de la directriz, para este caso específico, será:

$y = k - p.$

La ecuación del eje vertical, para este caso específico, será:

$x = h.$

Puede ser demostrado que $h = -\dfrac{b}{2a}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los coeficientes de la ecuación general, y $\boldsymbol{h}$ da la coordenada $\boldsymbol{x}$ de del punto más bajo de la parábola.

El foco, es así llamado porque los rayos de luz viniendo de afuera de la parábola haia el eje central, paralelo al eje de las y, se deben reflejar desde la parábola, siguiendo la dirección del foco. Cualquier punto de la parábola es equidistante del foco y de la directriz, siendo este hecho utilizado muchas veces como definición de la parábola.

El segmento de línea que pasa a través del foco y es perpendicular al eje de la parábola, cortando a la parábola en dos puntos, es llamado el lado recto de la parábola y su longitud es igual a $|4p|$.

PREGUNTAS:

1.- Encontrar las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz, y el eje de simetría de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 - 2y = 0.$

En primer lugar, se debe recordar que la ecuación canónica de la parábola de eje vertical es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{ donde } V(h,k).$$

Entonces:

$$x^2 - 12y = 0 \Rightarrow x^2 = 12y \Rightarrow (x-0)^2 = 4(3)(y-0)$$

$p = 3$ y $(h,k) = (0,0)$; o sea, el vértice está en el origen de coordenadas y el eje de la parábola es vertical.

Como el miembro que contiene ***x*** está elevado al cuadrado, la directriz será paralela al eje de las ***x***. Como ***p*** es positivo, la parábola abre hacia arriba. La distancia del vértice al foco es 3 unidades; de tal modo que las coordenadas del foco son $(0,3)$.

El eje de simetría contiene al vértice y al foco, por lo que es la recta $x = 0$; o sea, coincide exactamente con el eje de coordenadas vertical ***y***.

Como la parábola es de eje vertical y abre hacia arriba, la ecuación de la directriz será $y = -3$.

2.- Graficar las siguientes funciones: $f(x) = x^2; g(x) = 3x^2; h(x) = \frac{1}{2}x^2$, en los mismos ejes de coordenadas.

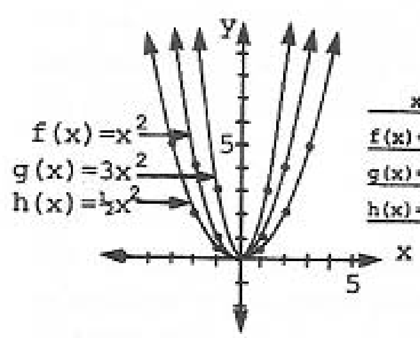


Fig. A

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4	9	9
$g(x)=3x^2$	0	3	3	12	12	27	27
$h(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	½	½	2	2	4½	4½

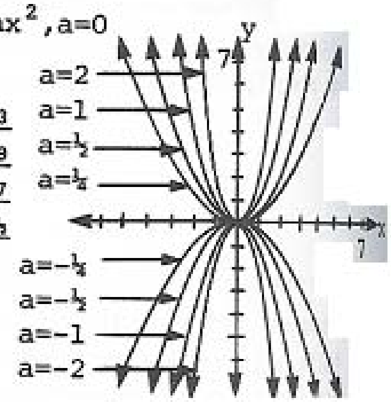


Fig. B

Se comenzará por construir una tabla compuesta, mostrando los valores de cada función correspondientes a valores seleccionados de ***x***.

En esta gráfica, se grafican tres diferentes forma de la función $f(x) = ax^2 \Rightarrow a > 0$, como se puede ver en la figura ***A***. Se puede notar que variando el valor de la constante ***a***, ésto tiene poco que ver con la forma general de la curva; donde el factor ***a*** es solo un factor de estrechamiento de la curva alrededor del eje de las ***y***. Si ***a*** se hace suficientemente grande, la curva se acerca mucho al eje de las ***y***. Si el valor de ***a*** decrece, la curva se abre y tiende y sus brazos tienden a estar más cerca del eje de las ***x***.

El gráfico de $f(x) = ax^2$, donde $a \neq 0$, se llama una parábola, ver figura ***B***, el punto $(0,0)$ es el vértice y el eje de simetría es vertical, confundiéndose con el eje ***y***. El valor de ***a*** determina la forma de la curva. Para $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y para $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

3.- Hacer el estudio de la parábola siguiente: $y^2 - 4y + 4 = x - 7$.

$$y^2 - 4y + 4 = x - 7 \Rightarrow \left(y^2 - 4y + 4\right) = x - 7 \Rightarrow$$
$$\left(y - 2\right)^2 = \left(x - 7\right) \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4} = 0,25$$

la parábola es de eje de simetría horizontal y abre hacia la derecha

La parábola es de eje de simetría horizontal, donde:

$$V\left(7,2\right)$$
$$Foco = F\left(7,25;2\right)$$
$$Directriz \Rightarrow x = 6,75$$
$$Eje \Rightarrow y = 2$$

4.- Demostrar que la ecuación cuadrática $y = 2x^2 - 20x + 25$ es la ecuación de una parábola.

En primer lugar, se debe recordar la forma de la ecuación canónica de una parábola en x^2: $\left(x - h\right)^2 = 4p\left(y - k\right)$

Entonces, utilizaremos el método de complementación de cuadrados con la expresión dada:

$$2x^2 - 20x + 25 = 2\left(x^2 - 10x\right) = y - 25 \Rightarrow 2\left(x^2 - 10x + 25\right) = y - 25 + 50 \Rightarrow$$
$$\left(x - 5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 25\right) \Rightarrow 4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

Este es la ecuación de una parábola de eje vertical que abre hacia arriba, de vértice $V\left(5,-25\right)$, eje de simetría es $x = 5$, con foco $F\left(5,-25+\frac{1}{8}\right)$, y directriz $y = -25 - \frac{1}{8}$.

5.- Hacer el estudio a de la siguiente parábola: $-4x + 4 = y^2 + 10y + 25$

$$\left(y + 5\right)^2 = -4\left(x - 1\right)$$

Es una parábola de eje de simetría horizontal, que abre hacia la izquierda ya que $p=-1$.

El vértice $V(1,-5)$, el foco $F(0,-5)$, la ecuación de la directriz es $x=2$, y el eje de simetría es $y=-5$.

6.- Hacer el estudio de la parábola $4x^2-40y-24x-4=0$.

$$4x^2-24x+=40y+4 \Rightarrow 4\left(x^2-6x\right)=40y+4 \Rightarrow 4\left(x^2-6x+9\right)=40y+4+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-3)^2=40(y+1) \Rightarrow (x-3)^2=10(y+1) \Rightarrow p=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Es una parábola de eje de simetría vertical, que abre hacia arriba por ser $p>0$.

El vértice $V(3,-1)$; el foco es $F\left(3,\frac{3}{2}\right)$; la ecuación de la directriz es $Y=-1-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}$; y el eje de simetría es $x=3$.

7.- Hacer el estudio de la parábola $x^2+4x+2y+10=0$.

$$x^2+4x+2y+10=0 \Rightarrow x^2+4x=-2y-10 \Rightarrow \left(x^2+4x+4\right)=-2y-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=(-2)(y+3) \Rightarrow 4p=-2 \Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

Es una parábola de eje de simetría vertical que abre hacia abajo.

Entonces:

$V(-2,-3);F(-2,-3,5)$
Directriz: $y=-2,5$
Eje de simetría: $x=-2$

8.- Hacer el estudio de la parábola $2x^2-16x+16y+64=0$

$$2x^2-16x+16y+64=0 \Rightarrow 2x^2-16x=-16y-64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2-8x+?\right)=-16y-64 \Rightarrow 2\left(x^2-8x+16\right)=-16y-64+32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-4)^2=-16y-32 \Rightarrow (x-4)^2=-8(y+2) \Rightarrow 4p=-8 \Rightarrow p=-2$$

Es una parábola de eje vertical que abre hacia abajo.

Entonces:

$V(4,-2); F(4,-4)$
Directriz: $y=0$
Eje de simetría: $x=4$

9.- Escribir la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen, y el foco es $F(-3;0)$.
Al observar las ordenadas de los dos puntos dados, éstas son iguales a cero; por lo tanto, se trata de una parábola de eje de simetría horizontal $(y=0)$, y cuyo vértice es $V(0;0)$, además $p=-3$, por lo que la parábola abre hacia la izquierda.

La ecuación canónica de una parábola es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Luego, con los datos encontrados se puede escribir:

$$(y-0)^2 = 4(-3)(x-0) \Rightarrow y^2 = -12x \Rightarrow y^2 + 12x = 0$$

10.- Escribir la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(2;5)$ y cuya ecuación de su directriz es $x=4$.

El eje de simetría de la parábola es siempre perpendicular a la directriz, por lo que al ser la directriz vertical el eje de simetría deberá ser necesariamente horizontal y tendremos una parábola cuya ecuación canónica es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Ahora, la distancia entre el foco y la directriz es igual a $2p$. También, se debe ver que la directriz está desplazada a la derecha del foco, por lo que la parábola debe abrir hacia la izquierda. Entonces:

$$2p = 2-4 = -2 \Rightarrow p = -1$$

El vértice está a la derecha del foco, sobre la misma horizontal que hace de eje de simetría con $y=5$. entonces $V(3;5)$.

La ecuación será:

$$(y-5)^2 = 4(-1)(x-3) \Rightarrow (y-5)^2 = -4(x-3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y-5)^2 = -4x+12 \Rightarrow y^2 - 10y + 25 = -4x + 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 10y + 4x + 13 = 0$$

11.- La parábola pasa a través del punto $P(5;2)$ tiene el eje de simetría vertical y tiene un punto máximo a $(4;3)$.

Si el eje de simetría es vertical, su ecuación es $x=4$; siendo su punto máximo igual a su vértice, que en este caso es $V(4,3)$. Si $\boldsymbol{V}$ es su punto máximo, entonces la parábola debe abrir hacia abajo y $p<0$.

La propiedad de la parábola dice que si se tiene un punto P de la misma y Q es su proyección sobre el eje de simetría, entonces se cumple:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right| \Rightarrow \left|(5-4)\right|^2 = 4p\left|(3-2)\right| \Rightarrow |p| = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, se toma el valor $p=-\frac{1}{4}$ porque ya sabemos que el eje de simetría es vertical y que la curva abre hacia abajo.

Las ecuaciones canónica y general serán:

$$(x-4)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(y-3) \Rightarrow (x-4)^2 = -(y-3) = -y+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -y + 3 \Rightarrow x^2 - 8x + y + 13 = 0$$

12.- Encontrar la ecuación de la parábola que pasa a través del punto $P(2;-1)$, tiene su vértice en $V(-7;-5)$ y abre hacia la derecha.

El enunciado nos dice que el eje de simetría es horizontal, con ecuación $y=-5$, y que por abrir hacia la derecha $p>0$.

Utilizando la propiedad de la parábola:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right| = \left|(-5+1)\right|^2 = 4p\left|(-7-2)\right| = 16 = 4p(9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = \frac{4}{9}$$

Ahora, se parte de la ecuación canónica:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \Rightarrow (y+5)^2 = 4\left(\frac{4}{9}\right)(x+7) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(y^2+10y+25\right) = \frac{16}{9}(x+7) \Rightarrow 9y^2+90y+175 = 16x+112 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9y^2+90y-16x+63=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es $x=2$, su foco es $F(2;-6)$ y $p=-2$.

La parábola tiene un eje de simetría vertical y abre hacia abajo por que $p<0$. Su punto máximo será por tanto el vértice, con coordenadas $V(2;-4)$.

Partiendo de su ecuación canónica:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow (x-2)^2 = 4(-2)(y+4) = -8(y+4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4 = -8y-32 \Rightarrow x^2-4x+8y+36=0$$

14.- Encontrar la ecuación de la parábola que tiene un eje de simetría horizontal, y pasa por los siguientes puntos: $O(0;0);P(3;-2);Q(-1;2)$.

Una parábola con eje de simetría horizontal tiene la siguiente ecuación canónica:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Utilizando ahora las coordenadas de los puntos dados pertenecientes a la parábola:

Para

$$O(0;0) \Rightarrow (0-k)^2 = 4p(0-h) \Rightarrow k^2 = -4ph.....................(1)$$

$$P(3;-2) \Rightarrow (-2-k)^2 = 4p(3-h) \Rightarrow (-1)^2(2+k)^2 = 4p(3-h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4k+k^2 = 12p-4ph................................(2)$$

$$Q(-1;2) \Rightarrow (2-k)^2 = 4p(-1-h) \Rightarrow 4-4k+k^2 = -4p-4ph.............(3)$$

Tomando el valor de k^2 de la ecuación (1) e introduciendo ese valor en (2)

$$4+4k-4ph = 12p-4ph \Rightarrow 4+4k = 12p \Rightarrow 1+k = 3p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-3p = -1.............................(4)$$

Tomando el valor de k^2 de la ecuación (1) e introduciendo este valor en la ecuación (3):

$$4-4k-4ph = -4p-4ph \Rightarrow 4-4k = -4p \Rightarrow 1-k+p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p-k = -1.........................(5)$$

Resolviendo (4) y (5), sumando las dos ecuaciones:

$$-2p = -2 \Rightarrow p = 1.$$

Introduciendo el valor de $p=1$ en la ecuación (4) se obtiene $k=2$; y con los valores conocidos de $P=1$ y $k=2$ introducidos en la ecuación (1) se tiene que $h=-1$.

Entonces, la ecuación de la parábola será:

$$(y-2)^2 = 4(x+1) \Rightarrow y^2-4y+4 = 4x+4 \Rightarrow y^2-4y-4x = 0$$

15.- Encontrar la ecuación de la parábola que tiene un eje de simetría vertical, y pasa por los puntos $O(0;0); P(3;-2); Q(-2;2)$.

Una parábola con eje de simetría vertical tiene la siguiente ecuación canónica:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Utilizando ahora las coordenadas de los puntos dados, pertenecientes a la parábola:

$$O(0;0) \Rightarrow (0-h)^2 = 4p(0-k) \Rightarrow h^2 = -4pk.............................(1)$$
$$P(3;-2) \Rightarrow (3-h)^2 = 4p(-2-k) \Rightarrow 9-6h+h^2 = -8p-4pk............(2)$$
$$Q(-2;2) \Rightarrow (-2-h)^2 = 4p(2-k) \Rightarrow 4+4h+h^2 = 8p-4pk.............(3)$$

Resolviendo (1) y (2), se toma el valor de h^2 de (1) y se introduce en (2):

$$9-4h-4pk = -8p-4pk \Rightarrow 9-6h = -8p \Rightarrow 8p-6h+9 = 0................(4)$$

Resolviendo (1) y (3), se toma el valor de h^2 de (1) y se introduce en (3):

$$4+4h-4pk = 8p-4pk \Rightarrow 4+4h = 8p \Rightarrow 1+h = 2p \Rightarrow h-2p+1 = 0..............(5)$$

Resolviendo ahora (4) y (5):

De (5) $h = 2p-1$, e introduciendo ahora este valor en (4):

$$8p-6(2p-1)+9 = 0 \Rightarrow 8p-12p+6+9 = 0 \Rightarrow p = \frac{15}{4}$$

Introduciendo este último resultado en (5):

$$h = 2p-1 \Rightarrow h = 2\left(\frac{15}{4}\right)-1 = \frac{13}{2}$$

Introduciendo ahora los valores encontrados de $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{p}$ en (1):

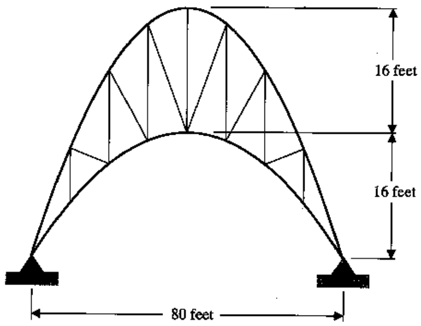
$$h^2 = -4pk \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 = -4\left(\frac{15}{4}\right)k \Rightarrow k = -\frac{169}{60}$$

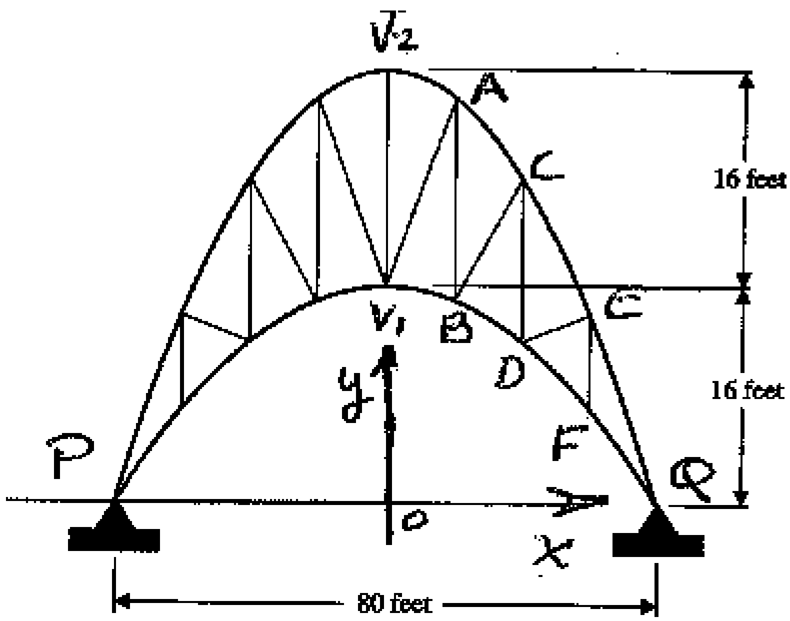
Luego, la ecuación de la parábola será:

$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{15}{4}\right)\left(y+\frac{169}{60}\right) \Rightarrow \left(x-\frac{13}{2}\right)^2 = 15\left(y+\frac{169}{60}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-13x+\frac{169}{4} = 15y+\frac{169}{4} \Rightarrow x^2-13x-15y = 0$$

16.- .- La figura muestra un puente reticulado conformado por dos arcos parabólicos cuyos apoyos se encuentran a 80 pies de distancia. Los refuerzos verticales se encuentran a 10 pies de distancia entre si. Encontrar los longitudes de los refuerzos V_1A y AB.

Gráficas:





Notar que en ambos casos $p < 0$ porque las dos parábolas abren hacia abajo.

Tomando la parábola cuyo vértice es V_1 y pasando el eje de las x por los dos puntos de apoyo y el eje de las y por los vértices V_1 y V_2 se procede a calcular los valores de ***p*** para cada parábola:

Para la parábola de vértice V_1:
Aplicando la propiedad de las parábolas:

$$\left[d_{(PO)}\right]^2 = -4p_1\left[d_{(OV_1)}\right] \Rightarrow [40]^2 = -4p_1[16] \Rightarrow p_1 = -25$$

Para la parábola de vértice V_2 :

$$\left[d_{(PO)}\right]^2 = -4p_2\left[32\right] \Rightarrow p_2 = -12,5$$

De acuerdo con los ejes de coordenadas seleccionados, las coordenadas de los vértices son:

$$V_1\left(40,16\right)$$
$$V_2\left(40,32\right)$$

Para el cálculo de los refuerzos se utilizará la ecuación canónica de la parábola de eje vertical:

$$\left(x - x_0\right)^2 = 4p\left(y - y_0\right)$$

Cálculo de las coordenadas del punto ***A***:

$$\left(50-40\right)^2 = 4\left(-12,5\right)\left(y_A - 32\right) \Rightarrow 100 = \left(-50\right)\left(y_A - 32\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 = \left(y_A - 32\right) \Rightarrow y_A = 30$$

Entonces: $A\left(40,30\right)$

Cálculo de las coordenadas de ***B***:

$$\left(50-40\right)^2 = 4\left(-25\right)\left(y_B - 16\right) \Rightarrow y_B = 15$$

$$B\left(50,15\right)$$

Como los puntos ***A*** y ***B*** están sobre la misma vertical la longitud de ***AB*** será:

$$L_{AB} = 30 - 15 = 15\left(pies\right)$$

Para el cálculo de la longitud de V_1A se deberá aplicar la ecuación para calcular la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(50-40\right)^2+\left(30-16\right)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{100+196}\Rightarrow\sqrt{296}=17,20\left(pies\right)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #43.

Tema: La elipse.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

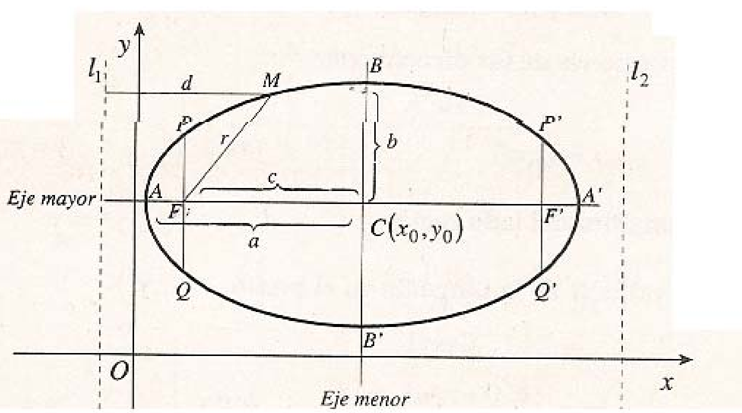
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Elementos de una elipse:

Centro:	$C(x_0, y_0)$
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje mayor)
Vértices:	A, A', B y B'
Eje mayor:	$d_{(AA')} = 2a$
Semieje mayor:	$\frac{1}{2} d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$

Eje menor: $d_{(B,B')} = 2b$

Semieje menor: $\frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$

Distancia focal: $d_{(F,F')} = 2c$

Semidistancia focal: $\frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$

Radios focales: $\overline{FM}$ y $\overline{MF}$

Directrices: l_1 y l_2

Lados rectos: PQ y $P'Q'$

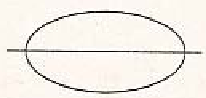
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \qquad (e < 1)$

Relación entre *a*, *b* y *c*: $a^2 = b^2 + c^2$

Ecuación canónica de la elipse

Caso I

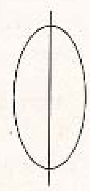
(eje mayor horizontal)



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (47^G)$$

Caso II

(Eje mayor vertical)



$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \qquad (47a^G)$$

Nota: en la ecuación de la elipse, a^2 es siempre el denominador mayor.

Coordenadas del Centro: C es el punto medio de AA', BB' y FF'

Coordenadas de los vértices y de los focos:

	Caso I	Caso II
de A y A':	$(x_0 \pm a, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm a)$
de F y F':	$(x_0 \pm c, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm c)$
de B y B':	$(x_0, y_0 \pm b)$	$(x_0 \pm b, y_0)$

Ecuaciones de las directrices:

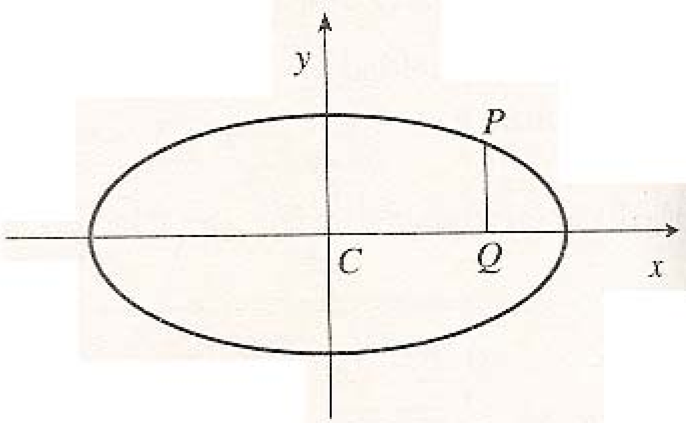
Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \dfrac{2b^2}{a}$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = -\dfrac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$	$m = -\dfrac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$

Propiedad de la elipse:



Desde un punto cualquiera ***P*** de la elipse se traza un segmento ***PQ*** perpendicular al eje mayor. La abscisa de ***P*** es igual a la distancia entre ***C*** y ***Q*** y su ordenada a la distancia entre ***P*** y ***Q***.

Abscisa de P = $d_{(C,Q)}$
Ordenada de P = $d_{(P,Q)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la elipse, se cumple que:

$$\frac{\left|d_{(C,Q)}\right|^2}{a^2} + \frac{\left|d_{(P,Q)}\right|^2}{b^2} = 1$$

PREGUNTAS:

1.-. Encontrar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices y la excentricidad de la elipse dada por la ecuación $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$.

$$4x^2-8x+y^2+6y=-9\Rightarrow 4\left(x^2-2x+?\right)+\left(y^2+6y+?\right)=-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)=-9+4+9=4\Rightarrow 4\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4}{4}\left(x-1\right)^2+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1\Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{1}+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1$$

La elipse tiene eje mayor vertical, entonces:

De donde: $C\left(1;-3\right); a^2=4; b^2=1\Rightarrow c^2=a^2-b^2=4-1=3\Rightarrow a=2; b=1; c=\sqrt{3}$

Los focos serán: $F'\left(1;\sqrt{3}-3\right); F\left(1;-\sqrt{3}-3\right)$

Los vértices: $A'\left(1;-1\right); A\left(1;-5\right); B'\left(2;-3\right); B\left(0;-3\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\left(1^2\right)}{2}=1$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=-3\pm\frac{2}{0,866}=-3\pm 2,309$

2.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es $9x^2+4y^2-18x+16y=11.$

$$9x^2-18x+4y^2+16y=11\Rightarrow 9\left(x^2-2x+1\right)+4\left(y^2+4y+4\right)=11+9+16=36\Rightarrow$$
$$\frac{9}{36}\left(x-1\right)^2+\frac{4}{36}\left(y+2\right)^2=1\Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{4}+\frac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$$

Es una elipse de eje mayor vertical, donde:

$$a^2=9\Rightarrow a=3; b^2=4\Rightarrow b=2; c^2=a^2-b^2\Rightarrow 9-4=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

Luego: $C\left(1;-2\right); F'\left(1;-2+\sqrt{5}\right); F\left(1;-2-\sqrt{5}\right); A'\left(1;+1\right); A\left(1;-5\right);$
$B'\left(-1;-2\right); B\left(3;-2\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}=0,7453$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(2)^2}{3}=\dfrac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\dfrac{a}{e}=-2\pm\dfrac{3}{0,7453}=-2\pm 4,025$

3.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$4y^2-8y+9x^2-54x+49=0$$

$$4y^2-8y+9x^2-54x+49=0\Rightarrow 4\left(y^2-2y+1\right)+9\left(x^2-6x+9\right)=-49+4+81=36\Rightarrow$$

$$\frac{9}{36}(x-3)^2+\frac{4}{36}(y-1)^2=1\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

Es una elipse de eje mayor vertical, con los siguientes valores:

$C(3;1);a^2=9\Rightarrow a=3;b^2=4\Rightarrow b=2;c^2=a^2-b^2=9-4=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$

Los focos: $F'\left(3;1+\sqrt{5}\right);F\left(3;1-\sqrt{5}\right)$

Los vértices: $A'(3;4);A(3;-2);B'(1;1);B(5;1)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=0,7453$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(2)^2}{3}=\dfrac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\dfrac{a}{e}=1\pm\dfrac{3}{0,7453}=1\pm 4,025$

4.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$18x^2+12y^2-144x-48y=-120$$

$$18\left(x^2-8x+?\right)+12\left(y^2-4y+?\right)=-120\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\left(x^2-8x+16\right)+12\left(y^2-4y+4\right)=-120+288+48=216\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{216}\left(x-4\right)^2+\frac{12}{216}\left(y-2\right)^2=1\Rightarrow \frac{\left(x-4\right)^2}{\left(\frac{216}{18}\right)}+\frac{\left(y-2\right)^2}{\left(\frac{216}{12}\right)}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-4\right)^2}{12}+\frac{\left(y-2\right)^2}{18}=1\Rightarrow a^2=18\Rightarrow a=3\sqrt{2};b^2=12\Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

$$c^2=a^2-b^2=18-12=6\Rightarrow c=\sqrt{6}$$

Es una elipse de eje mayor vertical con centro $C\left(4;2\right)$

Focos: $F'\left(4;2+\sqrt{6}\right);F\left(4;2-\sqrt{6}\right)$

Vértices: $A'\left(4;2+3\sqrt{2}\right);A\left(4;2-3\sqrt{2}\right);B'\left(4-2\sqrt{3};2\right);B\left(4+2\sqrt{3};2\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0,5773$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\left(12\right)}{3\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{\sqrt{18}}{0,5773}=2\pm 7,349$

5.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es:

$$16x^2+25y^2+32x-150y=159$$

$$16\left(x^2+2x+?\right)+25\left(y^2-6y+?\right)=159\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\left(x^2+2x+1\right)+25\left(y^2-6y+9\right)=159+16+225=400$$

$$\Rightarrow \frac{16}{400}\left(x+1\right)^2+\frac{25}{400}\left(y-3\right)^2=1\Rightarrow \frac{\left(x+1\right)^2}{25}+\frac{\left(y-3\right)^2}{8}=1$$

Es una elipse de eje mayor horizontal.

Además:

$$C\left(-1;3\right); a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}.$$

Los focos serán: $F'\left(-1+\sqrt{17};3\right); F\left(-1-\sqrt{17};3\right)$

Los vértices serán: $A'\left(4;3\right); A\left(-6,3\right); B'\left(-1;3+2\sqrt{2}\right); B\left(-1;3-2\sqrt{2}\right)$

La excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{17}}{5} = 0,8246$

La longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2\left(8\right)}{5} = \dfrac{16}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \dfrac{a}{e} = 1 \pm \dfrac{5}{0,8246} = 1 \pm 6,0635$

6.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es:

$$9y^2 + 108y + 4x^2 - 56x = -484$$

$$9\left(y^2 + 12y + ?\right) + 4\left(x^2 - 14x + ?\right) = -484 \Rightarrow$$
$$9\left(y^2 + 12y + 36\right) + 4\left(x^2 - 14x + 49\right) = -484 + 324 + 196 = 36$$
$$\frac{9}{36}\left(y+6\right)^2 + \frac{4}{36}\left(x-7\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\left(x-7\right)^2}{9} + \frac{\left(7+6\right)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Es una elipse de eje mayor horizontal:

$C(7;-6)$

$F'\left(7+\sqrt{5};-6\right);F\left(7-\sqrt{5};-6\right)$

$A'(10;-6);A(4;-6);B'(7;-4);B(7;-8)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}=0,7453$

Longitud de lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\frac{a}{e}=7\pm\frac{3}{0,7453}=7\pm 4,025$

7.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$x^2+4y^2-6x+24y=-41$$

$\left(x^2-6x+?\right)+4\left(y^2+6y+?\right)=-41\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x^2-6x+9\right)+4\left(y^2+6y+9\right)=-41+9+36=4\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}=1\Rightarrow$

$a^2=4;b^2=1;c^2=a^2-b^2=4-1=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$

La elipse es de eje mayor horizontal, con los siguientes valores:

$C=(3;-3)$

Focos: $F'\left(3+\sqrt{3};-3\right);F\left(3-\sqrt{3};-3\right)$

Vértices: $A'(5;-3);A(1;-3);B'(3;-2);B(3;-4)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$

Longitud de lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)^2}{2}=1$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e} = 3 \pm \frac{2}{0,866} = 3 \pm 2,309$

8.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$4x^2 + y^2 - 8x - 2y = 1$$

$$4\left(x^2 - 2x + ?\right) + \left(y^2 - 2y + ?\right) = 1 \Rightarrow 4\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = 1 + 4 + 1 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6 \Rightarrow \frac{4}{6}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(y-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{3}{2}} + \frac{\left(y-1^2\right)}{6} = 1 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}; b^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, es una elipse de eje mayor vertical con los siguientes valores:

Centro: $C(1;1)$

Focos: $F'\left(1;1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); F\left(1;1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Vértices: $A'\left(1;1+\sqrt{6}\right); A\left(1;1-\sqrt{6}\right); B'\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}};1\right); B\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}};1\right)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \frac{a}{e} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{0,866} = 1 \pm 2,8285$

9.- Encontrar la ecuación canónica de la elipse cuyo centro se encuentra en el origen, $a=8;b=6$ y el eje mayor es paralelo al eje de las y.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1\Rightarrow 16x^2+9y^2=576\Rightarrow 16x^2+9y^2-576=0$$

10.- Encontrar la ecuación canónica y la ecuación general de la elipse cuyo centro es $C(-3;-1)$, la longitud del semieje mayor horizontal es 7 unidades y la longitud del semieje menor es 5 unidades.

$$\frac{(x+3)^2}{(7)^2}+\frac{(y+1)^2}{(5)^2}=1\Rightarrow\frac{(x+3)^2}{49}+\frac{(y+1)^2}{25}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(x+3)^2+49(y+1)^2=1225\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\left(x^2+6x+9\right)+49\left(y^2+2y+1\right)=1225\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2+49y^2+150x+98y=1225-175-49=1001\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2+49y^2+150x+98y-1001=0$$

11.- Encontrar la ecuación de la elipse que tiene una longitud de semieje menor igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud del semieje mayor horizontal, el centro está en el origen y $a=6$.

Los datos que conocemos es que la elipse es de eje mayor horizontal y además:

$$C(0;0);a=6;b=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}(6)=4$$

Luego, la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow 4x^2+9y^2=144\Rightarrow 4x^2+9y^2-144=0$$

12.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen de coordenadas, su excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2};$ y la longitud del semieje mayor horizontal es 10 unidades.

El enunciado del problema dice que la elipse tiene un semieje mayor horizontal y además:

$C(0;0); a=10; c=\left(\frac{1}{2}\right)a=5$

Entonces: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=100-25=75 \Rightarrow b=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1 \Rightarrow 75x^2+100y^2=7500 \Rightarrow 3x^2+4y^2-300=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F´(2;0); F(-2;0)$ y $a=7$.

Como las ordenadas de los dos focos son iguales (*cero*) el eje mayor de la elipse es horizontal y por ser los focos equidistantes del centro, éste será $C(0;0)$.

Luego se conoce: $a=7; c=2; b^2=a^2-c^2=49-4=45 \Rightarrow b=3\sqrt{5}$.

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1 \Rightarrow 45x^2+49y^2=2205 \Rightarrow 45x^2+49y^2-2205=0$$

14.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyo semieje mayor tiene una longitud de 4 unidades y los focos son $F´(2;3); F(2;-3)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos se encuentra que las abscisas de ambos son iguales, por lo tanto el eje mayor es vertical, $x=2,$ y el centro será el punto medio del segmento $F´F,$ o sea $C(2;0)$.

De los datos del problema se tiene:

$a=4; c=3 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=16-9=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 16(x-2)^2+7y^2=112 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16\left(x^2-4x+4\right)+7y^2=112 \Rightarrow 16x^2-64x+7y^2-48=0$$

15.- Encontrar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(4;2)$ y cuyos focos son $F'(1;5); F(1;-1)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos, se encuentra que las abscisas de ambos son iguales, por lo que el eje mayor será vertical, $x=1$, el centro tendrá de ordenada $\frac{5+(-1)}{2}=2$, o sea $C(1;2)$.

La distancia del centro a los focos será $c=5-2=3$

Por definición de lugar geométrico en el caso de la elipse, la longitud total del eje mayor es igual a la suma de las distancias de un punto cualquiera perteneciente a la elipse a cada uno de los focos; o sea: $2a=d_1+d_2$.

$$d_1=d_{(F',P)}=\sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2}=\sqrt{18}$$
$$d_2=d_{(F,P)}=\sqrt{(1-4)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}$$

$$2a=\sqrt{18}+\sqrt{18} \Rightarrow a=\sqrt{18} \Rightarrow a^2=18$$

$$b^2=a^2-c^2=18-9=9 \Rightarrow b=3.$$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{18}=1 \Rightarrow 2(x-1)^2+(y-2)^2=18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)=18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2+y^2-4x-4y-12=0$$

16.- Hallar la ecuación general de la elipse cuyas directrices son $l_1 \equiv x+30=0; l_2 \equiv x-24=0;$ y $A(6;2)$ es uno de los vértices del eje mayor.

Al ser verticales las directrices, la elipse tiene el eje mayor horizontal.

El cetro de la elipse debe estar a igual distancia de las directrices. Su abscisa será:

$$x_0=\frac{-30+24}{2}=-3$$

Como ele eje mayor es horizontal, la ordenada del centro será la misma del vértice A:

$y_0=2$

Entonces, las coordenadas del centro serán $C(-3;2)$.

El semieje mayor será:

$a=d_{(A;C)}=6-(-3)=9$

De l_2 tenemos que $x=24$.

También: $x=x_0+\frac{a}{e}\Rightarrow 24=-3+\frac{9}{e}\Rightarrow e=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{9}{3}=3$

Luego: $a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=81-9=72$

La ecuación canónica será:

$$\frac{(x+3)^2}{81}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

La ecuación general será:

$$8x^2+9y^2+48x-36y-540=0$$

17.- Hallar la ecuación de la elipse cuyas directrices son $l_1\equiv 2y-11=0; l_2\equiv 2y+7;$ y los focos son $F'(2;-1); F(2;3)$.

Tanto por las ecuaciones de las directrices, que son perpendiculares al eje ***y*,** como por las abscisas de los focos se puede afirmar que el eje mayor de la elipse es vertical.

La ordenada del centro será:

$$y_0=\frac{3-1}{2}=1$$

Entonces, las coordenadas del centro son:

$C(2;1)$

La semidistancia focal es: $c = 1-(-1) = 2$

Y la ecuación de las directrices es:

$$y = y_0 + \frac{a}{e} = y_0 + \frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{11}{2} = 1 + \frac{a^2}{2} = \frac{2+a^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11 = 2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

También: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}.$

Entonces, la ecuación canónica será:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

La ecuación general será:

$$9(x-2)^2 + 5(y-1)^2 = 45 \Rightarrow 9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 5\left(y^2 - 2y + 1\right) = 45 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 36 + 5y^2 - 10y + 5 = 45 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 36x - 10y - 4 = 0$$

18.- Encontrar la ecuación canónica de la elipse cuyos vértices son $A'(5;0); A(-5;0)$ y la longitud del lado recto es $\frac{8}{5}$.

Al inspeccionar las coordenadas de los vértices, se nota que las ordenadas son iguales y por lo tanto el eje mayor es horizontal. El centro, es el punto medio entre los dos vértices; o sea:

$x_0 = \frac{-5+5}{2} = 0$ entonces, las coordenadas del centro son $C(0;0)$.

De los valores conocidos tenemos que $2a = 5 - (-5) = 10 \Rightarrow a = 5$

Ela do recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow 2b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

19.- La **Luna** tiene una órbita elíptica con la **Tierra** en uno de sus focos. La longitud del eje mayor es 478.000,00 millas y la excentricidad es $e = 0,0549$. Encontrar la distancia más corta y la distancia más larga de la **Tierra** a la **Luna**.

La elipse es el paso de la **Lun**a cuando gira alrededor de la T**ierra**. El eje mayor de la elipse va de $V(-a;0)$ hasta $V'(a;0)$, y $F(c;0)$ representa la posición de la **Tierra**.

Los valores son los siguientes:

$$2a = 478.000,00(millas) \Rightarrow a = 239.000,00(millas) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = a \cdot e = 239.000 \cdot (0,0549) = 13.000,00(millas),$$

Nota: La semidistancia focal ha sido redondeada.

La distancia más corta de la **Tierra** a la **Luna** es:

$$a - c = 239.999,00 - 13.000,00 = 226.000,00(millas)$$

La distancia más larga de la **Tierra** a la **Luna** es:

$$a + c = 239.000,00 + 13.000,00 = 252.000,00(millas)$$

20.- Un puente de forma elíptica atraviesa transversalmente una autopista y sus apoyos están separados 60,0 pies y su altura máxima en el centro es de 30 pies. Calcular la altura del puente correspondiente al borde, brocal, de la autopista, si éste está a 20 pies del centro.

De los datos del enunciado, tomando el centro en el punto donde se presenta la altura máxima, tenemos:

$$C(0,0); 2a = 60 \Rightarrow a = 30 : b = 20$$

Entonces, la ecuación de la elipse de eje mayor horizontal es:

$$\frac{x^2}{(30)^2}+\frac{y^2}{(20^2)}=1 \Rightarrow (20)^2 x^2+(30)^2 y^2=(20)^2\cdot(30^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{(20)^2\left[(30)^2-x^2\right]}{(30^2)}$$

Si el borde está a20 pies del eje central de la autopista:

$$y^2=\frac{(20)^2\left[(30)^2-(20)^2\right]}{(30)^2}=\frac{(20)^2(9-4)}{9}=\frac{(20)^2(5)}{(9)} \Rightarrow$$

$$y_b=\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #44.
Tema: La hipérbola.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

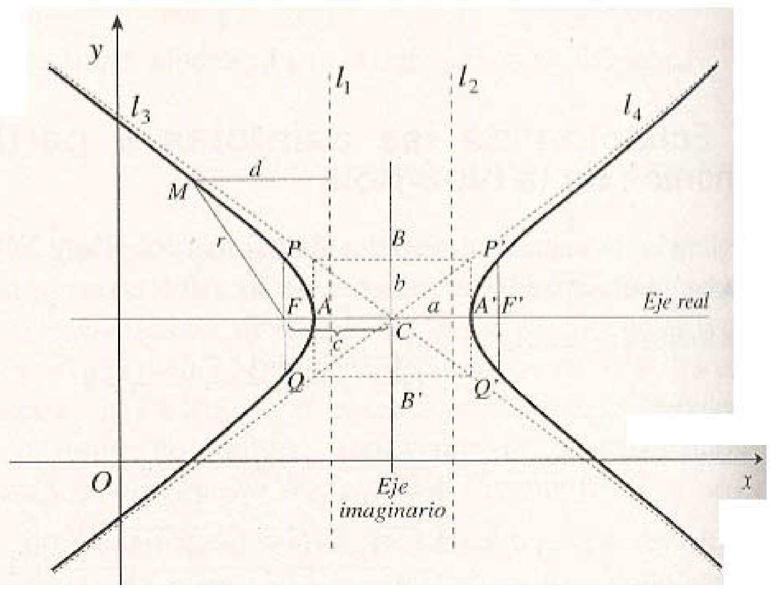
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos (tomada en valor absoluto) es constante.



Elementos de la hipérbola:

Centro:	$C(x_0, y_0)$
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje real)
Vértices:	A, A', B y B'
Eje real:	$d_{(AA')} = 2a$

Semieje real: $\frac{1}{2}d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$

Eje Imaginario: $d_{(B,B')} = 2b$

Semieje imaginario: $\frac{1}{2}d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$

Distancia focal: $d_{(F,F')} = 2c$

Semidistancia focal: $\frac{1}{2}d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$

Directrices: l_1 y l_2

Asíntotas: l_3 y l_4

Lados rectos: PQ y $P'Q'$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \quad (e > 1)$

Relación entre *a*, *b* y *c*: $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuaciones de las directrices:

Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

Pendientes de las asíntotas:

Caso I	Caso II
$m = \pm\frac{b}{a}$	$m = \pm\frac{a}{b}$

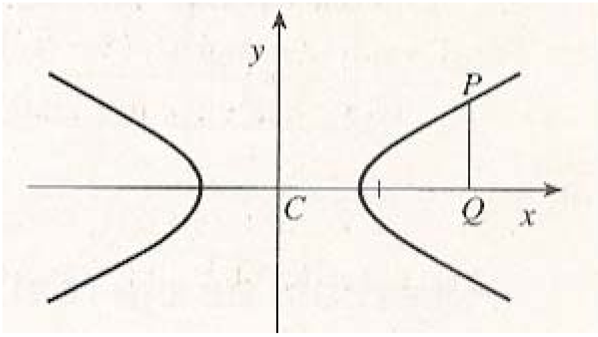
Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \dfrac{2b^2}{a}$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = \dfrac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$	$m = \dfrac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$

Propiedad de la hipérbola:

Desde un punto cualquiera $\boldsymbol{P}$ de la hipérbola se traza un segmento $\boldsymbol{PQ}$ perpendicular al eje real. La abscisa de $\boldsymbol{P}$ es igual a la distancia entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{Q}$, y su ordenada a la distancia entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.



Abscisa de ***P*** = $d_{(C,Q)}$

Ordenada de ***P*** = $d_{(P,Q)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola, se tiene que:

$$\frac{\left|d_{(C,Q)}\right|^2}{a^2} - \frac{\left|d_{(P,Q)}\right|^2}{b^2} = 1$$

PREGUNTAS:

1.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación canónica es la siguiente:

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

Nota importante #1: Se debe tener presente que a^2 está asociada con el ***término positivo***, por lo tanto, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$: En este problema, al estar a^2 como denominador del término en ***y***, indica que el eje real de la hipérbola es vertical. Dado el caso, en otro problema, donde el término en ***x*** sea positivo, y a^2 esté asociado con el término en ***x***; entonces, la hipérbola tendría en ese otro caso un eje real horizontal.

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4; c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$

Luego, se trata de una hipérbola de eje real vertical con los siguientes valores:

Centro: $C(2;3)$

Focos: $F'\left(2;3+\sqrt{41}\right); F\left(2;3-\sqrt{41}\right)$

Vértices: $A'(2;8); A(2;-2); B'(-2;3); B(6;3)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}=\frac{6,4}{5}=1,28$

Longitud del lado recto: $\frac{ab^2}{a}=\frac{2(16)}{5}=\frac{32}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=3\pm\frac{5}{1,28}=3\pm3,906$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y-3)=\pm\frac{5}{4}(x-2)$

Nota importante #2: Se debe destacar que la relación de los parámetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ no es la misma en la elipse que en la hipérbola. Mientras que en la elipse se cumple que $a^2=b^2+c^2$, en la hipérbola se cumple que $c^2=a^2+b^2$.

2.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$25y^2-9x^2-100y-72x-269=0$$

$$25\left(y^2-4y+?\right)-9\left(x^2+8x+?\right)=269\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25\left(y^2-4y+4\right)-9\left(x^2+8x+16\right)=269+100-144=225\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{25}{225}(y-2)^2-\frac{9}{225}(x+4)^2=1\Rightarrow\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+4)^2}{25}=1$$

Es una hipérbola de eje real vertical, $x=-4$, con los siguientes valores:

$$a^2=9\Rightarrow a=3;b^2=25\Rightarrow b=5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=9+25=34\Rightarrow c=\sqrt{34}$$

Centro: $C(-4;2)$

Focos: $F'\left(-4;2+\sqrt{34}\right);F\left(-4;2-\sqrt{34}\right)$

Vértices: $A'(-4;5);A(-4;-1);B'(-9;2);B(1;2)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{3}=1,9436$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(25)}{3}=\dfrac{50}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\dfrac{a}{e}=2\pm\dfrac{3}{1{,}9436}=2\pm 1{,}5435$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y-2)=\pm\dfrac{3}{5}(x+4)$

3.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$81x^2-36y^2=2916$$

$$\frac{81}{2916}x^2-\frac{36}{2916}y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{81}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=6;b^2=81\Rightarrow b=9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=36+81=117\Rightarrow c=\sqrt{117}$$

Entonces, es una hipérbola de eje real horizontal, $y=0$, con los siguientes valores:

Centro: $C(0;0)$

Focos: $F'\left(\sqrt{117};0\right);F\left(-\sqrt{117};0\right)$

Vértices: $A'(6;0);A(-6;0);B'(0;-9);B(0;9)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{117}}{6}=\dfrac{10{,}8166}{9}=1{,}8027$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(81)}{6}=27$

Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\dfrac{a}{e}=0\pm\dfrac{6}{1{,}8027}=\pm 3{,}3283$

Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\left(\dfrac{3}{2}\right)x$

4.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$9x^2-4y^2-54x-40y-55=0$$

$$9\left(x^2-6x+?\right)-4\left(y^2+10y+?\right)=55\Rightarrow$$
$$9\left(x^2-6x+9\right)-4\left(y^2+10y+25\right)=55+81-100=36\Rightarrow$$
$$\frac{9}{36}(x-3)^2-\frac{4}{36}(y+5)^2=1\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{9}=1\Rightarrow$$
$$a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=9\Rightarrow b=3;c^2=a^2+b^2=4+9=13\Rightarrow c=\sqrt{13}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y=-5,$ cuyos valores son los siguientes:

Centro: $C(3;-5)$
Focos: $F'\left(3+\sqrt{13};-5\right);F\left(3-\sqrt{13};-5\right)$
Vértices: $A'(5;-5);A(1;-5);B'(3;-8);B(3;-2)$
Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$
Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{2}=9$
Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\frac{a}{e}=3\pm\frac{2}{1,8027}=3\pm1,1094$
Ecuaciones de las asíntotas: $(y+5)=\pm\left(\frac{3}{2}\right)(x-3)$

5.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$y^2-5x^2+20x-50=0$$

$$y^2-5\left(x^2-4x+?\right)=50\Rightarrow y^2-5\left(x^2-4x+4\right)=50-20=30\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{y^2}{30}-\frac{5}{30}(x-2)^2=1\Rightarrow\frac{y^2}{30}-\frac{(x-2)^2}{6}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2=30\Rightarrow a=\sqrt{30};b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6};\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=30+6=36\Rightarrow c=6$$

Entonces, es una hipérbola de eje real vertical, $x=2,$ con los siguientes valores:

Centro: $C(2;0)$

Focos: $F'(2;6);F(2;-6)$

Vértices: $A'\left(2;\sqrt{30}\right);A\left(2;-\sqrt{30}\right);B'\left(2-\sqrt{6};0\right);B\left(2+\sqrt{6};0\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(6)}{\sqrt{30}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=0\pm 5=\pm 5$

Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}(x-2)=\pm\sqrt{5}(x-2)$

6.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$-4y^2+9x^2-90x-24y=-153\Rightarrow 9x^2-4y^2-90x-24y=-153\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-10x+?\right)-4\left(y^2+6y+?\right)=-153\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-10x+25\right)-4\left(y^2+6y+9\right)=-153+225-36=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{9}{36}(x-5)^2-\frac{4}{36}(y+3)^2=1\Rightarrow\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=9\Rightarrow b=3;c^2=a^2+b^2=4+9=13\Rightarrow c=\sqrt{13}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y=-3,$ con los siguientes valores:

Centro: $C=(5;-3)$

Focos: $F'\left(5+\sqrt{13};-3\right);F\left(5-\sqrt{13};-3\right)$

Vértices: $A'(7;-3);A(2;-3);B'(5;0);B(5;-6)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}=1{,}8027$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{2} = 9$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e} = 5 \pm \frac{2}{1,8027} = 5 \pm 1,1094$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y+3) = \pm \frac{3}{2}(x-5)$

7.- Hacer el estudio de la hipérbola, cuya ecuación general es la siguiente:

$$49x^2 - 25y^2 + 294x + 200y = 1184$$

$$49\left(x^2 + 6x + ?\right) - 25\left(y^2 - 8y + ?\right) = 1184 \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49\left(x^2 + 6x + 9\right) - 25\left(y^2 - 8y + 16\right) = 1184 + 441 - 400 = 1225 \Rightarrow$$
$$\frac{49}{1225}(x+3)^2 - \frac{25}{1225}(y-4)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{49} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b^2 = 49 \Rightarrow b = 7; c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74 \Rightarrow c = \sqrt{74}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y = 4$, con los siguientes valores:

Centro: $C(-3;4)$

Focos: $F'\left(-3+\sqrt{74};4\right); F\left(-3-\sqrt{74};4\right)$

Vértices: $A'(2;4); A(-8;4); B'(-3;11); B(-3;-3)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{74}}{5} = 1,72$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{74}\right)}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e} = -3 \pm \frac{5}{1,72} = -3 \pm 2,9069$

Ecuaciones de las asíntotas: $\left(y-4\right)=\pm\frac{7}{5}\left(x+3\right)$

8.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$12y^2-4x^2+72y+16x+44=0$$

$$12\left(y^2+6y+?\right)-4\left(x^2-4x+?\right)=-44\Rightarrow$$
$$12\left(y^2+6y+9\right)-4\left(x^2-4x+4\right)=-44+108-16=48\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{12}{48}\left(y+3\right)^2-\frac{4}{49}\left(x-2\right)^2=1\Rightarrow\frac{\left(y+3\right)^2}{4}-\frac{\left(x-2\right)^2}{12}=1$$

De la ecuación canónica tenemos:

$$a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=12\Rightarrow b=\sqrt{12};\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=4+12=16\Rightarrow c=4$$

El eje real de la hipérbola es vertical y sus valores son:

Centro: $C\left(2;-3\right)$

Focos: $F'\left(2;1\right);F\left(2;-7\right)$

Vértices: $A'\left(2;-1\right);A\left(2;-5\right);B'\left(2-\sqrt{12};-3\right);B\left(2+\sqrt{12};-3\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\left(12\right)}{2}=12$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{2}{2}=2\pm1$

Ecuaciones de las asíntotas: $\left(y-y_0\right)=\pm\frac{a}{b}\left(x-x_0\right)=\left(y+3\right)=\pm\frac{2}{\sqrt{12}}\left(x-2\right)$

9.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en $C\left(-1;4\right)$, y donde $a=2;b=3$ y el eje real es horizontal.

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{4}-\frac{\left(y-4\right)}{9}=1\Rightarrow 9\left(x+1\right)^2-4\left(y-4\right)^2=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2+2x+1\right)-4\left(y^2-8y+16\right)=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2+18x+9-4y^2+32y-64=36\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-4y^2+18x+32y-91=0$$

10.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo eje real tiene una longitud de 8 unidades y los focos son $F'\left(0;5\right);F\left(0;-5\right)$.

El enunciado del problema nos dice que: $2a=8\Rightarrow a=4$. Además, la hipérbola tiene un eje real vertical y su centro es el punto medio del segmento conformado por los focos; es decir: $C\left(0;0\right)$ y $c=5\Rightarrow b^2=c^2-a^2=25-16=9\Rightarrow b=3$

La ecuación canónica y la ecuación general de la hipérbola será:

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1\Rightarrow 9y^2-16x^2=144\Rightarrow 9y^2-16x^2-144=0$$

11.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo eje imaginario tiene una longitud de 6 unidades y sus vértices en su eje real son $A'\left(3;4\right);A\left(3;0\right)$.

Al observar los valores de las coordenadas de los vértices, se deduce que el eje real es vertical, $x=3$, y el centro es el punto medio de los vértices dados, o sea: $C\left(3;2\right)$. Además, el enunciado dice que $2b=6\Rightarrow b=3$.

Luego, se puede encontrar que: $2a=4\Rightarrow a=2$.

La ecuación canónica y la ecuación general de esta hipérbola serán:

$$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{9}=1 \Rightarrow 9(y-2)^2-4(x-3)^2=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(y^2-4y+4\right)-4\left(x^2-6x+9\right)=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9y^2-36y+36-4x^2+24x-36-36=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9y^2-4x^2-36y+24x-36=0$$

12.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices en el eje real son $A'(6;3); A(0;3)$ y un foco es $F'(8;3)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los vértices dados se deduce que la hipérbola es de eje real horizontal, $y=3$, y el centro de la hipérbola es el punto medio del segmento conformado por los vértices.; es decir: $C(3;3)$. Luego, se tiene que:
$a=3; c=5 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=25-9=16 \Rightarrow b=4.$

La ecuación canónica y la ecuación general de la hipérbola dada serán:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1 \Rightarrow 16(x-3)^2-9(y-3)^2=144 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16\left(x^2-6x+9\right)-9\left(y^2-6y+9\right)-144=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2-96x+144-9y^2+96y-81-144=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2-9y^2-96x+96y-81=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene sus focos en los puntos siguientes: $F'(8;0); F(-8;0)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos, se deduce que la hipérbola es de eje real horizontal, $y=0$, y su centro es el punto medio de los dos puntos dados; es decir: $C(0;0)$. También, $c=8$ y como en una hipérbola equilátera $a=b$, se puede entonces escribir: $c^2=a^2+b^2=2a^2 \Rightarrow 64=2a^2 \Rightarrow a^2=b^2=32$

La ecuación canónica de la hipérbola será:

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$$

14.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuya asíntota es $2x-9=3y$, su centro es $C(3;-1)$ y uno de sus vértices $A'(6;-1)$.

Inspeccionando las coordenadas del centro y del vértice permite concluir que la hipérbola es de eje real horizontal y que $a=3$.

La asíntota tiene una ecuación como sigue:

$$3y=2x-9\Rightarrow y=\left(\frac{2}{3}\right)x-3\Rightarrow m=\frac{b}{a}=\frac{2}{3}=\frac{b}{3}\Rightarrow b=2$$

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1\Rightarrow 4(x-3)^2-9(y+1)^2=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2-6x+9\right)-9\left(y^2+2x+1\right)=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2-9y^2-24x-18y-9=0$$

15.- Encontrar la ecuación general de la hipérbola que pasa por el punto $P(6;5)$, y cuyas asíntotas son $l_3\equiv 3x-2y+8=0; l_4\equiv 3x+27-7=0$.

Las dos asíntotas se cruzan en el centro; por tanto, al resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las dos asíntotas s encuentran las coordenadas del centro: $C(1;2)$.

Asumiendo que el eje real es horizontal, se puede escribir:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1\text{...}(1)$$

Luego, despejando y en la ecuación $l_3\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}a\Rightarrow b^2=\frac{9}{4}a^2$

Entonces, sustituyendo valores en la ecuación (1):

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)a^2}=1\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{4(y-2)^2}{9a^2}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-4(y-2)^2=9a^2\Rightarrow\text{................................}(2)$$

Introduciendo ahora las coordinas de $P(6;5)$ en la ecuación (2):

$$9(6-1)^2-4(5-2)^2=9a^2 \Rightarrow 25-4=a^2=21$$

Sustituyendo este valor de $a^2=21$ en la ecuación (2):

$$9(x-1)^2-4(y-2)^2=9(21)=189 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(x^2-2x+1)-4(y^2-4y+4)=189 \Rightarrow$$
$$9x^2-18x+9-4y^2+16y-16-189=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2-4y^2-18x+16y-196=0$$

16.- Encontrar la ecuación general de la hipérbola si una de sus directrices es $l_2 \equiv 13x-131=0,$ y las ecuaciones de sus asíntotas son $l_3 \equiv 5x-12y-31=0$ y $l_4 \equiv 5x+12y+41=0.$

El centro de la hipérbola es el punto donde se cruzan las dos asíntotas, por lo que al resolver las dos ecuaciones dadas para dichas asíntotas se encuentran las coordenadas del centro. Sumando las dos ecuaciones l_3+l_4 se tiene:

$10x+10=0 \Rightarrow x=-1$ Introduciendo ahora este valor de $x=-1$ en la ecuación l_3 se tiene: $-5-12y-31=0 \Rightarrow -12y-36=0 \Rightarrow y=-3.$ Luego, las coordenadas del centro de la hipérbola es: $C(-1;-3).$

Ahora, a partir de la ecuación l_3:

$5x-12y-31=0 \Rightarrow 12y=5x-31 \Rightarrow y=\left(\frac{5}{12}\right)x-\frac{31}{12}$; o sea que la pendiente de la asíntota es $m=\frac{b}{a}=\frac{5}{12} \Rightarrow b=\left(\frac{5}{12}\right)a$.

De la ecuación de la directriz se deduce lo siguiente:

$$13x-131=0 \Rightarrow 13x=131 \Rightarrow x=\frac{131}{13}=x_0+\frac{a}{e}=-1+\frac{a^2}{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{131}{13}+1=\frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{144}{13}=\frac{a^2}{c} \Rightarrow c=\frac{13}{144}\cdot a^2 \Rightarrow c^2=\frac{(13)^2}{(12)^4}\cdot a^4$$

Utilizando la relación entre los parámetros de la hipérbola:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{(13)^2}{(12)^4} \cdot a^4 = a^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(13)^2}{(12)^4} \cdot a^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} = \frac{(13)^2}{(12)^2} \Rightarrow a^2 = (12)^2 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \left(\frac{5}{12}\right) a = 5$$

La ecuación canónica será, siendo el eje real horizontal porque la directriz dada es vertical:

$$\frac{(x+1)^2}{144} - \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

La ecuación general:

$$25(x+1)^2 - 144(y+3)^2 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\left(x^2 + 2x + 1\right) - 144\left(y^2 + 6y + 9\right) - 3600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 50x + 25 - 144y^2 - 864y - 1296 - 3600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 144y^2 + 50x - 864y - 4871 = 0$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 46.
Tema: Fracciones continuas.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Fracción continua: es una fracción de la siguiente forma:

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4}}}}$$

Fracción integrante: Se llama fracción integrante a toda fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador cualquier número entero. Aí, en el ejemplo anterior, las fracciones integrantes serán: $\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

Cociente incompleto: Se llama así a la parte entera de una fracción continua y a los denominadores de las fracciones integrantes.

Ejemplo:

En la fracción $4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}$ los cocientes incompletos son: 4; 3; 5 y 6.

Reducción de una fracción ordinaria o decimal a continua:

1.- Reducción de una fracción ordinaria propia a continua: Se halla el m.c.d. por divisiones sucesivas del numerador y el denominador de la fracción. La parte entera de la fracción continua será cero y los denominadores de las fracciones integrantes serán los cocientes de las divisiones:

Ejemplo: Reducir a fracción continua la fracción propia: $\frac{35}{157}$

Se encuentra el m.c.d. de 35 y 157:

	4	2	17
157	35	17	1
17	1	0	

La fracción continua equivalente es: $\frac{35}{157} = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17}}}$

2.- Reducción de una fracción ordinaria impropia a continua: Se procede como en el caso anterior pero la parte entera de la fracción será el primer cociente.

Ejemplo: Reducir a fracción continua la siguiente fracción impropia; $\frac{237}{101} =$

Se encuentra el m.c.d. por divisiones sucesivas:

	2	2	1	7	1	3
237	101	35	31	4	3	1
35	31	4	3	1	0	

Entonces:

$$\frac{237}{101} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

3.- Reducción de una fracción decimal a una fracción continua: Se transforma la fracción decimal a un quebrado por procedimientos que se verán más adelante, y a este quebrado se aplican las reglas anteriores.

Reducción de una fracción continua a fracción ordinaria:

Fracción reducida: la fracción ordinaria equivalente a una parte de la fracción continua comprendida entre el primer cociente incompleto y cada uno de los demás cocientes incompletos, se llama ***fracción reducida o convergente.***

Ley de formación de las reducidas: La primera y segunda reducida de una fracción continua pueden ser halladas fácilmente por simple inspección. A partir de la tercera, las reducidas se forman de acuerdo con la siguiente ley:

Se multiplica el ultimo cociente incompleto de la parte de fracción continua que consideramos, por los dos términos de la reducida anterior; al numerador de esta nueva fracción se le suma el numerador de la reducida anteprecedente y al denominador se suma el denominador se le suma el denominador de la fracción reducida anteprecedente.

Ejemplo:

Encontrar todas las reducidas de: $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}=$

La primera reducida es la parte entera: $2=\frac{1}{1}$

La segunda reducida o la fracción ordinaria equivalente a: $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

La tercera reducida o la fracción ordinaria equivalente a: $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=$ se forma multiplicando el último cociente incompleto 4 por los dos términos de la reducida anterior, la segunda $\left(\frac{7}{3}\right)$, y tendremos $\frac{4\times 7}{4\times 3}$; luego, al numerador de esta nueva fracción se le suma el numerador de la primera reducida, 2, y al denominador de la nueva fracción se le suma el denominador de la primera reducida,1. Es decir:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=\frac{4\times 7+2}{4\times 3+1}=\frac{30}{13}$$

la cuarta reducida o fracción ordinaria equivalente a $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}=$ se forma multiplicando el último cociente incompleto 5 por los dos términos de la tercera reducida, $\frac{30}{13}$, y tendremos $\frac{5\times 30}{5\times 13}$, al numerador de esta nueva fracción se le suma el numerador de la segunda fracción,7, y al denominador de esta nueva fracción se le suma el denominador de la segunda fracción, 3; o sea:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}=\frac{5\times 30+7}{5\times 13+3}=\frac{157}{68}$$

La quinta reducida o fracción ordinaria equivalente a la fracción continua dada:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}=$$ se forma multiplicando el último cociente incompleto 6 por los dos términos de la cuarta reducida, $\frac{157}{68}$, y tendremos $\frac{6\times 157}{6\times 68}$, al numerador de esta nueva fracción se le suma el numerador 30 de la tercera reducida y al denominador de esta nueva fracción se le suma el denominador 13 de la tercera reducida; o sea:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}=\frac{6\times 157+30}{6\times 68+13}=\frac{972}{421}$$

PREGUNTAS:

Reducir a fracción continua:

1.- $\frac{8}{17}=$

	2	8	
17	8	1	
1	0		

Entonces: $\frac{8}{17}\Rightarrow 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}$

2.- $\frac{7}{19}=$

	2	1	2	2	
19	7	5	2	1	
5	2	1	0		

Entonces: $\frac{7}{19} \Rightarrow 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$

3.- $\frac{67}{78} =$

	1	6	11		
78	67	11	1		
11	1	0			

Entonces: $\frac{67}{78} \Rightarrow 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{11}}}$

4.- $\frac{19}{1050} =$

	55	3	1	4	
1050	19	5	4	1	
5	4	1	0		

Entonces: $\frac{19}{1050} \Rightarrow 0+\cfrac{1}{55+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$

5.- $\frac{131}{2880} =$

	21	1	64	2	
2880	131	129	2	1	
129	2	1	0		

Entonces:

$\frac{131}{2880} \Rightarrow 0+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{64+\cfrac{1}{2}}}}$

6.- $\frac{23}{79} =$

	3	2	3	3
79	23	10	3	1
10	3	1	0	

Entonces: $\frac{23}{79} \Rightarrow 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}$

7.- $\frac{31}{2040} =$

	65	1	4	6	
2040	31	25	6	1	
25	6	1	0		

Entonces: $\frac{31}{2040} \Rightarrow 0 + \cfrac{1}{65 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6}}}}$

8.- $\frac{15}{131} =$

	8	1	2	1	3	
131	15	11	4	3	1	
11	4	3	1	0		

Entonces: $\frac{15}{131} \Rightarrow 0 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$

9.- $\frac{79}{1410} =$

	17	1	5	1	1	2	2
1410	79	67	12	7	5	2	1
67	12	7	5	2	1	0	

Entonces:

$$\frac{79}{1410} \Rightarrow 0+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

10.- $\frac{196}{27} =$

	7	3	1	6		
196	27	7	6	1		
7	6	1	0			

Entonces: $\frac{196}{27} \Rightarrow 7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}$

11.- $\frac{85}{37} =$

	2	3	2	1	3	
85	37	11	4	3	1	
11	4	3	1	0		

Entonces:

$$\frac{85}{37} \Rightarrow 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

12.- $\frac{285}{126} =$

	2	3	1	4	2	
285	126	33	27	6	3	
33	27	6	3	0		

Entonces:

$$\frac{285}{126} \Rightarrow 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

13.- $\frac{547}{232} =$

	2	2	1	3	1	7	2
547	232	83	66	17	15	2	1
83	66	17	15	2	1	0	

Entonces:

$$\frac{547}{232} \Rightarrow 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

14.- $\frac{3217}{1900} =$

	1	1	2	3	1	6	5	4
3217	1900	1317	583	151	130	21	4	1
1317	583	151	130	21	4	1	0	

Entonces:

$$\frac{3217}{1900} \Rightarrow 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

15.- $\frac{2308}{1421} =$

	1	1	1	1	1	1	19	9
2308	1421	887	534	353	181	172	9	1
887	534	353	181	172	9	1	0	

Entonces:

$$\frac{2308}{1421} \Rightarrow 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{9}}}}}}}$$

Reducir a fracción ordinaria las fracciones continuas siguientes, hallando todas las reducidas:

1.- $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} =$

La primera reducida es: $\frac{1}{1}$

La segunda reducida: $1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{3}$

La tercera reducida es: $\frac{2\times 3+1}{2\times 2+1}=\frac{7}{5}$

2.- $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} =$

La primera reducida es: $\frac{2}{1}$

La segunda reducida es: $2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}$

La tercera reducida es: $\frac{3\times 1+2}{1\times 1+1}=\frac{5}{2}$

La cuarta reducida es: $\frac{2\times 5+3}{2\times 2+1}=\frac{13}{5}$

3.- $0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} =$

La primera reducida no existe es igual a cero.

La segunda reducida es: $\frac{1}{1}$

La tercera reducida es: $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{2+1}{2}}=\frac{2}{3}$

La cuarta reducida es: $\frac{3\times 2+1}{3\times 3+1}=\frac{7}{10}$

4.- $$2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=$$

La primera reducida es: $\frac{2}{1}$

La segunda reducida es: $\frac{2}{1}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

La tercera reducida es: $\frac{1\times 7+2}{1\times 3+1}=\frac{9}{4}$

La cuarta reducida es: $\frac{1\times 9+7}{1\times 4+3}=\frac{16}{7}$

La quinta reducida es: $\frac{2\times 16+9}{2\times 7+4}=\frac{41}{18}$

5.- $0+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}}=$

La primera reducida es cero.

La segunda reducida es: $\frac{1}{2}$

La segunda reducida es: $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}$

La tercera reducida es: $\dfrac{4\times 3+1}{4\times 7+2}=\dfrac{13}{30}$

La cuarta reducida es: $\dfrac{2\times 13+3}{2\times 30+7}=\dfrac{29}{67}$

6.-

$$1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

La primera reducida es: $\dfrac{1}{1}$

La segunda reducida es: $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{5}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}$

La tercera reducida es: $\dfrac{4\times 6+1}{4\times 5+1}=\dfrac{25}{21}$

La cuarta reducida es: $\dfrac{1\times 25+6}{1\times 21+5}=\dfrac{31}{26}$

La quinta reducida es: $\dfrac{3\times 31+25}{3\times 26+21}=\dfrac{118}{99}$

7.- $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}}}=$

La primera reducida es: $\dfrac{1}{1}$

La segunda reducida es: $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

La tercera reducida es: $\dfrac{1\times 5+1}{1\times 4+1}=\dfrac{6}{5}$

La cuarta reducida es: $\dfrac{1\times 6+5}{1\times 5+4}=\dfrac{11}{9}$

La quinta reducida es: $\dfrac{2\times 11+6}{2\times 9+5}=\dfrac{28}{23}$

La sexta reducida es: $\dfrac{5\times 28+11}{5\times 23+9}=\dfrac{151}{124}$

8.- $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}$

La primera reducida es: $\dfrac{3}{1}$

La segunda reducida es: $\dfrac{3}{1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6+1}{2}=\dfrac{7}{2}$

La tercera reducida es: $\dfrac{3\times 7+3}{3\times 2+1}=\dfrac{24}{7}$

La cuarta reducida es: $\dfrac{4\times 24+7}{4\times 7+2}=\dfrac{103}{30}$

La quinta reducida es: $\dfrac{1\times 103+24}{1\times 30+7}=\dfrac{127}{37}$

La sexta reducida es: $\dfrac{5\times 127+103}{5\times 37+30}=\dfrac{738}{215}$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 47.

Tema: Operaciones con fracciones. Suma. (Baldor).

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicios # 126, simplificar:

1.- $\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{12}{4}\right)\times(x-2)+\left(\frac{12}{6}\right)\times(3x+2)}{12}=\frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12}=\frac{3x-6+6x+4}{12}=$$

$$=\frac{9x-2}{12}$$

2.- $\frac{2}{5a^2}+\frac{1}{3ab}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{15a^2b}{5a^2}\right)\times 2+\left(\frac{15a^2b}{3ab}\right)\times 1}{15a^2b}=\frac{6b+5a}{15a^2b}$$

3.- $\frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{60ab}{15a}\right)(a-2b)+\left(\frac{60ab}{20b}\right)(b-a)}{60ab}=\frac{4b(a-2b)+3a(b-a)}{60ab}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4ab-8b^2+3ab-3a^2}{60ab}=\frac{7ab-3a^2-8b^2}{60ab}$$

4.- $\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{15a^2b^2}{3ab}\right)(a+3b)+\left(\frac{15a^2b^2}{5a^2b^2}\right)\left(a^2b-4ab^2\right)}{15a^2b^2}=\frac{5ab(a+3b)+3\left(a^2b-4ab^2\right)}{15a^2b^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2b+15ab^2+3a^2b-12ab^2}{15a^2b^2}=\frac{8a^2b+3ab^2}{15a^2b^2}=\frac{8a+3b}{15ab}$$

5.- $\frac{a-1}{8}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{12}{3}\right)(a-1)+\left(\frac{12}{6}\right)(2a)+\left(\frac{12}{12}\right)(3a+4)}{12}=\frac{4(a-1)+2\times 2a+3a+4}{12}=$$

$$=\frac{4a-4+4a+3a+4}{12}=\frac{11a}{12}$$

6.- $\frac{n}{m^2}+\frac{3}{mn}+\frac{2}{m}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{m^2n}{m^2}\right)(n)+\left(\frac{m^2n}{mn}\right)(3)+\left(\frac{m^2n}{m}\right)(2)}{m^2n}=\frac{n^2+3m+2mn}{m^2n}$$

7.- $\frac{1-x}{2x}+\frac{x+2}{x^2}+\frac{1}{3ax^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{6ax^2}{2x}\right)(1-x)+\left(\frac{6ax^2}{x^2}\right)(x+2)+\left(\frac{6ax^2}{3ax^2}\right)(1)}{6ax^2}=\frac{3ax(1-x)+6a(x+2)+2(1)}{6ax^2}=$$

$$\frac{3ax-3ax^2+6ax+12a+2}{6ax^2}=\frac{9ax-3ax^2+12a+2}{6ax^2}$$

8.- $\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{30ax}{3a}\right)(2a-3)+\left(\frac{30ax}{10x}\right)(3x+2)+\left(\frac{30ax}{5ax}\right)(x-a)}{30ax}=\frac{10x(2a-3)+3a(3x+2)+6(x-a)}{30ax}=$$

$$\frac{20ax-30x+9ax+6a+6x-6a}{30ax}=\frac{29ax-24x}{30ax}=\frac{29a-24}{30a}$$

9.- $\frac{3}{5}+\frac{x+2}{2x}+\frac{x^2+2}{6x^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{30x^2}{5}\right)(3)+\left(\frac{30x^2}{2x}\right)(x+2)+\left(\frac{30x^2}{6x^2}\right)(x^2+2)}{30x^2}=\frac{18x^2+15x^2+30x+5x^2+10}{30x^2}=$$

$$=\frac{38x^2+30x+10}{30x^2}=\frac{19x^2+15x+5}{15x^2}$$

10.- $\frac{x-y}{12}+\frac{2x+y}{15}+\frac{y-4x}{30}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{60}{12}\right)(x-y)+\left(\frac{60}{15}\right)(2x+y)+\left(\frac{60}{30}\right)(y-4x)}{60}=\frac{5(x-y)+4(2x+y)+2(y-4x)}{60}=$$

$$=\frac{5x-5y+8x+4y+2y-8x}{60}=\frac{5x+y}{60}$$

11.- $\frac{m-n}{mn}+\frac{n-a}{na}+\frac{2a-m}{am}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{amn}{mn}\right)(m-n)+\left(\frac{amn}{na}\right)(n-a)+\left(\frac{amn}{am}\right)(2a-m)}{amn}=\frac{a(m-n)+m(n-a)+n(2a-m)}{amn}=$$

$$=\frac{am-an+mn-ma+2an-mn}{amn}=\frac{an}{amn}=\frac{1}{m}$$

12.- $\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-x^3}{9x^3}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{45x^3}{3x}\right)(x+2)+\left(\frac{45x^3}{5x^2}\right)(x^2-2)+\left(\frac{45x^3}{9x^3}\right)(2-x^3)}{45x^3}=\frac{15x^2(x+2)+9x(x^2-2)+5(2-x^2)}{45x^3}=$$

$$=\frac{15x^3+30x^2+9x^2-18x+10-5x^2}{45x^3}=\frac{15x^3+34x^2-18x+10}{45x^3}$$

13.- $\frac{1}{ab}+\frac{b^2-a^2}{ab^3}+\frac{ab+b^2}{a^2b^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{a^2b^3}{ab}\right)(1)+\left(\frac{a^2b^3}{ab^3}\right)(b^2-a^2)+\left(\frac{a^2b^3}{a^2b^2}\right)(ab+b^2)}{a^2b^3}=\frac{ab^2+ab^2-a^3+ab^2+b^3}{a^2b^3}=$$

$$=\frac{b^3+3ab^2-a^3}{a^2b^3}$$

14.- $\frac{a+3b}{ab}+\frac{2a-3m}{am}+\frac{3}{a}=$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{abm}{ab}\right)(a+3b)+\left(\frac{abm}{am}\right)(2a-3m)+\left(\frac{abm}{a}\right)(3)}{abm}=\frac{m(a+3b)+b(2a-3m)+3bm}{abm}=$$
$$=\frac{am+3bm+2ab-3bm+3bm}{abm}=\frac{am+3bm+2ab}{abm}$$

Suma de fracciones con denominadores compuestos. Ejercicio 127.

1.- $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}=$

Solución:

$$\frac{a-1+a+1}{a^2-1}=\frac{2a}{a^2-1}$$

2.- $\frac{2}{x+4}+\frac{1}{x-3}=$

Solución:

$$\frac{2(x-3)+(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\frac{3x-2}{(x+4)(x-3)}$$

3.- $\frac{3}{1-x}+\frac{6}{2x+5}=$

Solución:

$$\frac{3(2x+5)+6(1-x)}{(1-x)(2x+5)}=\frac{6x+15+6-6x}{(1-x)(2x+5)}=\frac{21}{(1-x)(2x+5)}$$

4.- $\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}=$

Solución:

$$\frac{x(x+y)+x(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{x^2+xy+x^2-xy}{x^2-y^2}=\frac{2x^2}{x^2-y^2}$$

5.- $\frac{m+3}{m-3}+\frac{m+2}{m-2}=$

Solución:

$$\frac{(m-2)(m+3)+(m-3)(m+2)}{(m-3)(m-2)}=\frac{\left(m^2+m-6\right)+\left(m^2-m-6\right)}{(m-3)(m-2)}=$$
$$=\frac{2m^2-12}{(m-3)(m-2)}$$

6.- $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=$

Solución:

$$\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$$

7.- $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x+1}{(x-1)^2}=$

Solución:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)+(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2-x+x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)^2}=$$
$$=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-1)^2}$$

8.- $\frac{2}{x-5}+\frac{3x}{x^2-25}=$

Solución:

$$\frac{2}{x-5}+\frac{3x}{(x+5)(x-5)}=\frac{2(x+5)+3x}{(x+5)(x-5)}=\frac{5x+10}{x^2-25}$$

9.- $\frac{1}{3x-2y}+\frac{x-y}{9x^2-4y^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{x-y}{(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{(3x+2y)+(x-y)}{(3x+2y)(3x-2y)}=$$
$$=\frac{3x+2y++x-y}{9x^2-4y^2}=\frac{4x+y}{9x^2-4x^2}$$

10.- $\frac{x+a}{x+3a}+\frac{3a^2-x^2}{x^2-9a^2}=$

Solución:

$$\frac{x+a}{x+3a}+\frac{3a^2-x^2}{(x+3a)(x-3a)}=\frac{(x+a)(x-3a)+3a^2-x^2}{(x^2-9a^2)}=$$
$$=\frac{x^2-3ax+ax-3a^2+3a^2-x^2}{(x^2-9a^2)}=\frac{-2ax}{x^2-9a^2}=\frac{2ax}{9a^2-x^2}$$

11.- $\frac{a}{1-a^2}+\frac{a}{1+a^2}=$

Solución:

$$\frac{a(1+a^2)+a(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}=\frac{a+a^3+a-a^3}{1-a^4}=\frac{2a}{1-a^4}$$

12.- $\frac{2}{a^2-ab}+\frac{2}{ab+b^2}=$

Solución:

$$\frac{2}{a(a-b)}+\frac{2}{b(a+b)}=\frac{2(b)(a+b)+2(a)(a-b)}{ab(a^2-b^2)}=$$
$$=\frac{2ab+2b^2+2a^2-2ab}{ab(a^2-b^2)}=\frac{2(a^2+b^2)}{ab(a^2-b^2)}$$

13.- $\frac{ab}{9a^2-b^2}+\frac{a}{3a+b}=$

Solución:

$$\frac{ab}{(3a+b)(3a-b)}+\frac{a}{3a+b}=\frac{ab+a(3a-b)}{9a^2-b^2}=\frac{ab+3a^2-ab}{9a^2-b^2}=\frac{3a^2}{9a^2-b^2}$$

14.- $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{(a+b)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)^2}=\frac{2a}{(a+b)(a-b)^2}$$

15.- $\frac{3}{x^2+y^2}+\frac{2}{(x+y)^2}=$

Solución:

$$\frac{3(x+y)^2+2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)^2}=\frac{3(x^2+2xy+y^2)+2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)(x+y)^2}=$$

$$=\frac{3x^2+6xy+3y^2+2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)(x+y)^2}=\frac{5x^2+6xy+5y^2}{(x^2+y^2)(x+y)^2}$$

16.- $\frac{x}{a^2-ax}+\frac{a+x}{ax}+\frac{a}{ax-x^2}=$

Solución:

$$\frac{x}{a(a-x)}+\frac{a+x}{ax}+\frac{a}{x(a-x)}=\frac{x^2+(a+x)(a-x)+a^2}{ax(a-x)}=$$

$$=\frac{x^2+a^2-x^2+a^2}{ax(a-x)}=\frac{2a^2}{ax(a-x)}=\frac{2a}{x(a-x)}$$

17.- $\frac{3}{2x+4}+\frac{x-1}{2x-4}+\frac{x+8}{x^2-4}=$

Solución:

$$\frac{3}{2(x+2)}+\frac{x-1}{2(x-2)}+\frac{x+8}{(x+2)(x-2)}=\frac{3(x-2)+(x-1)(x+2)+2(x+8)}{2(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{3x-6+x^2+2x-x-2+2x+16}{2(x^2-4)}=\frac{x^2+6x+8}{2(x^2-4)}=$$

$$=\frac{(x+2)(x+4)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{x+4}{2(x-2)}$$

18.- $\frac{1}{x+x^2}+\frac{1}{x-x^2}+\frac{x+3}{1-x^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{x(1+x)}+\frac{1}{x(1-x)}+\frac{x+3}{(1+x)(1-x)}=\frac{(1-x)+(1+x)+x(x+3)}{x(1-x^2)}=$$

$$=\frac{2+x^2+3x}{x(1+x)(1-x)}=\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x)(1-x)}=\frac{x+2}{x(1-x)}$$

19.- $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}+\frac{4xy}{x^2-y^2}=$

Solución:

$$\frac{(x-y)^2+(x+y)^2+4xy}{x^2-y^2}=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2+4xy}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2+4xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(x^2+y^2+2xy)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(x+y)}{(x-y)}$$

20.- $\frac{1}{a-5}+\frac{a}{a^2-4a-5}+\frac{a+5}{a^2+2a+1}=$

Solución:

$$\frac{1}{a-5}+\frac{a}{(a+1)(a-5)}+\frac{a+5}{(a+1)^2}=\frac{(a+1)^2+a(a+1)+(a+5)(a-5)}{(a-5)(a+1)^2}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1+a^2+a+a^2-25}{(a-5)(a+1)^2}=\frac{3a^2+3a-24}{(a-5)(a+1)^2}$$

21.- $\frac{3}{a}+\frac{2}{5a-3}+\frac{1-85a}{25a^2-9}=$

Solución:

$$\frac{3\left(25a^2-9\right)+(a)(5a+3)(2)+a(1-85a)}{a\left(25a^2-9\right)}=\frac{75a^2-27+10a^2+6a+a-85a^2}{a\left(25a^2-9\right)}=$$

$$=\frac{7a-27}{a\left(25a^2-9\right)}$$

22.- $\frac{x+1}{10}+\frac{x-3}{5x-10}+\frac{x-2}{2}=$

Solución:

$$\frac{x+1}{10}+\frac{x-3}{5(x-2)}+\frac{x-2}{2}=\frac{(x+1)(x-2)+(2)(x-3)+5(x-2)^2}{10(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2-x-2+2x-6+5x^2-20x+20}{10(x-2)}=\frac{6x^2-19x+12}{10(x-2)}$$

23.- $\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=$

Solución:

$$\frac{(x+5)}{(x+4)(x-3)}+\frac{(x+4)}{(x+5)(x-3)}+\frac{(x-3)}{(x+4)(x+5)}=\frac{(x+5)^2+(x+4)^2+(x-3)^2}{(x-3)(x+4)(x+5)}=$$

$$=\frac{(x+5)^2+(x+4)^2+(x-3)^2}{(x-3)(x+4)(x+5)}=\frac{x^2+10x+25+x^2+8x+16+x^2-6x+9}{(x-3)(x+4)(x+5)}=$$

$$=\frac{3x^2+12x+50}{(x-3)(x+4)(x+5)}$$

24.- $\frac{1}{x-2}+\frac{1-2x^2}{x^3-8}+\frac{x}{x^2+2x+4}=$

Solución:

Recordar que $\frac{b^3+a^3}{b+a}=b^2-ab+a^2;\frac{b^3-a^3}{b-a}=b^2+ab+a^2$

$$\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4 \Rightarrow \left(x^3-8\right)=\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)$$

Luego:

$$\frac{\left(x^2+2x+4\right)+\left(1-2x^2\right)+x\left(x-2\right)}{x^3-8}=\frac{5}{x^3-8}$$

25.- $\frac{2}{\left(a+1\right)}+\frac{a}{\left(a+1\right)^2}+\frac{a+1}{\left(a+1\right)^3}=$

Solución:

$$\frac{2\left(a+1\right)^2+a\left(a+1\right)+\left(a+1\right)}{\left(a+1\right)^3}=\frac{2\left(a^2+2a+1\right)+a^2+a+a+1}{\left(a+1\right)^3}=$$

$$=\frac{2a^2+4a+2+a^2+a+a+1}{\left(a+1\right)^3}=\frac{3a^2+6a+3}{\left(a+1\right)^3}=\frac{3\left(a^2+2a+1\right)}{\left(a+1\right)^3}=$$

$$=\frac{3\left(a+1\right)^2}{\left(a+1\right)^3}=\frac{3}{a+1}$$

26.- $\frac{2x}{3x^2+11x+6}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3x+2}=$

Solución:

Empezaremos por factorizar la siguiente expresión:

$$3x^2+11x+6 \Rightarrow \frac{3\times\left(3x^2+11x+6\right)}{3}=\frac{9x^2+11\left(3x\right)+18}{3}=$$

$$=\frac{\left(3x\right)^2+11\left(3x\right)+18}{3}=\frac{\left(3x+2\right)\left(3x+9\right)}{3}$$

Luego:

$$\frac{2x}{\frac{\left(3x+2\right)\left(3x+9\right)}{3}}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3x+2}=\frac{6x}{3\left(3x+2\right)\left(x+3\right)}+\frac{x+1}{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}+\frac{1}{3x+2}=$$

$$=\frac{2x}{\left(3x+2\right)\left(x+3\right)}+\frac{x+1}{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}+\frac{1}{\left(3x+2\right)}=\frac{2x\left(x-3\right)+\left(x+1\right)\left(3x+2\right)+\left(x^2-9\right)}{\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-3\right)}=$$

$$=\frac{2x^2-6x+3x^2+2x+3x+2+x^2-9}{\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-3\right)}=\frac{6x^2-x-7}{\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-3\right)}$$

27.- $\frac{x^2-4}{x^3+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x^2-x+1}=$

Solución:

Recordar que $\frac{b^3+a^3}{b+a}=b^2-ab+a^2;\frac{b^3-a^3}{b-a}=b^2+ab+a^2$

Luego:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$; entonces:

$$\frac{x^2-4+(x^2-x+1)+3(x+1)}{x^3+1}=\frac{x^2-4+x^2-x+1+3x+3}{x^3+1}=$$
$$=\frac{2x^2+2x}{x^3+1}=\frac{2x(x+1)}{x^3+1}=\frac{2x}{x^2-x+1}$$

28.- $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x+2)}+\frac{(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$

Solución:

$$\frac{(x+2)(x+3)+(x+3)+(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2+5x+6+x+3+x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$$
$$=\frac{x^2+7x+10}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{(x+2)(x+5)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{(x+5)}{(x-1)(x+3)}$$

29.- $\frac{x-2}{2x^2-5x-3}+\frac{x-3}{2x^2-3x-2}+\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=$

Solución:

Empezaremos por factorizar cada uno de los denominadores:

(a).-

$$2x^2-5x-3\Rightarrow\frac{2(2x^2-5x-3)}{2}\Rightarrow\frac{(2x)^2-5(2x)-6}{2}=$$
$$=\frac{(2x+1)(2x-6)}{2}=\frac{(2x+1)2(x-3)}{2}=(2x+1)(x-3)$$

(b).-

$$2x^2-3x-2 \Rightarrow \frac{2\left(2x^2-3x-2\right)}{2}=\frac{\left(2x\right)^2-3\left(2x\right)-4}{2}=$$

$$=\frac{\left(2x+1\right)\left(2x-4\right)}{2}=\left(2x+1\right)\left(x-2\right)$$

©.-

$$x^2-5x+6=\left(x-2\right)\left(x-3\right)$$

Luego, se puede escribir la expresión original como:

$$\frac{x-2}{\left(2x+1\right)\left(x-3\right)}+\frac{x-3}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)}+\frac{2x-1}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=\frac{\left(x-2\right)^2+\left(x-3\right)^2+\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=$$

$$=\frac{x^2-4x+4+x^2-6x+9+4x^2-1}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=\frac{6x^2-10x+12}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}$$

30.- $\frac{a-2}{a-1}+\frac{a+3}{a+2}+\frac{a+1}{a-3}=$

Solución:

$$\frac{\left(a-2\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)+\left(a-1\right)\left(a+3\right)\left(a-3\right)+\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a+2\right)}{\left(a-1\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^2-4\right)\left(a-3\right)+\left(a-1\right)\left(a^2-9\right)+\left(a^2-1\right)\left(a+2\right)}{\left(a-1\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)}=$$

$$=\frac{a^3-3a^2-4a+12+a^3-9a-a^2+9+a^3+2a^2-a-2}{\left(a-1\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)}=$$

$$=\frac{3a^3-2a^2-14a+19}{\left(a-1\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 48.
Tema: Operaciones con fracciones. Resta. (Baldor).
Fecha: ___________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 128. Restar y simplificar:

1.- $\frac{x-3}{4}-\frac{x+2}{8}=$

Solución:

$$\frac{(2)(x-3)-(x+2)}{8}=\frac{2x-6-x-2}{8}=\frac{x-8}{8}$$

2.- $\frac{a+5b}{a^2}-\frac{b-3}{ab}=$

Solución:

$$\frac{(b)(a+5b)-(a)(b-3)}{a^2b}=\frac{ab+5b^2-ab+3a}{a^2b}=\frac{5b^2+3a}{a^2b}$$

3.- $\frac{2}{3mn^2}-\frac{1}{2m^2n}=$

Solución:

$$\frac{(2)(2m)-(3n)}{6m^2n^2}=\frac{4m-3n}{6m^2n^2}$$

4.- $\frac{a-3}{5ab}-\frac{4-3ab^2}{3a^2b^3}=$

Solución:

$$\frac{(3ab^2)(a-3)-(5)(4-3ab^2)}{15a^2b^3}=\frac{3a^2b^2-9ab^2-20+15ab^2}{15a^2b^3}=$$

$$=\frac{3a^2b^2+6ab^2-20}{15a^2b^3}$$

5.- $\frac{2a+3}{4a}-\frac{a-2}{8a}=$

Solución:

$$\frac{(2)(2a+3)-(a-2)}{8a}=\frac{4a+6-a+2}{8a}=\frac{3a+8}{8a}$$

6.- $\frac{y-2x}{20x}-\frac{x-3y}{24y}=$

Solución:

$$\frac{(6y)(y-2x)-(5x)(x-3y)}{120xy}=\frac{6y^2-12xy-5x^2+15xy}{120xy}=$$

$$=\frac{6y^2+3xy-5x^2}{120xy}$$

7.- $\frac{x-1}{8}-\frac{x-2}{4}-\frac{x+3}{6}=$

Solución:

$$\frac{(8)(x-1)-(6)(x-2)-(4)(x+3)}{24}=\frac{8x-8-6x+12-4x-12}{24}=$$

$$=\frac{-2x-8}{24}=-\frac{x+4}{12}$$

8.- $\frac{3}{5}-\frac{2a+1}{10a}-\frac{4a^2+1}{20a^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(4a^2\right)(3)-(2a)(2a+1)-\left(4a^2+1\right)}{20a^2}=\frac{12a^2-4a^2-2a-4a^2-1}{20a^2}=$$
$$=\frac{4a^2-2a-1}{20a^2}$$

9.- $\frac{3}{5x}-\frac{x-1}{3x^2}-\frac{x^2+2x+3}{15x^3}=$

Solución:

$$\frac{\left(3x^2\right)(3)-(5x)(x-1)-\left(x^2+2x+3\right)}{15x^3}=\frac{9x^2-5x^2+5x-x^2-2x-3}{15x^3}=$$
$$=\frac{3x^2+3x-3}{15x^3}=\frac{3\left(x^2+x-1\right)}{15x^3}=\frac{x^2+x-1}{5x^3}$$

10.- $\frac{1}{2a}-\frac{2+b}{3ab}-\frac{5}{6a^2b^3}=$

Solución:

$$\frac{\left(3ab^3\right)-\left(2ab^2\right)(2+b)-5}{6a^2b^3}=\frac{3ab^3-4ab^2-2ab^3-5}{6a^2b^3}=\frac{ab^3-4ab^2-5}{6a^2b^3}$$

Resta de fracciones con denominador compuesto. Ejercicio 129.

1.- $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=$

Solución:

$$\frac{(x-3)-(x-4)}{(x-3)(x-4)}=\frac{x-3-x+4}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

2.- $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}=$

Solución:

$$\frac{(m-n)^2-(m+n^2)}{(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-2mn+n^2-m^2-2mn-n^2}{m^2-n^2}=$$
$$=\frac{-4mn}{m^2-n^2}=\frac{4mn}{n^2-m^2}$$

3.- $\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}=$

Solución:

$$\frac{(1-x)^2-(1+x)^2}{1-x^2}=\frac{1-2x+x^2-1-2x-x^2}{1-x^2}=\frac{-4x}{1-x^2}=\frac{4x}{x^2-1}$$

4.- $\frac{a+b}{a^2+ab}-\frac{b-a}{ab+b^2}=$

Solución:

$$\frac{a+b}{a(a+b)}-\frac{b-a}{b(a+b)}=\frac{1}{a}+\frac{a-b}{b(a+b)}=\frac{b(a+b)+a(a-b)}{ab(a+b)}=$$
$$=\frac{ab+b^2+a^2-ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$$

5.- $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=$

Solución:

$$\frac{(m+n)(m+n)-(m^2+n^2)}{m^2-n^2}=\frac{(m+n)^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=\frac{m^2+2mn+n^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=$$
$$=\frac{2mn}{m^2-n^2}$$

6.- $\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}=$

Solución:

$$\frac{\left(x-x^2\right)-\left(x+x^2\right)}{\left(x+x^2\right)\left(x-x^2\right)}=\frac{x-x^2-x-x^2}{x^2-x^4}=\frac{-2x^2}{x^2\left(1-x^2\right)}=\frac{2}{x^2-1}$$

7.- $\frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{a^2-x^2}=$

Solución:

$$\frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{(a+x)(a-x)}=\frac{(a+x)^2-x(a-x)}{(a-x)^2(a+x)}=\frac{a^2+2ax+x^2-ax+x^2}{(a-x)^2(a+x)}=$$

$$=\frac{2x^2+a^2+ax}{(a-x)^2(a+x)}$$

8.- $\frac{a+1}{6a+3}-\frac{1}{12a+6}=$

Solución:

$$\frac{a+1}{3(2a+1)}-\frac{1}{6(2a+1)}=\frac{2(a+1)-1}{6(2a+1)}=\frac{2a+2-1}{6(2a+1)}=\frac{2a+1}{6(2a+1)}=\frac{1}{6}$$

9.- $\frac{a-4}{a^2-6a+9}-\frac{a+3}{a^2+a-12}=$

Solución:

$$\frac{a-4}{(a-3)^2}-\frac{a+3}{(a+4)(a-3)}=\frac{(a-4)(a+4)-(a+3)(a-3)}{(a-3)^2(a+4)}=$$

$$=\frac{a^2-16-a^2+9}{(a-3)^2(a+4)}=\frac{7}{(a-3)^2(a+4)}$$

10.- $\frac{a^2+4ab-3b^2}{a^2-9b^2}-\frac{b}{a+3b}=$

Solución:

$$\frac{a^2+4ab-3b^2}{a^2-9b^2}-\frac{b}{a+3b}=\frac{a^2+4ab-3b^2}{(a+3b)(a-3b)}-\frac{b}{(a+3b)}=$$

$$=\frac{a^2+4ab-3b^2-b(a-3b)}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{a^2+4ab-3b^2-ab+3b^2}{a^2-9b^2}=$$

$$=\frac{a^2+3ab}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{a(a+3b)}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{a}{a-3b}$$

11.- $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=$

Solución:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2-x-x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)^2}=$$
$$=\frac{-3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=-\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2}$$

12.- $\dfrac{1}{a^3-b^3}-\dfrac{1}{(a-b)^3}=$

Solución:

$$\frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{1}{(a-b)^3}=\frac{(a-b)^2-(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)(a-b)^3}=$$
$$=\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-ab-b^2}{(a^2+ab+b^2)(a-b)^3}=-\frac{3ab}{(a^2+ab+b^2)(a-b)^3}$$

13.- $\dfrac{x+3}{6x^2+x-2}-\dfrac{1}{4x^2-4x+1}=$

Solución:

En primer lugar se factorizarán los denominadores:

(a).- $$6x^2+x-2=\frac{6(6x^2+x-2)}{6}=\frac{(6x)^2+(6x)-12}{6}=$$
$$=\frac{(6x+4)(6x-3)}{2\times 3}=(3x+2)(2x-1).$$

(b).- $$4x^2-4x+1=\frac{4(4x^2-4x+1)}{4}=\frac{16x^2-16x+4}{4}=\frac{(4x-2)^2}{4}=(2x-1)^2$$

Luego:

$$\frac{x+3}{(3x+2)(2x-1)}-\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{(x+3)(2x-1)-(3x+2)}{(3x+2)(2x-1)^2}=$$
$$=\frac{2x^2-x+6x-3-3x-2}{(3x+2)(2x-1)^2}=\frac{2x^2+2x-5}{(3x+2)(2x-1)^2}$$

14.- $\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}=$

Solución:

$$\frac{x-1}{4(x+1)}-\frac{x+2}{8(x-1)}=\frac{2(x-1)^2-(x+2)(x+1)}{8(x^2-1)}=\frac{2(x^2-2x+1)-(x^2+3x+2)}{8(x^2-1)}=$$
$$=\frac{2x^2-4x+2-x^2-3x-2}{8(x^2-1)}=\frac{x^2-7x}{8(x^2-1)}$$

15.- $\frac{x}{xy-y^2}-\frac{1}{y}=$

Solución:

$$\frac{x}{y(x-y)}-\frac{1}{y}=\frac{x-(x-y)}{y(x-y)}=\frac{x-x+y}{y(x-y)}=\frac{y}{y(x-y)}=\frac{1}{(x-y)}$$

16.- $\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2+ab}=$

Solución:

$$\frac{b}{(a+b)(a-b)}-\frac{b}{a(a+b)}=\frac{ab-b(a-b)}{a(a+b)(a-b)}=\frac{ab-ab+b^2}{a(a^2-b^2)}=$$
$$=\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$$

17.- $\frac{2a-3}{6a+9}-\frac{a-1}{4a^2+12a+9}=$

Solución: Se comienza factorizando los denominadores:

(a).- $6a+9=3(2a+3)$

(b).- $4a^2+12a+9=(2a+3)^2$

Luego:

$$\frac{2a-3}{3(2a+3)}-\frac{a-1}{(2a+3)^2}=\frac{(2a-3)(2a+3)-(a-1)(3)}{3(2a+3)^2}=$$

$$=\frac{4a^2-9-3a+3}{3(2a+3)^2}=\frac{4a^2-3a-6}{3(2a+3)^2}$$

18.- $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=$

Solución:

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^3-x^2+x+x^2-x+1-x^3-x^2-x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

19.- $\dfrac{a-1}{a^2+a}-\dfrac{1}{2a-2}-\dfrac{1}{2a+2}=$

Solución:

$$\frac{a-1}{a(a+1)}-\frac{1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a+1)}=\frac{2(a-1)\ \ -a(a+1)-a(a-1)}{2a(a^2-1)}=$$

$$=\frac{2(a^2-2a+1)-a^2-a-a^2+a}{2a(a^2-1)}=\frac{-4a+2}{2a(a^2-1)}=\frac{-2a+1}{a(a^2-1)}=\frac{1-2a}{a(1-a^2)}$$

20.- $\dfrac{1}{4a+4}-\dfrac{1}{8a-8}-\dfrac{1}{12a^2+12}=$

Solución:

$$\frac{1}{4(a+1)}-\frac{1}{8(a-1)}-\frac{1}{12(a^2+1)}=\frac{6(a-1)(a^2+1)-3(a+1)(a^2+1)-2(a^2-1)}{24(a^2-1)(a^2+1)}=$$

$$=\frac{6a^3+6a-6a^2-6-3a^3-3a-3a^2-3-2a^2+2}{24(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{3a^3-11a^2+3a-7}{24(a^4-1)}$$

21.- $\dfrac{y}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-y}=$

Solución:

$$\frac{y}{x(x-y)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-y}=\frac{y-(x-y)-x}{x(x-y)}=\frac{2y-2x}{x(x-y)}=\frac{(-2)(x-y)}{x(x-y)}=-\frac{2}{x}$$

22.- $\dfrac{a}{a^2+ab}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}=$

Solución:

$$\frac{a}{a(a+b)}-\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+b)}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}=-\frac{1}{a}$$

23.- $\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{2y}{x^3-xy^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{x(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}-\frac{2y}{x\left(x^2-y^2\right)}=\frac{(x+y)-(x-y)-2y}{x\left(x^2-y^2\right)}=$$

$$=\frac{0}{x\left(x^2-y^2\right)}=0$$

24.- $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{3}{x^2+2x-3}-\dfrac{x}{x^2+5x+6}=$

Solución:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}-\frac{3}{(x-1)(x+3)}-\frac{x}{(x+2)(x+3)}=\frac{x(x+3)-3(x+2)-x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{x^2+3x-3x-6-x^2+x}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{x-6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

25.- $\dfrac{3}{x^2+x+1}-\dfrac{x+2}{(x-1)^2}-\dfrac{1-9x}{\left(x^3-1\right)(x-1)}=$

Solución:

Recordar que $\dfrac{b^3-a^3}{b-a}=b^2+ab+a^2 \Rightarrow \dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1 \Rightarrow x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Luego:

$$\frac{3}{x^2+x+1}-\frac{x+2}{(x-1)^2}-\frac{1-9x}{(x^2+x+1)(x-1)^2}=$$

$$\frac{3(x-1)^2-(x+2)(x^2+x+1)-(1-9x)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3(x^2-2x+1)-x^3-x^2-x-2x^2-2x-2-1+9x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{3x^2-6x+3-x^3-x^2-x-2x^2-2x-2-1+9x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{-x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

26.- $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{1}{2a-2b}=$

Solución:

Recordar que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Luego:

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{(a+b)}{2(a^2+ab+b^2)}-\frac{1}{2(a-b)}=$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+ab+b^2)}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}=$$

$$=\frac{2a^2+2b^2-a^2+b^2-a^2-ab-b^2}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{2b^2-ab}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{2b^2-ab}{2(a^3-b^3)}$$

27.- $\dfrac{3a}{2a^2-2a-4}-\dfrac{a-1}{4a^2+8a-32}-\dfrac{10a-1}{8a^2+40a+32}=$

Solución:

$$\frac{3a}{2(a^2-a-2)}-\frac{a-1}{4(a^2+2a-8)}-\frac{10a-1}{8(a^2+5a+4)}=$$

$$=\frac{3a}{2(a-2)(a+1)}-\frac{(a-1)}{4(a-2)(a+4)}-\frac{(10a-1)}{8(a+1)(a+4)}=$$

$$=\frac{(3a)(4)(a+4)-(2)(a-1)(a+1)-(a-2)(10a-1)}{8(a-2)(a+1)(a+4)}=$$

$$=\frac{12a^2+48a-2a^2+2-10a^2+a+20a-2}{8(a-2)(a+1)(a+4)}=\frac{69a}{8(a-2)(a+1)(a+4)}$$

28.-

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 49.

Tema: Operaciones con fracciones. Suma y Resta Combinadas. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 130. Simplificar:

1.- $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=$

Solución:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{(x-3)(x+2)}=\frac{2(x+2)+3(x-3)-4x+7}{(x-3)(x+2)}=$$

$$=\frac{2x+4+3x-9-4x+7}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+2}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{(x-3)}$$

2.- $\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=$

Solución:

$$\frac{a}{3(a+2)}-\frac{1}{6(a+2)}+\frac{a+12}{12(a+2)}=\frac{a(4)-2+a+12}{12(a+2)}=$$

$$=\frac{5a+10}{12(a+2)}=\frac{5(a+2)}{12(a+2)}=\frac{5}{12}$$

3.- $\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2}=$

Solución:

$$\frac{(3x^2)(x)+x(x^2+1)-3(x^2+1)}{3x^2(x^2+1)}=\frac{3x^3+x^3+x-3x^2-3}{3x^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{4x^3-3x^2+x-3}{3x^2(x^2+1)}$$

4.- $\frac{a+3}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a-4}{4a-4}=$

Solución:

$$\frac{a+3}{(a+1)(a-1)}+\frac{a-1}{2(a+1)}+\frac{a-4}{4(a-1)}=\frac{4(a+3)+2(a-1)^2+(a+1)(a-4)}{4(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{4a+12+2a^2-4a+2+a^2-4a+a-4}{4(a-1)(a+1)}=\frac{3a^2-3a+10}{4(a^2-1)}$$

5.- $\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2}=$

Solución:

$$\frac{a-b}{a(a+b)}+\frac{(a+b)}{ab}-\frac{a}{b(a+b)}=\frac{b(a-b)+(a+b)^2-a^2}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{ab-b^2+a^2+2ab+b^2-a^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab}{ab(a+b)}=\frac{3}{(a+b)}$$

6.- $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2}=$

Solución:

$$\frac{(x-y)^2-(x+y)^2+4x^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2+4x^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{4x^2-4xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{4x(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{4x}{x+y}$$

7.- $\frac{x}{a^2-ax}+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=$

Solución:

$$\frac{x}{a(a-x)}+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x(a-x)+a(a-x)}{ax(a-x)}=$$

$$=\frac{x^2+ax-x^2+a^2-ax}{ax(a-x)}=\frac{a^2}{ax(a-x)}=\frac{a}{x(a-x)}$$

8.- $\frac{x+1}{x^2-x-20}-\frac{x+4}{x^2-4x-5}+\frac{x+5}{x^2+5x+4}=$

Solución:

$$\frac{x+1}{(x+4)(x-5)}-\frac{x+4}{(x+1)(x-5)}+\frac{x+5}{(x+1)(x+4)}=$$

$$=\frac{(x+1)^2-(x+4)^2+(x^2-25)}{(x+1)(x+4)(x-5)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-8x-16+x^2-25}{(x+1)(x+4)(x-5)}=$$

$$=\frac{x^2-6x-40}{(x+1)(x+4)(x-5)}=\frac{(x+4)(x-10)}{(x+1)(x+4)(x-5)}=\frac{x-10}{(x+1)(x-5)}$$

9.- $\frac{2x+1}{12x+8}-\frac{x^2}{6x^2+x-2}+\frac{2x}{16x-8}=$

Solución:

Se debe empezar por factorizar la expresión: $6x^2+x-2$:

$$\frac{6(6x^2+x-2)}{6}=\frac{(6x)^2+(6x)-12}{6}=\frac{(6x-3)(6x+4)}{6}=(2x-1)(3x+2)$$

Luego:

$$\frac{(2x+1)}{4(3x+2)}-\frac{x^2}{(2x-1)(3x+2)}+\frac{2x}{8(2x-1)}=\frac{2(4x^2-1)-8x^2+2x(3x+2)}{8(2x-1)(3x+2)}=$$
$$=\frac{8x^2-2-8x^2+6x^2+4x}{8(2x-1)(3x+2)}=\frac{6x^2+4x-2}{8(2x-1)(3x+2)}=\frac{3x^2+2x-1}{4(2x-1)(3x+2)}$$

10.- $\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x}=$

Solución:

$$\frac{1}{ax}-\frac{1}{a(a+x)}+\frac{1}{(a+x)}=\frac{(a+x)-x+ax}{ax(a+x)}=\frac{a+ax}{ax(a+x)}=$$
$$=\frac{a(1+x)}{ax(a+x)}=\frac{1+x}{x(a+x)}$$

11.- $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2+y^2}=$

Solución:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2\Rightarrow(x^2-y^2)(x^2+y^2)=x^4-y^4$$

$$\frac{(x-y)(x^2+y^2)-(x+y)(x^2+y^2)+2y(x^2-y^2)}{x^4-y^4}=$$
$$=\frac{(x^2+y^2)(-2y)+2y(x^2-y^2)}{x^4-y^4}=\frac{-4y^3}{x^4-y^4}=\frac{4y^3}{y^4-x^4}$$

12.- $\frac{a-1}{3a+3}-\frac{a-2}{6a-6}+\frac{a^2+2a-6}{9a^2-9}=$

Solución:

Ver página siguiente

$$\frac{a-1}{3(a+1)}-\frac{a-2}{6(a-1)}+\frac{a^2+2a-6}{9(a+1)(a-1)}=\frac{6(a-1)^2-3(a-2)(a+1)+2(a^2+2a-6)}{18(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{6(a^2-2a+1)-3(a^2-a-2)+2(a^2+2a-6)}{18(a+1)(a-1)}=\frac{6a^2-12a+6-3a^2+3a+6+2a^2+4a-12}{}=$$

$$=\frac{5a^2-5a}{18(a+1)(a-1)}=\frac{5a(a-1)}{18(a+1)(a-1)}=\frac{5a}{18(a+1)}$$

13.- $\frac{1}{a^2+2a-4}+\frac{2}{a^2-2a-8}-\frac{3}{a^2+8a+12}=$

Solución:

$$\frac{1}{(a-4)(a+6)}+\frac{2}{(a-4)(a+2)}-\frac{3}{(a+2)(a+6)}=\frac{(a+2)+2(a+6)-3(a-4)}{(a-4)(a+2)(a+6)}=$$

$$=\frac{a+2+2a+12-3a+12}{(a-4)(a+2)(a+6)}=\frac{26}{(a-4)(a+2)(a+6)}$$

14.- $\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{xy+y^2}+\frac{y}{x^2+xy}=$

Solución:

$$\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{xy+y^2}-\frac{y}{x^2+xy}=\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{y(x+y)}-\frac{y}{x(x+y)}=$$

$$=\frac{(x+y)^2-x(x+2y)-y(y)}{xy(x+y)}=\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{xy(x+y)}=$$

$$=\frac{0}{xy(x=y)}=0$$

15.- $\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a+3}{a^2-a+1}-\frac{a-1}{a+1}=$

Solución:

Recordar que $x^3-y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\Rightarrow a^3+1=(a+1)(a^2-x+1)$

$$\frac{a^3+(a+3)(a+1)-(a-1)(a^2-a+1)}{a^3+1}=\frac{a^3+a^2+4a+3-a^3+a^2-a+a^2-a+1}{a^3+1}=$$

$$=\frac{3a^2+2a+4}{a^3+1}$$

16.- $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{3x^2}{x^3-1}=$

Solución:

Recordar que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Luego:

$$\frac{(x+1)(x^2+x+1)+2x(x^2+x+1)-(3x^2)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2+x+x^2+x+1+2x^3+2x^2+2x-3x^3-3x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x^3-1)}$$

17.- $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{3a^2}{a^3+b^3}=$

Solución:

Recordar que $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Luego:

$$\frac{(a+b)}{(a^2-ab+b^2)}-\frac{1}{(a+b)}+\frac{3a^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)+3a^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2+3a^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{3a^2+3ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{3a(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{3a}{(a^2-ab+b^2)}$$

18.- $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2x+3}{x^2+2x+4}-\dfrac{6x+12}{x^3-8}=$

Solución:

$x^3-8=x^3-(2)^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

Luego:

Ver página siguiente:

$$\frac{(2)\left(x^2+2x+4\right)+(2x+3)(x-2)-6x-12}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2x^2+4x+8+2x^2-4x+3x-6-6x-12}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=\frac{4x^2-3x-10}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}\Rightarrow\{\frac{4\left(4x^2-3x-10\right)}{4}=\frac{(4x)^2-3(4x)-40}{4}=\frac{(4x+5)(4x-8)}{4}=(4x+5)(x-2)\}\Rightarrow$$

$$\frac{4x^2-3x-10}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{(4x+5)(x-2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{4x+5}{x^2+2x+4}$$

19.- $\frac{3x+2}{x^2+3x-10}-\frac{5x+1}{x^2+4x-5}+\frac{4x-1}{x^2=3x+2}=$

Solución:

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+5)}-\frac{5x+1}{(x-1)(x+5)}+\frac{4x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(3x+2)(x-1)-(5x+1)(x-2)+(4x-1)(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+5)}=$$

$$=\frac{3x^2-3x+2x-2-5x^2+10x-x+2+4x^2+20x-x-5}{(x-1)(x-2)(x+5)}=\frac{2x^2+27x-5}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

20.- $\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{(n-1)^3}-\frac{1}{n}=$

Solución:

$$\frac{n(n-1)+n(n-1)^2-n-(n-1)^3}{n(n-1)^3}=\frac{n^2-n+n\left(n^2-2n+1\right)-n-\left(n^3-3n^2+3n-1\right)}{n(n-1)^3}=$$

$$=\frac{n^2-n+n^3-2n^2+n-n-n^3+3n^2-3n+1}{n(n-1)^3}=\frac{2n^2-4n+1}{n(n-1)^3}$$

21.- $\frac{1}{a^2+5}-\frac{a^2-5}{\left(a^2+5\right)^2}+\frac{a^2+5}{\left(a^4-25\right)}=$

Solución:

Ver página siguiente:

$$\frac{1}{a^2+5}-\frac{a^2-5}{\left(a^2+5\right)^2}+\frac{a^2+5}{\left(a^2+5\right)\left(a^2-5\right)}=\frac{1}{a^2+5}-\frac{a^2-5}{\left(a^2+5\right)^2}+\frac{1}{a^2-5}=$$

$$=\frac{\left(a^2+5\right)\left(a^2-5\right)-\left(a^2-5\right)^2+\left(a^2+5\right)^2}{\left(a^2+5\right)^2\left(a^2-5\right)}=\frac{a^4-25-a^4+10a^2-25+a^4+10a^2+25}{\left(a^2+5\right)^2\left(a^2-5\right)}=$$

$$=\frac{a^4+20a^2-25}{\left(a^2+5\right)^2\left(a^2-5\right)}$$

22.- $\frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2}=$

Solución:

$$\frac{1-x^2}{(3-x)(3+x)}-\frac{x^2}{(3+x)^2}-\frac{6x}{(3-x)^2}=\frac{\left(1-x^2\right)\left(9-x^2\right)-x^2(3-x)^2-6x(3+x)^2}{(3+x)^2(3-x)^2}=$$

$$=\frac{9-x^2-9x^2+x^4-x^2\left(9-6x+x^2\right)-6x\left(9+6x+x^2\right)}{(3+x)^2(3-x)^2}=\frac{9-10x^2+x^4-9x^2+6x^3-x^4-54x-36x^2-6x^3}{(3+x)^2(3-x)^2}=$$

$$=\frac{-55x^2-54x+9}{(3+x)^2(3-x)^2}$$

23.- $\frac{x}{2x+2}-\frac{x+1}{3x-3}+\frac{x-1}{6x+6}-\frac{5}{18x-18}=$

Solución:

$$\frac{x}{2(x+1)}-\frac{x+1}{3(x-1)}+\frac{x-1}{6(x+1)}-\frac{5}{18(x-1)}=\frac{9x(x-1)-6(x+1)^2+3(x-1)^2-5(x+1)}{18(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{9x^2-9x-6x^2-12x-6+3x^2-6x+3-5x-5}{18(x-1)(x+1)}=\frac{6x^2-32x-8}{18(x-1)(x+1)}=\frac{3x^2-16x-4}{9(x-1)(x+1)}$$

24.- $\frac{a+2}{2a+2}-\frac{7a}{8a^2-8}-\frac{a-3}{4a-4}=$

Solución:

$$\frac{a+2}{2(a+1)}-\frac{7a}{8\left(a^2-1\right)}-\frac{a-3}{4(a-1)}=\frac{4(a+2)(a-1)-7a-2(a-3)(a+1)}{8(a+1)(a-1)}=$$

$$\frac{4\left(a^2+a-2\right)-7a-2\left(a^2-2a-3\right)}{8\left(a-1\right)\left(a+1\right)}=\frac{4a^2+4a-8-7a-2a^2+4a+6}{8\left(a-1\right)\left(a-2\right)}=$$

$$=\frac{2a^2+a-2}{8\left(x^2-1\right)}$$

25.- $\frac{a-3}{20a+10}+\frac{2a+5}{40a+20}-\frac{4a-1}{60a+30}=$

Solución:

$$\frac{a-3}{10\left(2a+1\right)}+\frac{2a+5}{20\left(2a+1\right)}-\frac{4a-1}{30\left(2a+1\right)}=\frac{6\left(a-3\right)+3\left(2a+5\right)-\left(4a-1\right)}{60\left(2a+1\right)}=$$

$$=\frac{6a-18+6a+15-4a+1}{60\left(2a+1\right)}=\frac{8a-2}{60\left(2a+1\right)}=\frac{2\left(4a-1\right)}{60\left(2a+1\right)}=\frac{4a-1}{30\left(2a+1\right)}$$

26.- $\frac{2}{2x^2+5x+3}-\frac{1}{2x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}=$

Solución:

En primer lugar, se deben hacer las factorizaciones de cada uno de los denominadores:

(a).-

$$2x^2+5x+3=\frac{2\left(2x^2+5x+3\right)}{2}=\frac{\left(2x\right)^2+5\left(2x\right)+6}{2}=\frac{\left(2x+2\right)\left(2x+3\right)}{2}=$$

$$=\left(x+1\right)\left(2x+3\right)$$

(b).- $2x^2-x-6=\frac{2\left(2x^2-x-6\right)}{2}=\frac{\left(2x\right)^2-\left(2x\right)-12}{2}=\frac{\left(2x-4\right)\left(2x+3\right)}{2}=$

$=\left(x-2\right)\left(2x+3\right)$

©.- $x^2-x-2=\left(x-2\right)\left(x+1\right)$

Luego:

$$\frac{2}{(x+1)(2x+3)}-\frac{1}{(x-2)(2x+3)}+\frac{3}{(x-2)(x+1)}=\frac{2(x-2)-(x+1)+3(2x+3)}{(x-2)(x+1)(2x+3)}=$$

$$=\frac{2x-4-x-1+6x+9}{(x-2)(x+1)(2x+3)}=\frac{7x+4}{(x-2)(x+1)(2x+3)}$$

27.- $\frac{a-1}{a-2}-\frac{a-2}{a+3}+\frac{1}{a-1}=$

Solución:

$$\frac{(a-1)^2(a+3)-(a-2)^2(a-1)+(a-2)(a+3)}{(a-1)(a-2)(a+3)}=\frac{\left(a^2-2a+1\right)(a+3)-\left(a^2-4a+4\right)(a-1)+\left(a^2+a-6\right)}{(a-1)(a-2)(a+3)}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2-2a^2-6a+a+3-a^3+a^2+4a^2-4a-4a+4+a^2+a-6}{(a-1)(a-2)(a+3)}=\frac{7a^2-12a+1}{(a-1)(a-2)(a+3)}$$

28.- $\frac{2+3a}{2-3a}-\frac{2-3a}{2+3a}-\frac{a}{(2-3a)^2}=$

Solución:

$$\frac{(2+3a)^2(2-3a)-(2-3a)^3-a(2+3a)}{(2+3a)(2-3a)^2}=\frac{\left(4+12a+9a^2\right)(2-3a)-\left(8-36a+54a^2-27a^3\right)-2a-6a^2}{(2+3a)(2-3a)^2}=$$

$$=\frac{8+24a+18a^2-12a-36a^2-27a^3-8+36a-54a^2+27a^3-2a-6a^2}{(2+3a)(2-3a)^2}=$$

$$=\frac{a^2(18-36-54-6)+a(24-12+36-2)}{(2+3a)(2-3a)^2}=\frac{-78a^2+46a}{(2+3a)(2-3a)^2}$$

29.- $\frac{1}{5+5a}+\frac{1}{5-5a}-\frac{1}{10+10a^2}=$

Solución:

Ver la próxima página:

$$\frac{1}{5(1+a)}+\frac{1}{5(1-a)}-\frac{1}{10(1+a^2)}=\frac{2(1+a^2)(1-a)+2(1+a^2)(1+a)-(1-a^2)}{10(1+a^2)(1-a^2)}=$$

$$=\frac{2(1-a+a^2-a^3)+2(1+a+a^2+a^3)-(1+a^2)}{10(1-a^4)}=\frac{2-2a+2a^2-2a^3+2+2a+2a^2+2a^3-1+a^2}{10(1-a^4)}=$$

$$=\frac{5a^2+3}{10(1-a^4)}$$

30.- $\frac{1}{3-3x}-\frac{1}{3+3x}+\frac{x}{6x+6x^2}-\frac{x}{2-2x^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{3(1-x)}-\frac{1}{3(1+x)}+\frac{x}{6(1+x^2)}-\frac{x}{2(1-x^2)}=$$

$$\frac{2(1+x)(1+x^2)-2(1-x)(1+x^2)+x(1-x^2)-3x(1+x^2)}{6(1+x^2)(1-x^2)}=$$

$$=\frac{2(1+x^2+x+x^3)-2(1+x^2-x-x^3)+x-x^3-3x-3x^3}{6(1-x^2)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{2+2x^2+2x+2x^3-2-2x^2+2x+2x^3+x-x^3-3x-3x^3}{6(1-x^4)}=\frac{2x}{6(1-x^4)}=\frac{x}{3(1-x^4)}$$

Ejercicio 131. Cambios de signos en la suma y resta de fracciones.

1.- $\frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}=$

Solución:

$$\frac{1}{m-n}-\frac{m}{m^2-n^2}=\frac{(m+n)-m}{(m+n)(m-n)}=\frac{n}{m^2-n^2}$$

2.- $\frac{x^2}{x^2-xy}-\frac{2x}{y-x}=$

Solución:

$$\frac{x^2}{x(x-y)}+\frac{2x}{x-y}=\frac{x^2+2x^2}{x(x-y)}=\frac{3x^2}{x(x-y)}=\frac{3x}{(x-y)}$$

3.- $\dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=$

Solución:

$$\frac{1}{x(2-x)}-\frac{x}{4-x^2}=\frac{1}{x(2-x)}-\frac{x}{(2-x)(2+x)}=\frac{(2+x)-x^2}{x(2-x)(2+x)}=$$

$$\frac{(-1)(x^2-x-2)}{(-1)x(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x(x+2)}$$

4.- $\dfrac{a+3}{a^2-1}+\dfrac{a-1}{2a+2}+\dfrac{a-4}{4a-4}=$

Solución:

$$\frac{a+3}{(a+1)(a-1)}+\frac{a-1}{2(a+1)}+\frac{a-4}{4(a-1)}=\frac{4(a+3)+2(a-1)^2+(a-4)(a+1)}{4(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{4a+12+2a^2-4a+2+a^2-3a-4}{4(a+1)(a-1)}=\frac{3a^2-3a+10}{4(a+1)(a-1)}$$

5.- $\dfrac{x-4}{x^2-2x-3}-\dfrac{x}{6-2x}=$

Solución:

$$\frac{x-4}{(x-3)(x+1)}-\frac{x}{2(3-x)}=\frac{(x-4)}{(x-3)(x+1)}+\frac{x}{2(x-3)}=$$

$$=\frac{2(x-4)+x(x+1)}{2(x-3)(x+1)}=\frac{2x-8+x^2+x}{2(x-3)(x+1)}=\frac{x^2+3x-8}{2(x-3)(x+1)}$$

6.- $\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{(2-x)(x+3)}=$

Solución:

$$\frac{1}{(x+4)(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{(x+3)-(x+4)}{(x-2)(x+3)(x+4)}=$$

$$=\frac{-1}{(x-2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(2-x)(x+3)(x+4)}$$

7.- $\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{7}{4x-4}=$

Solución:

$$\frac{1}{2(1+x)}+\frac{2}{(1-x)}+\frac{7}{4(x-1)}=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{2}{(1-x)}-\frac{7}{4(1-x)}=$$

$$\frac{2(1-x)+8(1+x)-7(1+x)}{4(1+x)(1-x)}=\frac{2-2x+8+8x-7-7x}{4(1-x^2)}=\frac{3-x}{4(1-x^2)}=\frac{x-3}{4(x+1)(x-1)}$$

8.- $\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}+\frac{2a}{9-a^2}=$

Solución:

$$\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}+\frac{2a}{(3-a)(3+a)}=\frac{2a}{(a+3)}+\frac{3a}{(a-3)}-\frac{2a}{(a+3)(a-3)}=$$

$$=\frac{2a(a-3)+3a(a+3)-2a}{(a+3)(a-3)}=\frac{2a^2-6a+3a^2+9a-2a}{(a+3)(a-3)}=\frac{5a^2+a}{a^2-9}$$

9.- $\frac{x+3y}{y+x}+\frac{3y^2}{x^2-y^2}-\frac{x}{y-x}=$

Solución:

$$\frac{x+3y}{x+y}+\frac{3y^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x-y}=\frac{(x+3y)(x-y)+3y^2+x(x+y)}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{(x^2-xy+3xy-3y^2)+3y^2+x^2+xy}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+3xy}{x^2-y^2}$$

10.- $\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=$

Solución:

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)}-\frac{(x-3)}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)}=\frac{x(x+2)-(x-3)(x+3)+(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2+9+x^2+2x-3}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2+4x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

11.- $\frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=$

Solución:

$$\frac{3}{2(a+1)}-\frac{1}{4(a-1)}-\frac{4}{8(1-a)(a+1)}=\frac{3}{2(a+1)}-\frac{1}{4(a-1)}+\frac{1}{2(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{6(a-1)-(a+1)+2}{4(a-1)(a+1)}=\frac{6a-6-a-1+2}{4(a^2-1)}=\frac{5a-5}{4(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{5(a-1)}{4(a-1)(a+1)}=\frac{5}{4(a+1)}$$

12.- $\frac{1}{a-3}+\frac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\frac{2}{(2-a)(1-a)}=$

Solución:

$$\frac{1}{a-3}-\frac{(a+1)}{(a-3)(a-2)}+\frac{2}{(a-2)(a-1)}=\frac{(a-1)(a-2)-(a+1)(a-1)+2(a-3)}{(a-1)(a-2)(a-3)}=$$

$$=\frac{a^2-3a+2-a^2+1+2a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{-a-3}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{a+3}{(1-a)(a-2)(a-3)}$$

13.- $\frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=$

Solución:

$$\frac{2x}{x-1}-\frac{2x^3+2x^2}{x^3-1}+\frac{1}{x^2+x+1}=$$

Recordar que: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; entonces:

$$\frac{2x}{(x-1)}-\frac{2x^3+2x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{2x(x^2+x+1)-2x^3-2x^2+(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{3x-1}{x^3-1}$$

14.- $\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=$

Solución:

En primer lugar se deben factorizar las expresiones que así lo requieran:

(a).-

$$6x^2-11x+3=\frac{6(6x^2-11x+3)}{6}=\frac{(6x)^2-11(6x)+18}{6}=$$

$$=\frac{(6x-2)(6x-9)}{6}=(3x-1)(2x-3)$$

Entonces:

$$\frac{x+2}{3x-1}-\frac{x+1}{(2x-3)}+\frac{4x^2+6x+3}{(3x-1)(2x-3)}=\frac{(x+2)(2x-3)-(x+1)(3x-1)+4x^2+6x+3}{(3x-1)(2x-3)}=$$

$$=\frac{2x^2-3x+4x-6-3x^2+x-3x+1+4x^2+6x+3}{(3x-1)(2x-3)}=\frac{3x^2+5x-2}{(3x-1)(2x-3)}$$

Ahora:

$$3x^2+5x-2=\frac{3\left(3x^2+5x-2\right)}{3}=\frac{\left(3x\right)^2+5\left(3x\right)-6}{3}=$$

$$=\frac{\left(3x-1\right)\left(3x+6\right)}{3}=\left(3x-1\right)\left(x+2\right)$$

Luego, el resultado final será: $\frac{3x^2+5x-2}{\left(3x-1\right)\left(2x-3\right)}=\frac{\left(3x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(3x-1\right)\left(2x-3\right)}=\frac{x+2}{2x-3}$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 50.
Tema: Multiplicación de fracciones. (Baldor).
Fecha: ___________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 132. Simplificar:

1.- $\frac{2a^2}{3b}\times\frac{6b^2}{4a}=$

Solución:

$$\frac{12a^2b^2}{12ab}=ab$$

2.- $\frac{x^2y}{5}\times\frac{10a^3}{3m^2}\times\frac{9m}{x^3}=$

Solución:

$$\left(\frac{90}{15}\right)\times\left(\frac{x^2ya^3m}{m^2x^3}\right)=6\times\left(\frac{ya^3}{mx}\right)=\frac{6a^3y}{mx}$$

3.- $\frac{5x^2}{7y^3}\times\frac{4y^2}{7m^3}\times\frac{14m}{5x^4}=$

Solución:

$$\left(\frac{8}{7}\right)\times\left(\frac{x^2y^2m}{y^3m^3x^4}\right)=\left(\frac{8}{7}\right)\times\left(\frac{1}{ym^2x^2}\right)=\frac{8}{7m^2x^2y}$$

4.- $\frac{5}{a}\times\frac{2a}{b^2}\times\frac{3b}{10}=$

Solución:

$$\left(\frac{30}{10}\right)\times\left(\frac{ab}{ab^2}\right)=\frac{3}{b}$$

5.- $\frac{2x^3}{15a^3}\times\frac{3a^2}{y}\times\frac{5x^2}{7xy^3}=$

Solución:

$$\left(\frac{2}{7}\right)\times\left(\frac{x^3a^2x^2}{a^3yxy^2}\right)=\left(\frac{2}{7}\right)\times\frac{x^4}{ay^3}=\frac{2x^4}{7ay^3}$$

6.- $\left(\frac{7a}{6m^2}\right)\times\left(\frac{3m}{10n^2}\right)\times\left(\frac{5n^4}{14ax}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{1}{8}\right)\times\left(\frac{amn^4}{m^2n^2ax}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)\times\left(\frac{n^2}{mx}\right)=\frac{n^2}{8mx}$$

7.- $\left(\frac{2x^2+x}{6}\right)\times\left(\frac{8}{4x+2}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{8}{12}\right)\times\left(\frac{x(2x+1)}{(2x+1)}\right)=\frac{2x}{3}$$

8.- $\left(\frac{5x+25}{14}\right)\times\left(\frac{7x+7}{10x+50}\right)=$

Solución:

$$\frac{5(x+5)}{14}\times\frac{7(x+1)}{10(x+5)}=\left(\frac{1}{4}\right)\times\frac{(x+5)(x+1)}{(x+5)}=\frac{x+1}{4}$$

9.- $\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}=$

Solución:

$$\frac{m+n}{m^2-n^2}\times\frac{n^2}{n(m-n)}=\frac{n}{(m-n)^2}=\frac{n}{m^2-2mn+n^2}$$

10.- $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}=$

Solución:

$$\frac{y(x-2y)}{x(x+y)}\times\frac{(x+y)^2}{x(x-2y)}=\frac{y(x+y)}{x^2}=\frac{y^2+xy}{x^2}$$

11.- $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy}\times\frac{x^2}{x^2-4y^2}=$

Solución:

$$\frac{(x-2y)^2}{x(x+2y)}\times\frac{x^2}{(x+2y)(x-2y)}=\frac{x(x-2y)}{(x+2y)^2}=\frac{x^2-2xy}{x^2+4xy+4y^2}$$

12.- $\frac{2x^2+2x}{2x^2}\times\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}=$

Solución:

$$\frac{2x(x+1)}{2x^2}\times\frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

13.- $\frac{a^2-ab+a-b}{a^2+2a+1}\times\frac{3}{6a^2-6ab}=$

Solución:

$$\frac{a(a-b)+(a-b)}{a^2+2a+1}\times\frac{3}{6a(a-b)}=\frac{(a-b)(a+1)}{(a+1)^2}\times\frac{3}{6a(a-b)}=$$

$$=\frac{1}{2a(a+1)}=\frac{1}{2a^2+2a}$$

14.- $\frac{(x-y)^3}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{(x-y)^2}=$

Solución:

Recordar que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; luego:

$$\frac{(x-y)^3}{(x-y)^2}\times\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x-y)}{(x-1)}$$

15.- $\frac{2a-2}{2a^2-50}\times\frac{a^2-4a-5}{3a+3}=$

Solución:

$$\frac{2(a-1)}{2(a^2-25)}\times\frac{(a-5)(a+1)}{3(a+1)}=\frac{(a-1)}{(a+5)(a-5)}\times\frac{(a-5)}{3}=$$

$$=\frac{(a-1)}{3(a+5)}=\frac{a-1}{3a+15}$$

16.- $\frac{2x^2-3x-2}{6x+3}\times\frac{3x+6}{x^2-4}=$

Solución:

En primer lugar encontraremos las factorizaciones requeridas:

$$2x^2-3x-2=\frac{2(2x^2-3x-2)}{2}=\frac{(2x)^2-3(2x)-4}{2}=$$

$$=\frac{(2x+1)(2x-4)}{2}=(2x+1)(x-2)$$

Luego:

$$\frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}\times\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+2)}{(x+2)}=1$$

17.- $\frac{y^2+9y+18}{y-5}\times\frac{5y-25}{5y+15}=$

Solución:

$$\frac{(y+3)(y+6)}{y-5}\times\frac{5(y-5)}{5(y+3)}=(y+6)$$

18.- $\frac{x^3+2x^2-3x}{4x^2+8x+3}\times\frac{2x^2+3x}{x^2-x}=$

Solución:

$$\frac{x(x^2+2x^2-3)}{4x^2+8x+3}\times\frac{x(2x+3)}{x(x-1)}=$$

Factorizaciones:

(a).-

$$4x^2+8x+3=\frac{4\left(4x^2+8x+3\right)}{4}=\frac{\left(4x\right)^2+8\left(4x\right)+12}{4}=$$

$$=\frac{\left(4x+2\right)\left(4x+6\right)}{4}=\left(2x+1\right)\left(2x+3\right)$$

(b).-

$$x^2+2x-3=\left(x+3\right)\left(x-1\right)$$

Luego:

$$\frac{x\left(x+3\right)\left(x-1\right)}{\left(2x+1\right)\left(2x+3\right)}\times\frac{x\left(2x+3\right)}{x\left(x-1\right)}=\frac{x\left(x+3\right)}{\left(2x+1\right)}=\frac{x^2+3x}{\left(2x+1\right)}$$

19.- $\dfrac{x^3-27}{a^3-1}\times\dfrac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}=$

Soluciones:

Primero se harán las factorizacfiones:

(a).-

$$x^3-27=\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)$$

(b).-

$$a^3-1=\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)$$

Entonces:

$$\frac{\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)}{\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)}\times\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}=\frac{x-3}{a-1}$$

20.- $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{3}\times\dfrac{2a+4b}{\left(a+2b\right)^3}=$

Solución:

$$\frac{\left(a+2b\right)^2}{3}\times\frac{2\left(a+2b\right)}{\left(a+2b\right)^3}=\frac{2}{3}\times\frac{\left(a+2b\right)^3}{\left(a+2b\right)^3}=\frac{2}{3}$$

21.- $\dfrac{1-x}{a+1}\times\dfrac{a^2+a}{x-x^2}\times\dfrac{x^2}{a}=$

Solución:

$$\frac{1-x}{a+1}\times\frac{a\left(a+1\right)}{x\left(1-x\right)}\times\frac{x^2}{a}=\frac{x^2}{x}=x$$

22.- $\dfrac{x^2+2x}{x^2-16}\times\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\times\dfrac{x^2+4x}{x^2+4x+4}=$

Solución:

$$\frac{x(x+2)}{(x+4)(x-4)}\times\frac{(x-4)(x+2)}{x^2(x+1)}\times\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+1}$$

23.- $\dfrac{(m+n)^2-x^2}{(m+x)^2-n^2}\times\dfrac{(m-n)^2-x^2}{m^2+mn-mx}=$

Solución:

$$\frac{(m+n+x)(m+n-x)}{(m+x+n)(m+x-n)}\times\frac{(m-n+x)(m-n-x)}{m(m+n-x)}=\frac{m-n-x}{m}$$

24.- $\dfrac{2a^3+2ab^2}{2ax^2-2ax}\times\dfrac{x^3-x}{a^2x+b^2x}\times\dfrac{x}{x+1}=$

Solución:

$$\frac{2a(a^2+b^2)}{2ax(x-1)}\times\frac{x(x^2-1)}{x(a^2+b^2)}\times\frac{x}{x+1}=1$$

25.- $\dfrac{a^2-5a+6}{3a-15}\times\dfrac{6a}{a^2-a-30}\times\dfrac{a^2-25}{2a-4}=$

Solución:

$$\frac{(a-2)(a-3)}{3(a-5)}\times\frac{6a}{(a-6)(a+5)}\times\frac{(a+5)(a-5)}{2(a-2)}=\frac{a(a-3)}{(a-6)}=\frac{a^2-3a}{(a-6)}$$

26.- $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\times\dfrac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\times\dfrac{x^2-6xy}{x+2y}=$

Solución:

$$\frac{(x-5y)(x+2y)}{(x-4y)(x+2y)}\times\frac{(x+4y)(x-4y)}{x(x+4y)}\times\frac{x(x-6y)}{x+2y}=$$

$$=\frac{(x-5y)(x-6y)}{x+2y}=\frac{x^2-11xy+30y^2}{x+2y}$$

27.- $\dfrac{x^2+4ax+4a^2}{3ax-6a^2}\times\dfrac{2ax-4a^2}{ax+a}\times\dfrac{6a+6x}{x^2+3ax+2a^2}=$

Solución:

$$\frac{(x+2a)^2}{3a(x-2a)}\times\frac{2a(x-2a)}{a(x+1)}\times\frac{6(a+x)}{(x+a)(x+2a)}=\frac{4(x+2a)}{a(x+1)}=\frac{4x+8a}{ax+a}$$

28.- $\frac{a^2-81}{2a^2+10a}\times\frac{a+11}{a^2-36}\times\frac{2a-12}{2a+18}\times\frac{a^3+5a^2}{2a+22}=$

Solución:

$$\frac{(a+9)(a-9)}{2a(a+5)}\times\frac{a+11}{(a+6)(a-6)}\times\frac{2(a-6)}{2(a+9)}\times\frac{a^2(a+5a)}{2(a+11)}=$$

$$=\frac{a(a-9)}{4(a+6)}=\frac{a^2-9a}{4a+24}$$

29.- $\frac{a^2+7a+10}{a^2-6a-7}\times\frac{a^2-3a-4}{a^2+2a-15}\times\frac{a^3-2a^2-3a}{a^2-2a-8}=$

Solución:

$$\frac{(a+2)(a+5)}{(a-7)(a+1)}\times\frac{(a-4)(a+1)}{(a+5)(a-3)}\times\frac{a(a-3)(a+1)}{(a-4)(a+2)}=\frac{a(a+1)}{(a-7)}=\frac{a^2+a}{a-7}$$

30.- $\frac{x^4+27x}{x^3-x^2+x}\times\frac{x^4+x}{x^4-3x^3+9x^2}\times\frac{1}{x(x+3)^2}\times\frac{x^2}{x-3}=$

Solución:

Recordar que:

$$(x^3+27)=(x+3)(x^2-3x+9)$$

$$(x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{x(x^3+27)}{x(x^2-x+1)}\times\frac{x(x^3+1)}{x^2(x^2-3x+9)}\times\frac{1}{x(x+3)^2}\times\frac{x^2}{x-3}=$$

$$\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x^2-x+1)}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2-3x+9)}\times\frac{1}{x(x+3)^2}\times\frac{x^2}{(x-3)}=$$

$$=\frac{(x+1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+1}{x^2-9}$$

Ejercicio 133. Simplificar:

1.- $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{ab+a}{b}\right)\left(\frac{ab+a-a}{b+1}\right)=\frac{(ab+a)(ab)}{b(b+1)}=\frac{a^2b^2+a^2b}{b^2+b}=\frac{a^2\left(b^2+b\right)}{\left(b^2+b\right)}=a^2$$

2.- $\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\left(x+\frac{1}{x+2}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}\right)=\frac{(x+2)(x-1)(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=(x+1)(x+1)=x^2-1$$

3.- $\left(1-\frac{x}{a+x}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{a+x-x}{a+x}\right)\left(\frac{a+x}{a}\right)=\left(\frac{a}{a+x}\right)\left(\frac{a+x}{a}\right)=1$$

4.- $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{a^2-ab+ab}{a-b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a-b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b$$

5.- $\left(x+2-\frac{12}{x+1}\right)\left(x-2+\frac{10-3x}{x+5}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{(x+2)(x+1)-12}{x+1}\right]\cdot\left[\frac{(x-2)(x+5)+10-3x}{x+5}\right]=$$

$$=\left(\frac{x^2+3x+2-12}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+3x-10+10-3x}{(x+5)}\right)=\left(\frac{x^2+3x-10}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{x+5}\right)=$$

$$\frac{x^2(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2(x-2)}{x+1}=\frac{x^3-2x^2}{x+1}$$

6.- $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(x-\frac{x^2}{x+y}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{y+x}{y}\right)\left(\frac{x^2+xy-x^2}{x+y}\right)=\frac{xy}{y}=x$$

7.- $\left(a+x-\frac{ax+x^2}{a+2x}\right)\left(1+\frac{x}{a+x}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{(a+x)(a+2x)-ax-x^2}{(a+2x)}\right]\left(\frac{a+x+x}{a+x}\right)=\left(\frac{a^2+3ax+2x^2-ax-x^2}{a+2x}\right)\left(\frac{a+2x}{a+x}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2+2ax+x^2}{a+2x}\right)\left(\frac{a+2x}{a+x}\right)=\frac{(a+x)^2}{(a+2x)}\times\frac{(a+2x)}{(a+x)}=(a+x)$$

8.- $\left(x-\frac{x^3-6x}{x^2-25}\right)\left(x+1-\frac{8}{x+3}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{x\left(x^2-25\right)-x^3+6x}{x^2-25}\right]\left[\frac{(x+1)(x+3)-8}{x+3}\right]=$$

$$=\left(\frac{x^3-25x-x^3+6x}{\left(x^2-25\right)}\right)\left(\frac{x^2+4x+3-8}{x+3}\right)=\left(\frac{-19x}{x^2-25}\right)\left(\frac{x^2+4x-5}{x+3}\right)=$$

$$=\left[\frac{-19x}{(x+5)(x-5)}\right]\left[\frac{(x+5)(x-1)}{x+3}\right]=\frac{(-19x)(x-1)}{(x-5)(x+3)}=\frac{19x-19x^2}{x^2-2x-15}$$

9.- $\left(m-\frac{mn}{m+n}\right)\left(1+\frac{n^3}{m^3}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{m(m+n)-mn}{(m+n)}\right]\left[\frac{m^3+n^3}{m^3}\right]=\left(\frac{m^2+mn-mn}{m+n}\right)\left(\frac{m^3+n^3}{m^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{m^2}{m+n}\right)\left[\frac{(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)}{m^3}\right]=\frac{m^2-mn+n^2}{m}$$

10.- $\left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{(a+2x)(2a+x)-14x^2}{(2a+x)}\right]\left[\frac{(a-x)(a+4x)+a^2+5x^2}{(a+4x)}\right]=$$

$$=\left(\frac{2a^2+5ax+2x^2-14x^2}{(2a+x)}\right)\left(\frac{a^2+3ax-4x^2+a^2+5x^2}{a+4x}\right)=$$

$$=\left(\frac{2a^2+5ax-12x^2}{2a+x}\right)\left(\frac{2a^2+3ax+x^2}{a+4x}\right)=$$

Ahora, se deben factorizar los dos trrinomios, como sigue:

(a).- $$2a^2+5ax-12x^2=\frac{2\left(2a^2+5ax-12x^2\right)}{2}=\frac{(2a)^2+5x(2a)-24x^2}{2}=$$
$$=\frac{(2a-3x)(2a+8x)}{2}=(2a-3x)(a+4x)$$

(b).- $$2a^2+3ax+x^2=\frac{2\left(2a^2+3ax+x^2\right)}{2}=\frac{(2a)^2+3x(2a)+2x^2}{2}=$$
$$=\frac{(2a+x)(2a+2x)}{2}=(2a+x)(a+x)$$

Entonces:

$$\frac{(2a-3x)(a+4x)}{(2a+x)}\times\frac{(2a+x)(a+x)}{(a+4x)}=(2a-3x)(a+x)=$$
$$=2a^2-ax-3x^2$$

11.-
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)=$$

Solución:
$$\left(\frac{b+a}{b}\right)\left(\frac{a-b}{a}\right)\left(\frac{a^2-b^2+b^2}{a^2-b^2}\right)=\frac{\left(a^2-b^2\right)}{ab}\times\frac{a^2}{\left(a^2-b^2\right)}=\frac{a}{b}$$

12.- $\left(2+\dfrac{2}{x+1}\right)\left(3-\dfrac{6}{x+2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$

Solución:

$$\frac{2(x+1)+2}{x+1}\times\frac{3(x+2)-6}{x+2}\times\frac{x+1}{x}=\frac{2(x+2)}{x+1}\times\frac{3x}{x+2}\times\frac{x+1}{x}=6$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 51.
Tema: División de fracciones. (Baldor).
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 134. Simplificar:

1.- $\frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} =$

Solución:

$$\frac{x^2}{3y^2} \times \frac{y^3}{2x} = \frac{xy}{6}$$

2.- $\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 =$

Solución:

$$\frac{3a^2b}{5x^2} \times \frac{1}{a^2b^3} = \frac{3}{5b^2x^2}$$

3,- $\frac{5m^2}{7n^3} \div \frac{10m^4}{14an^4} =$

Solución:

$$\frac{5m^2}{7n^3}\times\frac{14an^4}{10m^4}=\frac{an}{m^2}$$

4.- $6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5} =$

Solución:

$$\frac{6a^2x^3}{1}\times\frac{5}{a^2x}=30x^2$$

5,- $\frac{15m^2}{19ax^3}\div\frac{20y^2}{38a^3x^2}=$

Solución:

$$\frac{15m^2}{19ax^3}\times\frac{38a^3x^4}{20y^2}=\frac{3m^2a^2x}{2y^2}$$

6.- $\frac{11x^2y^3}{7m^2}\div 22y^4 =$

Solución:

$$\frac{11x^2y^3}{7m^2}\times\frac{1}{22y^4}=\frac{x^2}{14m^2y}$$

7.- $\frac{x-1}{3}\div\frac{2x-2}{6}=$

Solución:

$$\frac{x-1}{3}\times\frac{6}{2\left(x-1\right)}=1$$

8.- $\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2}\div\frac{5a^3}{a^2b+3ab^2}=$

Solución:

$$\frac{3a^2}{\left(a+3b\right)^2}\times\frac{ab\left(a+3b\right)}{5a^3}=\frac{3b}{5\left(a+3b\right)}=\frac{3b}{5a+15b}$$

9.- $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}=$

Solución:

$$\frac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{2x\left(x+3\right)}\times\frac{2\left(x+3\right)}{5x\left(x-1\right)}=\frac{\left(x+1\right)}{5x}$$

10.- $\dfrac{1}{a^2-a-30}\div\dfrac{2}{a^2+a-42}=$

Solución:

$$\frac{1}{(a-6)(a+5)}\times\frac{(a+7)(a-6)}{2}=\frac{(a+7)}{2(a+5)}=\frac{a+7}{2a+10}$$

11.- $\dfrac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2}\div\dfrac{4x-6}{x+1}=$

Solución:

$$\frac{10x(2x-3)}{15x^2(x+1)}\times\frac{(x+1)}{2(2x-3)}=\frac{1}{3x}$$

12.- $\dfrac{a^2-6a+5}{a^2-15a+56}\div\dfrac{a^2+2a-35}{a^2-5a-24}=$

Solución:

$$\frac{(a-5)(a-1)}{(a-7)(a-8)}\times\frac{(a-8)(a+3)}{(a+7)(a-5)}=\frac{(a-1)(a+3)}{(a^2-49)}=\frac{a^2+2a-3}{a^2-49}$$

13.- $\dfrac{8x^2+26x+15}{16x^2-9}\div\dfrac{6x^2+13x-5}{9x^2-1}=$

Solución:

Primero se harán las factorizaciones:

(a).- $$8x^2+26x+15=\frac{8(8x^2+26x+15)}{8}=\frac{(8x)^2+26(8x)+120}{8}=$$
$$=\frac{(8x+20)(8x+6)}{8}=(2x+5)(4x+3)$$

(b).- $$6x^2+13x-5=\frac{6(6x^2+13x-5)}{6}=\frac{(6x)^2+13(6x)-30}{6}=$$
$$=\frac{(6x+15)(6x-2)}{6}=(2x+5)(3x-1)$$

Entonces:

$$\frac{(2x+5)(4x+3)}{(4x+3)(4x-3)}\times\frac{(3x+1)(3x-1)}{(2x+5)(3x-1)}=\frac{(3x+1)}{(4x-3)}$$

14.- $\dfrac{x^3-121x}{x^2\,'49} \div \dfrac{x^2-11x}{x+7} =$

Solución:

$$\frac{x\left(x^2-121\right)}{(x+7)(x-7)} \times \frac{(x+7)}{x(x-11)} = \frac{x(x+11)(x-11)}{(x+7)(x-7)} \times \frac{(x+7)}{x(x-11)} =$$

$$= \frac{x+11}{x-7}$$

15.- $\dfrac{ax^2+5}{4a^2-1} \div \dfrac{a^3x^2+5a^2}{2a-1} =$

Solución:

$$\frac{ax^2+5}{(2a-1)(2a+1)} \times \frac{(2a-1)}{a^2\left(ax^2+5\right)} = \frac{1}{a^2(2a+1)} = \frac{1}{2a^3+a^2}$$

16.- $\dfrac{a^4-1}{a^3+a^2} \div \dfrac{a^4+4a^2+3}{3a^3+9a} =$

Solución:

$$\frac{\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)}{a^2(a+1)} \times \frac{(3a)\left(a^2+3\right)}{\left(a^2+1\right)\left(a^2+3\right)} = \frac{3(a-1)}{a} = \frac{3a-3}{a}$$

17.- $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2*x-56} =$

Solución:

$$\frac{(x+5)\left(x^2-5x+25\right)}{(x+8)(x-8)} \times \frac{(x+8)(x-7)}{x\left(x^2-5x+25\right)} = \frac{(x+5)(x-7)}{x(x-8)} =$$

$$= \frac{x^2-2x-35}{x^2-8x}$$

18.- $\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y} \div \dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2} =$

Solución:

Primero se deben factorizar las expresiones que así lo requieran:

(a).- $16x^2-24xy+9y^2=(4x-3y)^2$

(b).- $\left(64x^3-27y^3\right)=\left[(4x)^3-(3y)^3\right]=(4x-3y)\left(16x^2+12xy+9y^2\right)$

©.- $32x^2+24xy+18y^2=2\left(16x^2+12xy+9y^2\right)$

Luego:

$$\frac{\left(4x-3y\right)^2}{4\left(4x-3y\right)}\times\frac{2\left(16x^2+12xy+9y^2\right)}{\left(4x-3y\right)\left(16x^2+12xy+9y^2\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

19.- $\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2}\div\dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a}=$

Solución:

$$\frac{a\left(a-6\right)}{a^2\left(a+3\right)}\times\frac{a\left(a+9\right)}{\left(a+9\right)\left(a-6\right)}=\frac{1}{\left(a+3\right)}$$

20.- $\dfrac{15x^2+7x-2}{25x^3-x}\div\dfrac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}=$

Solución:

Primero se factorizan las expresiones que así lo requieran:

(a).- $$15x^2+7x-2=\frac{15\left(15x^2+7x-2\right)}{15}=\frac{\left(15x\right)^2+7\left(15x\right)-30}{15}=$$
$$=\frac{\left(15x+10\right)\left(15x-3\right)}{15}=\left(3x+2\right)\left(5x-1\right)$$

(b).- $$6x^2+13x+6=\frac{6\left(6x^2+13x+6\right)}{6}=\frac{\left(6x\right)^2+13\left(6x\right)+36}{6}=$$
$$=\frac{\left(6x+9\right)\left(6x+4\right)}{6}=\left(2x+3\right)\left(3x+2\right)$$

©.- $25x^2+10x+1=\left(5x+1\right)^2$

Luego:

$$\frac{\left(3x+2\right)\left(5x-1\right)}{x\left(5x+1\right)\left(5x-1\right)}\times\frac{\left(5x+1\right)^2}{\left(2x+3\right)\left(3x+2\right)}=\frac{\left(5x+1\right)}{x\left(2x+3\right)}=\frac{5x+1}{2x^2+3x}$$

21.- $\dfrac{x^3-1}{2x^2-2x+2}\div\dfrac{7x^2+7x+7}{7x^3+7}=$

Solución:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2-x+1)}\times\frac{7(x+1)(x^2-x+1)}{7(x^2+x+1)}=\frac{x^2-1}{2}$$

22.- $\dfrac{2mx-2my+nx-ny}{3x-3y}\div(8m+4n)=$

Solución:

$$\frac{2m(x-y)+n(x-y)}{3(x-y)}\times\frac{1}{4(2m+n)}=$$

$$=\frac{(x-y)(2m+n)}{3(x-y)}\times\frac{1}{4(2m+n)}=\frac{1}{12}$$

23.- $\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-1}\div\dfrac{x^2+5x-24}{2x^2+17x+8}=$

Solución:

En primer lugar, se harán las factorizaciones requeridas:

(a).- $x^2-6x+9=(x-3)^2$

(b).- $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$

©.- $2x^2+17x+8=\dfrac{2(2x^2+17x+8)}{2}=\dfrac{(2x)^2+17(2x)+16}{2}=$

$$=\frac{(2x+1)(2x+16)}{2}=(2x+1)(x+8)$$

Luego:

$$\frac{(x-3)^2}{(2x+1)(2x-1)}\times\frac{(2x+1)(x+8)}{(x+8)(x-3)}=\frac{x-3}{2x-1}$$

24.- $\dfrac{2a^2+7ab-15b^2}{a^3+4a^2b}\div\dfrac{a^2-3ab-40b^2}{a^2-4ab-32b^2}=$

Solución:

En primer lugar, se hacen las factorizaciones requeridas:

(a).- $2a^2+7ab-15b^2=\dfrac{2\left(2a^2+7ab-15b^2\right)}{2}=\dfrac{(2a)^2+7(2ab)-30b^2}{2}=$

$=\dfrac{(2a+10b)(2a-3b)}{2}=(a+5b)(2a-3b)$

(b).- $a^2-3ab-40b^2=(a-8b)(a+5b)$

©.- $a^2-4ab-32b^2=(a-8b)(a+4b)$

Luego:

$$\frac{(a+5b)(2a-3b)}{a^2(a+4b)}\times\frac{(a-8b)(a+4b)}{(a-8b)(a+5b)}=\frac{2a-3b}{a^2}$$

Ejercicio 135. Simplificar:

1.- $\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\dfrac{2a}{b}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{a+b+a}{a+b}\right)\div\left(\frac{b+2a}{b}\right)=\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)\times\left(\frac{b}{2a+b}\right)=\frac{b}{a+b}$$

2.- $\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)\div\left(\frac{x^2+x-x}{x+1}\right)=\left(\frac{x^2+x-2}{(x+1)}\right)\times\frac{(x+1)}{x^2}=\frac{x^2*x-2}{x^2}$$

3.- $\left(1-a+\dfrac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\dfrac{2}{a^2-1}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{(1-a)(1+a)+a^2}{1+a}\right]\div\left[\frac{a^2-1+2}{(a+1)(a-1)}\right]=\left(\frac{1-a^2+a^2}{1+a}\right)\times\left[\frac{(a+1)(a-1)}{a^2+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{a+1}\times\frac{(a+1)(a-1)}{a^2+1}=\frac{a-1}{a^2+1}$$

4.- $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{x^2+3x+2}{x+3}\right)\div\left(\frac{x^2+4x+3}{x+4}\right)=\left[\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}\right]\times\left[\frac{x+4}{(x+1)(x+3)}\right]=$$
$$=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+9}$$

5.- $\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{(a+b)(a-b)+b^2}{(a-b)}\right]\div\left[\frac{(a+b)-b}{(a+b)}\right]=\left(\frac{a^2-b^2+b^2}{(a-b)}\right)\div\left(\frac{a+b-b}{(a+b)}\right)=$$
$$=\left(\frac{a^2}{a-b}\right)\times\left(\frac{a+b}{a}\right)=\frac{a(a+b)}{a-b}=\frac{a^2+ab}{a-b}$$

6.- $\left(1-\frac{1}{x^3+2}\right)\div\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{x^3+2-1}{x^3+2}\right)\div\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{x^3+1}{x^3+2}\right)\div\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=$$
$$=\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^3+2}\right]\times\left(\frac{x-1}{x^2-x+1}\right)=\frac{x^2-1}{x^3+2}$$

7.- $\left(x+\frac{1}{x+2}\right)\div\left(1+\frac{3}{x^2-4}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}\right)\div\left(\frac{x^2-4+3}{x^2-4}\right)=\frac{(x+1)^2}{(x+2)}\times\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x-1}$$

8.- $\left(n-\frac{2n-1}{n^2+2}\right)\div\left(n^2+1-\frac{n-1}{n}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{n\left(n^2+2\right)-2n+1}{n^2+2}\right]\div\left[\frac{\left(n^2+1\right)n-n+1}{n}\right]=$$

$$=\left(\frac{n^3+2n-2n+1}{n^2+2}\right)\div\left(\frac{n^3+n-n+1}{n}\right)=\left(\frac{n^3+1}{n^2+2}\right)\div\left(\frac{n^3+1}{n}\right)=$$

$$=\left(\frac{n^3+1}{n^2+2}\right)\times\left(\frac{n}{n^3+1}\right)=\frac{n}{n^2+2}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 52.

Tema: Multiplicación y división combinada de fracciones. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 136. Simplificar:

1.- $\frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\div\frac{z^2}{2x^2}=$

Solución:

$$\frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\times\frac{3x^2}{z^2}=\frac{2x^2}{z^2}$$

2.- $\frac{5a}{b}\div\left(\frac{2a}{b^2}\times\frac{5x}{4a^2}\right)=$

Solución:

$$\frac{5a}{b}\div\left(\frac{5x}{2ab^2}\right)=\left(\frac{5a}{b}\right)\times\left(\frac{2ab^2}{5x}\right)=\frac{2a^2b}{x}$$

3.- $\frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=$

Solución:

$$\frac{a+1}{a-1}\times\frac{3(a-1)}{2(a+1)}\div\frac{a(a+1)}{(a-1)(a+2)}=\frac{3}{2}\times\frac{a^2+a-2}{a^2+a}=\frac{3a^2+3a-6}{2a^2+2a}$$

4.- $\frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}=$

Solución:

$$\frac{(8a+9b)(8a-9b)}{(x+9)(x-9)}\times\frac{(x-9)^2}{(8a-9b)}\div\frac{a(8a+9b)}{(x+9)^2}=$$

$$=\frac{(8a+9b)(x-9)}{(x+9)}\times\frac{(x+9)^2}{a(8a+9b)}=\frac{(x-9)(x+9)}{a}=\frac{x^2-81}{a}$$

5.- $\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}=$

Solución:

$$\frac{(x-4)(x+3)}{(x-7)(x+7)}\times\frac{(x+7)(x-8)}{(x+5)(x-4)}\div\frac{(x+3)(x-8)}{(x+5)}=$$

$$=\frac{(x+3)(x-8)}{(x-7)(x+5)}\times\frac{(x+5)}{(x+3)(x-8)}=\frac{1}{x-7}$$

6.- $\frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}=$

Solución:

$$\frac{(a-1)(a-7)}{(a-5)(a-6)}\times\frac{(a+6)(a-6)}{(a+1)(a-1)}\div\frac{(a-7)(a+6)}{(a-5)(a+1)}=$$

$$=\frac{(a-7)(a+6)}{(a-5)(a+1)}\times\frac{(a-5)(a+1)}{(a-7)(a+6)}=1$$

7.- $\frac{x^4-27x}{3a-6}\times\frac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x}\div\frac{x^2-100}{x-3}=$

Solución:

$$\left[\frac{x\left(x^3-27\right)}{(x+10)(x-3)}\right]\times\frac{(x+10)^2}{x\left(x^2+3x+9\right)}\div\frac{(x+10)(x-10)}{(x-3)}=$$

$$=\frac{x(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x+10)(x-3)}\times\frac{(x+10)^2}{x\left(x^2+3x+9\right)}\times\frac{(x-3)}{(x+10)(x-10)}=\frac{(x-3)}{(x-10)}$$

8.- $\dfrac{a^2+1}{3a-6}\div\left(\dfrac{a^3+a}{6a-12}\times\dfrac{4x+8}{x-3}\right)=$

Solución:

$$\frac{a^2+1}{3(a-2)}\div\left[\frac{a\left(a^2+1\right)}{6(a-2)}\times\frac{4(x+2)}{x-3}\right]=$$

$$=\frac{a^2+1}{3(a-2)}\times\frac{6(a-2)(x-3)}{4a\left(a^2+1\right)(x+2)}=\frac{x-3}{2a(x+2)}=\frac{x-3}{2ax+4a}$$

9.- $\dfrac{8x^2-10x-3}{6x^2+13x+6}\times\dfrac{4x^2-9}{3x^2+2x}\div\dfrac{8x^2+14x+3}{9x^2+12x+4}=$

En primer lugar, pongamos en forma de factores las expresiones que así lo requieran:

(a).-

$$8x^2-10x-3=\frac{8\left(8x^2-10x-3\right)}{8}=\frac{(8x)^2-10(8x)-24}{8}=$$

$$=\frac{(8x-12)(8x+2)}{8}=(2x-3)(4x+1)$$

(b).-

$$6x^2+13x+6=\frac{6\left(6x^2+13x+6\right)}{6}=\frac{(6x)^2+13(6x)+36}{6}=$$

$$=\frac{(6x+9)(6x+4)}{6}=(2x+3)(3x+2)$$

©.-

$$8x^2+14x+3=\frac{8\left(8x^2+14x+3\right)}{8}=\frac{(8x)^2+14(8x)+24}{8}=$$

$$=\frac{(8x+2)(8x+12)}{8}=(4x+1)(2x+3)$$

(d).- $9x^2+12x+4=(3x+2)^2$

Luego, se sustituyen estos valores en la expresión original:

$$\frac{(2x-3)(4x+1)}{(2x+3)(3x+2)}\times\frac{(2x-3)(2x+3)}{x(3x+2)}\div\frac{(4x+1)(2x+3)}{(3x+2)^2}=$$

$$=\frac{(2x-3)^2(4x+1)}{x(3x+2)^2}\times\frac{(3x+2)^2}{(4x+1)(2x+3)}=\frac{(2x-3)^2}{x(2x+3)}=\frac{4x^2-12x+9}{2x^2+3x}$$

10.- $\frac{(a+b)^2-c^2}{(a-b)^2-c^2}\times\frac{(a+c)^2-b^2}{a^2+ab-ac}\div\frac{a+b+c}{a^2}=$

Solución:

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a-b-c)}\times\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{a(a+b-c)}\div\frac{a+b+c}{a^2}=$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b+c)}{a(a-b-c)}\times\frac{a^2}{a+b+c}=\frac{a(a+b+c)}{a-b-c}=\frac{a^2+ab+ac}{a-b-c}$$

11.- $\frac{a^2-5a}{b+b^2}\div\left(\frac{a^2+6a-55}{b^2-1}\times\frac{ax+3a}{ab^2+11b^2}\right)=$

Solución:

$$\frac{a(a-5)}{b(1+b)}\div\left(\frac{(a+11)(a-5)}{(b+1)(b-1)}\times\frac{a(x+3)}{b^2(a+11)}\right)=$$

$$\frac{a(a-5)}{b(b+1)}\times\frac{(b+1)(b-1)b^2(a+11)}{(a+11)(a-5)a(x+3)}=\frac{b(b-1)}{x+3}=\frac{b^2-b}{x+3}$$

12.- $\frac{m^3+6m^2n+9mn^2}{2m^2n+7mn^2+3n^3}\times\frac{4m^2-n^2}{8m^2-2mn-n^2}\div\frac{m^3+27n^3}{16m^2+8mn+n^2}=$

Solución:

$$\frac{m(m^2+6mn+9n^2)}{n(2m^2+7mn+3n^2)}\times\frac{(2m-n)(2m+n)}{8m^2-2mn-n^2}\div\frac{\left[(m)^3+(3n)^3\right]}{16m^2+8mn+n^2}=$$

Se harán las siguientes factorizaciones:

(a).- $m^2+6mn+9n^2=(m+3n)^2$

(b).-

$$2m^2+7mn+3n^2=\frac{2\left(2m^2+7mn+3n^2\right)}{2}=\frac{(2m)^2+7n(2m)+6n^2}{2}=$$

$$=\frac{(2m+6n)(2m+n)}{2}=(m+3n)(2m+n)$$

©.-

$$8m^2-2mn-n^2=\frac{8\left(8m^2-2mn-n^2\right)}{8}=\frac{(8m)^2-2n(8m)-8n^2}{8}=$$

$$=\frac{(8m-4n)(8m+2n)}{8}=(2m-n)(4m+n)$$

(d).-

$$16m^2+8mn+n^2=(4m+n)^2$$

(e).- $(m)^3+(3n)^3=(m+3n)\left(m^2-3mn+9n^2\right)$

Entonces, el ejercicio se puede escribir como:

$$\frac{m(m+3n)^2}{n(2m+3n)(2m+n)}\times\frac{(2m-n)(2m+n)}{(2m-n)(4m+n)}\div\frac{(m+3n)\left(m^2-3mn+9n^2\right)}{(4m+n)^2}=$$

$$\frac{m(m+3n)^2}{n(m+3n)}\times\frac{1}{(4m+n)}\times\frac{(4m+n)^2}{(m+3n)\left(m^2-3mn+9n^2\right)}=$$

$$=\frac{m(4m+n)}{n\left(m^2-3mn+9n^2\right)}=\frac{m(4m+n)}{n\left(m^2-3mn+9n^2\right)}=\frac{4m^2+mn}{m^2n-3mn^2+9n^3}$$

13.- $\frac{\left(a^2-ax\right)^2}{a^2+x^2}\times\frac{1}{a^3+a^2x}\div\left(\frac{a^3-a^2x}{a^2+2ax+x^2}\times\frac{a^2-x^2}{a^3+a^2x}\right)=$

Solución:

En pimer lugar, aclarar que:

$$\left(a^2-ax\right)^2=\left(a^2-ax\right)\left(a^2-ax\right)=a(a-x)\times a(a-x)=a^2(a-x)^2$$

Entonces:

$$\frac{\left(a^2-ax\right)^2}{a^2+x^2}\times\frac{1}{a^2(a+x)}\div\left[\frac{a^2(a-x)}{(a+x)^2}\times\frac{(a+x)(a-x)}{a\left(a^2+x^2\right)}\right]=$$

$$=\frac{a^2(a-x)^2}{a^2+x^2}\times\frac{1}{a^2(a+x)}\times\left[\frac{(a+x)\left(a^2+x^2\right)}{a(a-x)^2}\right]=\frac{1}{a}$$

14.- $\dfrac{\left(a^2-3a\right)^2}{9-a^2}\times\dfrac{27-a^3}{\left(a+3\right)^2--3a}\div\dfrac{a^4-9a^2}{\left(a^2+3a\right)^2}=$

Solución:

En primer lugar, aclarar que:

(a).- $\left(a^2-3a\right)^2=\left(a^2-3a\right)\times\left(a^2-3a\right)=a\left(a-3\right)\times a\left(a-3\right)=a^2\left(a-3\right)^2$

(b).- $\left(a^2+3a\right)^2=\left(a^2+3a\right)\times\left(a^2+3a\right)=a\left(a+3\right)\times a\left(a+3\right)=a^2\left(a+3\right)^2$

©.- $27-a^3=\left(3\right)^3-\left(a\right)^3=\left(3-a\right)\left(9+3a+a^2\right)$

(d).- $\left(a+3\right)^2-3a=a^2+6a+9-3a=a^2+3a+9$

(e).- $a^4-9a^2=a^2\left(a^2-9\right)=a^2\left(a+3\right)\left(a-3\right)$

Luego, la expresión original se puede escribir como:

$$\frac{a^2\left(a-3\right)^2}{\left(3+a\right)\left(3-a\right)}\times\frac{\left(3-a\right)\left(9+3a+a^2\right)}{\left(9+3a+a\quad\right)}\div\frac{a^2\left(a+3\right)\left(a-3\right)}{a^2\left(a+3\right)^2}=$$

$$=\frac{a^2\left(a-3\right)^2}{\left(3+a\right)}\div\frac{\left(a-3\right)}{\left(a+3\right)}=\frac{a^2\left(a-3\right)^2}{\left(a+3\right)}\times\frac{\left(a+3\right)}{\left(a-3\right)}=a^2\left(a-3\right)=a^3-3a^2$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 53.

Tema: Simplificación de fracciones complejas. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 137. Simplificar:

1.-

$$\frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{ab-a}{b}}{\frac{b^2-1}{b}}=\frac{a(b-1)}{(b-1)(b+1)}=\frac{a}{b+1}$$

2.-

$$\frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{x^3-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}=x^2+x+1$$

3.-

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)}{b}$$

4.-

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{n+m}{mn}}{\frac{n-m}{mn}}=\frac{n+m}{n-m}$$

5.- $\dfrac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{4}}=$

Solución:

$$\frac{\frac{2x+x}{2}}{\frac{4x-x}{4}}=\frac{4(3x)}{2(3x)}=2$$

6,-

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{x(x+y)(x-y)}{xy(x+y)}=\frac{x-y}{y}$$

7.-

$$\frac{x+4+\frac{3}{x}}{x-4-\frac{5}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{x^2+4x+3}{x}}{\frac{x^2-4x-5}{x}}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x-5)(x+1)}=\frac{x+3}{x-5}$$

8.-

$$\frac{a-4+\frac{4}{a}}{1-\frac{2}{a}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{a^2-4a+4}{a}}{\frac{a-2}{a}}=\frac{(a-2)^2}{(a-2)}=a-2$$

9.-

$$\frac{\frac{2a^2-b^2}{a}-b}{\frac{4a^2+b^2}{4ab}+1}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{2a^2-b^2-ab}{a}}{\dfrac{4a^2+b^2+4ab}{4ab}}=\frac{4ab\left(2a^2-ab-b^2\right)}{a\left(2a+b\right)^2}=\frac{\dfrac{4b\times 2\left(2a^2-ab-b^2\right)}{2}}{\left(2a+b\right)^2}=$$

$$=\frac{2b\left[\left(2a\right)^2-b\left(2a\right)-2b^2\right]}{\left(2a+b\right)^2}=\frac{2b\left[\left(2a-2b\right)\left(2a+b\right)\right]}{\left(2a+b\right)^2}=$$

$$=\frac{4b\left(a-b\right)}{\left(2a+b\right)}=\frac{4ab-4b^2}{2a+b}$$

10.-

$$\frac{2+\dfrac{3a}{5b}}{a+\dfrac{10b}{3}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{10b+3a}{5b}}{\dfrac{3a+10b}{3}}=\frac{3\left(3a+10b\right)}{5b\left(3a+10b\right)}=\frac{3}{5b}$$

11.-

$$\frac{a-x+\dfrac{x^2}{a+x}}{a^2-\dfrac{a^2}{a+x}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^2-x^2+x^2}{a+x}}{\dfrac{a^2\left(a+x\right)-a^2}{a+x}}=\frac{a^2}{a^2\left(a+x-1\right)}=\frac{1}{a+x-1}$$

12.-

$$\frac{a+5-\dfrac{14}{a}}{1+\dfrac{8}{a}+\dfrac{7}{a^2}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^2+5a-14}{a}}{\dfrac{a^2+8a+7}{a^2}}=\frac{a\left(a+7\right)\left(a-2\right)}{\left(a+7\right)\left(a+1\right)}=\frac{a\left(a-2\right)}{a+1}=\frac{a^2-2a}{a+1}$$

13.- $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{20}{a^3}}{\dfrac{16}{a}-a}=$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^2-9a+20}{a^3}}{\dfrac{16-a^2}{a}}=\frac{\left(a-4\right)\left(a-5\right)}{a^2\left(4+a\right)\left(4-a\right)}=-\frac{a-5}{a^2\left(4+a\right)}=-\frac{5-a}{4a^2+a^3}$$

14.- $\dfrac{\dfrac{20x^2+7x-6}{x}}{\dfrac{4}{x^2}-25}=$

Solución:

En primer lugar se debe factorizar la siguiente expresión:

$$20x^2+7x-6=\frac{20\left(20x^2+7x-6\right)}{20}=\frac{\left(20x\right)^2+7\left(20x\right)-120}{20}=$$

$$=\frac{\left(20x-8\right)\left(20x+15\right)}{20}=\left(5x-2\right)\left(4x+3\right)$$

Luego:

$$\frac{\dfrac{\left(5x-2\right)\left(4x+3\right)}{x}}{\dfrac{4-25x^2}{x^2}}=\frac{x\left(5x-2\right)\left(4x+3\right)}{\left(2-5x\right)\left(2+5x\right)}=-\frac{x\left(2-5x\right)\left(4x+3\right)}{\left(2-5x\right)\left(2+5x\right)}=$$

$$=-\frac{x\left(4x+3\right)}{2+5x}=-\frac{4x^2+3x}{5x+2}$$

15.- $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1+\dfrac{1}{x^2-1}}=$

Solución:

$$\frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x^2-1+1}{x^2-1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2}{x^2-1}}=\frac{x(x+1)(x-1)}{x^2(x-1)}=\frac{x+1}{x}$$

16.- $\dfrac{a-\frac{ab}{a+b}}{a+\frac{ab}{a-b}}=$

Solución:

$$\frac{\frac{a^2+ab-ab}{a+b}}{\frac{a^2-ab+ab}{a-b}}=\frac{\frac{a^2}{a+b}}{\frac{a^2}{a-b}}=\frac{a-b}{a+b}$$

17.-

$$\frac{x-1-\frac{5}{x+3}}{x+5-\frac{35}{x+3}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{(x-1)(x+3)-5}{x+3}}{\frac{(x+5)(x+3)-35}{x+3}}=\frac{x^2+2x-3-5}{x^2+8x+15-35}=\frac{x^2+2x-8}{x^2+8x-20}=$$

$$=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+10)(x-2)}=\frac{x+4}{x+10}$$

18.-

$$\frac{a+2-\frac{7a+9}{a+3}}{a-4+\frac{5a-11}{a+1}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{(a+2)(a+3)-7a-9}{a+3}}{\frac{(a-4)(a+1)+5a-11}{a+1}}=\frac{(a+1)\left(a^2+5a+6-7a-9\right)}{(a+3)\left(a^2-3a-4+5a-11\right)}=$$

$$=\frac{(a+1)\left(a^2-2a-3\right)}{(a+3)\left(a^2+2a-15\right)}=\frac{(a+1)(a-3)(a+1)}{(a+3)(a+5)(a-3)}=\frac{(a+1)^2}{(a+3)(a+5)}$$

$$=\frac{a^2+2a+1}{a^2+8a+15}$$

Ejercico 138. Simplificar:

1.- $\dfrac{1+\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=$

Solución:

$$\frac{\frac{x-1+x+1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x^2-1}}=\frac{2x\left(x^2-1\right)}{2(x-1)}=\frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)}=x^2+x$$

2.-

$$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}=$$

Solución:

$$\frac{\frac{(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(x+1)(x-2)+x(2x+6)}{x(x+1)}}=\frac{\frac{3x-1}{(x-1)}}{\frac{x^2-x-2+2x^2+6x}{x}}=$$

$$=\frac{x(3x-1)}{(x-1)\left(3x^2+5x-2\right)}=$$

Ahora:

$$3x^2+5x-2=\frac{3\left(3x^2+5x-2\right)}{3}=\frac{(3x)^2+5(3x)-6}{3}=$$

$$=\frac{(3x-1)(3x+6)}{3}=(3x-1)(x+2)$$

Luego, la expresión original se puede escribir como:

$$=\frac{x(3x-1)}{(x-1)(3x-1)(x+2)}=\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{x}{x^2+x-2}$$

3.- $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}}=$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a(a+b)-b(a-b)}{(a+b)(a-b)}}{\dfrac{b(a+b)+a(a-b)}{b(a-b)}}=\frac{\dfrac{a^2+ab-ab+b^2}{a+b}}{\dfrac{ab+b^2+a^2-ab}{b}}=\frac{b(a^2+b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{b}{a+b}$$

4.-

$$\frac{\dfrac{x+3}{x+4}-\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x-4}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)}{(x+2)(x+4)}}{\dfrac{(x-1)(x+4)-(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}}=\frac{x^2+5x+6-x^2-5x-4}{x^2+3x-4-x^2+x+6}=$$

$$=\frac{2}{4x+2}=\frac{2}{2(2x+1)}=\frac{1}{2x+1}$$

5.-

$$\frac{\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{m^2-n^2}{m+n}}{\dfrac{m-n}{n}+\dfrac{n}{m}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{m^2(m+n)-n(m^2-n^2)}{n(m+n)}}{\dfrac{m(m-n)+n^2}{nm}}=\frac{m(m^3+n^3)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}=m$$

Nota: Recordar que: $m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$

6.- $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b-a}{a-b}}=$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^3+b^3}{ab^3}}{\dfrac{a(a-b)-b(b-a)}{b(a-b)}}=\frac{b(a-b)\left(a^3+b^3\right)}{ab^3\left[(a+b)(a-b)\right]}=\frac{a^3+b^3}{ab^2(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{ab^2(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab^2}$$

7.-

$$\frac{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}{2x+\dfrac{2x^2+2}{1-x^4}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\dfrac{2x\left(1-x^4\right)+2x^5+2}{1-x^4}}=\frac{\left(1-x^4\right)(1+x)^{2+x}}{\left(1+x^2\right)\left(2x-2x^5+2x^5+2\right)}=$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)(1+x)^2}{\left(1+x^2\right)(2x+2)}=\frac{\left(1-x^2\right)(1+x)^2}{2(1+x)}=\frac{\left(1-x^2\right)(1+x)}{2}=$$

$$=\frac{1+x-x^2-x^3}{2}$$

8.-

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x}-\dfrac{x+2y}{x+y}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{(x+y)^2-x(x+2y)}{x(x+y)}}=\frac{x(x+y)\left[x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right]}{(x+y)(x-y)\left[x^2+2xy+y^2-x^2-2xy\right]}=$$

$$=\frac{x(4xy)}{(x-y)\left(y^2\right)}=\frac{4x^2}{xy-y^2}$$

9.-

$$\frac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{b+x}{b-x}}{\dfrac{2}{a-x}-\dfrac{2}{b-x}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(a+x)(b-x)-(a-x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}{\dfrac{2(b-x)-2(a-x)}{(a-x)(b-x)}}=\frac{ab-ax+bx-x^2-\left(ab-bx+ax-x^2\right)}{2b-2x-2a+2x}=$$

$$=\frac{ab-ax+bx-x^2-ab+bx-ax+x^2}{2(b-a)}=\frac{2x(b-a)}{2(b-a)}=x$$

10.-

$$\frac{\dfrac{a}{a+x}-\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{2(a)-a}{2(a+x)}}{\dfrac{a(a+x)+a(a-x)}{a^2-x^2}}=\frac{a(a-x)}{2\left(a^2+ax+a^2-ax\right)}=\frac{a-x}{4a}$$

11.-

$$\frac{\dfrac{a+2b}{a-b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{3b}{a-b}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(a+2b)(a)+(b)(a-b)}{a(a-b)}}{\dfrac{(a+b)(a-b)+3ab}{a(a-b)}}=\frac{a^2+2ab+ab-b^2}{a^2-b^2+3ab}=\frac{a^2+3ab-b^2}{a^2+3ab-b^2}=1$$

12.-

$$\frac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}{x-\dfrac{16}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2}}{\dfrac{x^2-16}{x}}=\frac{(x-4)(x-3)}{x(x-4)(x+4)}=\frac{x-3}{x^2+4x}$$

13.-

$$\frac{\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^3-b^3}{ab}}{\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2b}}=\frac{a\left(a^3-b^3\right)}{a^2+ab+b^2}=\frac{a(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}=a^2-ab$$

14.-

$$\frac{x-2y-\dfrac{4y^2}{x+y}}{x-3y-\dfrac{5y^2}{x+y}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(x-2y)(x+y)-4y^2}{x+y}}{\dfrac{(x-3y)(x+y)-5y^2}{x+y}}=\frac{x^2+xy-2xy-2y^2-4y^2}{x^2-3xy+xy-3y^2-5y^2}=$$

$$\frac{x^2-xy-6y^2}{x^2-2xy-8y^2}=\frac{(x+2y)(x-3y)}{(x+2y)(x-4y)}=\frac{x-3y}{x-4y}$$

15.-

$$\frac{\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{2}{1+a}}{\dfrac{2}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{2(1+a+1-a)}{(1+a)(1-a)}}{\dfrac{2(1-a-1-a)}{(1+a)(1-a)}}=\frac{4}{-4a}=-\frac{1}{a}$$

16.-

$$\frac{\dfrac{1}{x+y+z}-\dfrac{1}{x-y+z}}{\dfrac{1}{x-y+z}-\dfrac{1}{x+y+z}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{x-y+z-x-y-z}{(x+z)^2-y^2}}{\dfrac{x+y+z-x+y-z}{(x+z)^2-y^2}}=\frac{-2y}{2y}=-1$$

17.-

$$\frac{1+\dfrac{2b+c}{a-b-c}}{1-\dfrac{c-2b}{a-b+c}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a-b-c+2b+c}{(a-b)-c}}{\dfrac{a-b+c-c+2b}{(a-b)+c}}=\frac{\dfrac{a+b}{(a-b)-c}}{\dfrac{a+b}{(a-b)+c}}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$$

18.-

$$\frac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a}-\dfrac{a}{1-a}}=\frac{\dfrac{a^2+(1-a)^2}{(1-a)a}}{\dfrac{(1-a)^2-a^2}{(1-a)a}}=\frac{a^2+1-2a+a^2}{1-2a+a^2-a^2}=\frac{2a^2-2a+1}{1-2a}$$

19.-

$$\frac{\dfrac{x+1-\dfrac{6x+12}{x+2}}{x-5}}{\dfrac{x-4+\dfrac{11x-22}{x-2}}{x+7}}=\frac{\dfrac{(x+1)(x+2)-6x-12}{(x+2)(x-5)}}{\dfrac{(x-4)(x-2)+11x-22}{(x-2)(x+7)}}=\frac{\dfrac{x^2+3x+2-6x-12}{(x+2)(x-5)}}{\dfrac{x^2-6x+8+11x-22}{(x-2)(x+7)}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x^2-3x-10}{(x+2)(x-5)}}{\dfrac{x^2+5x-14}{(x-2)(x+7)}}=\frac{(x-5)(x+2)(x+7)(x-2)}{(x+7)(x-2)(x+2)(x-5)}=1$$

20.-

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{x}{x+1}$$

21.-

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=$$

Solución:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{\frac{x-1+x}{x-1}}=\frac{x-1}{2x-1}$$

22.-

$$1-\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{x}{3}-1}}=$$

Solución:

$$1-\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{x-3}{3}}}=1-\frac{1}{2+\frac{3}{x-3}}=1-\frac{1}{\frac{2(x-3)+3}{x-3}}=1-\frac{x-3}{2x-3}=$$

$$=\frac{(2x-3)-x+3}{2x-3}=\frac{x}{2x-3}$$

23.- $$\frac{2}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{x}}}=$$

Solución:

$$\frac{2}{1+\frac{2}{\frac{x+2}{x}}}=\frac{2}{1+\frac{2x}{x+2}}=\frac{2}{\frac{x+2+2x}{x+2}}=\frac{2(x+2)}{3x+2}=\frac{2x+4}{3x+2}$$

24.-

$$\frac{1}{x-\frac{x}{x-\frac{x^2}{x+1}}}=$$

Solución:

$$\frac{1}{x-\frac{x}{\frac{x(x+1)-x^2}{x+1}}}=\frac{1}{x-\frac{x(x+1)}{x^2+x-x^2}}=\frac{1}{x-x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

25.-

$$\frac{1}{a+2-\frac{a+1}{a-\frac{1}{a}}}=$$

Solución:

$$\frac{1}{a+2-\frac{a+1}{\frac{a^2-1}{a}}}=\frac{1}{a+2-\frac{(a+1)a}{a^2-1}}=\frac{1}{\frac{(a+2)(a^2-1)-a(a+1)}{a^2-1}}=$$

$$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a+2)(a+1)(a-1)-a(a+1)}=\frac{a-1}{(a+2)(a-1)-a}=$$

$$=\frac{a-1}{a^2+a-2-a}=\frac{a-1}{a^2-2}$$

26.-

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=$$

Solución:

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{\frac{x(x+1)-x+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{\frac{x^2+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-x-1}=x-1$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 54.

Tema: Misceláneas sobre fracciones. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 140. Simplificar:

1.- $\dfrac{12x^2+31x+20}{18x^2+21x-4}=$

Solución:

En primer lugar, se debe hacer la factorización de los dos trinomios:

(a).- $$12x^2+31x+20=\frac{12\left(12x^2+31x+20\right)}{12}=\frac{\left(12x\right)^2+31\left(12x\right)+240}{12}=$$
$$=\frac{\left(12x+16\right)\left(12x+15\right)}{12}=\left(3x+4\right)\left(4x+5\right)$$

(b).- $$18x^2+21x-4=\frac{18\left(18x+21x-4\right)}{18}=\frac{\left(18x\right)^2+21\left(18x\right)-72}{18}=$$
$$=\frac{\left(18x+24\right)\left(18x-3\right)}{18}=\left(3x+4\right)\left(6x-1\right)$$

Luego, la expresión original se puede escribir como:

$$\frac{(3x+4)(4x+5)}{(3x+4)(6x-1)}=\frac{4x+5}{6x-1}$$

2.- $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\div\left(a+2-\frac{2a+1}{a}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{a^2+2a+1}{a^3}\right)\div\left[\frac{a(a+2)-2a-1}{a}\right]=\frac{(a+1)^2}{a^3}\div\frac{a^2-1}{a}=$$

$$=\frac{(a+1)^2}{a^3}\times\frac{a}{(a+1)(a-1)}=\frac{a+1}{a^2(a-1)}=\frac{a+1}{a^3-a^2}$$

3.- $\frac{x^3+3x^2+9x}{x^5-27x^2}$

Solución:

$$\frac{x(x^2+3x+9)}{x^2(x^3-27)}=\frac{x(x^2+3x+9)}{x^2(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{1}{x(x-3)}=\frac{1}{x^2-3x}$$

4.-

$$\frac{(x+y)^2}{y}-\frac{x(x-y)^2}{xy}=$$

Solución:

$$\frac{x(x+y)^2-x(x-y)^2}{xy}=\frac{x\left(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right)}{xy}=$$

$$=\frac{x(4xy)}{xy}=4x$$

5.-

$$\frac{a^4-2b^3+a^2b(b-2)}{a^4-a^2b-2b^2}=$$

Solución:

$$\frac{a^2(a^2-2b)+b^2(a^2-2b)}{(a^2-2b)(a^2+b)}=\frac{(a^2-2b)(a^2+b^2)}{(a^2-2b)(a^2+b)}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b}$$

6.- Multiplicar:

$$\left[a+\frac{1+5a}{a^2-5}\right]\times\left[a-\frac{a+5}{a+1}\right]=$$

Solución:

$$\left(\frac{a^3-5a+1+5a}{a^2-5}\right)\times\left(\frac{a^2+a-a-5}{a+1}\right)=\left(\frac{a^3+1}{a^2-5a}\right)\times\left(\frac{a^2-5}{a+1}\right)=$$

$$=\frac{a^3+1}{a+1}=\frac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}{(a+1)}=a^2-a+1$$

7.- Dividir:

$$\left[x^2+5x-4-\frac{x^3-29}{x-5}\right]\div\left[x+34+\frac{170-x^2}{x-5}\right]=$$

Solución:

Trabajaremos primero con el numerador:

$$\frac{\left(x^2+5x-4\right)(x-5)-x^3+29}{x-5}=\frac{x^3+5x^2-4x-5x^2-25x+20-x^3+29}{x-5}=$$

$$=\frac{-29x+49}{x-5}$$

Ahora, trabajaremos con el denominador:

$$\frac{(x+34)(x-5)+170-x^2}{x-5}=\frac{x^2-5x+34x-170+170-x^2}{x-5}=$$

$$=\frac{-29x}{x-5}$$

Dividiendo ahora numerador entre denominador:

$$\frac{\frac{-29x+49}{x-5}}{\frac{29x}{x-5}}=\frac{-29x+49}{29x}=\frac{49-29x}{29x}$$

8.- Descomponer la fracción siguiente en la suma o resta de tres fracciones simples irreducibles:

$$\frac{4x^2-5xy+y^2}{3x}=$$

Solución:

$$\frac{4x^2-5xy+y^2}{3x}=\frac{4x^2}{3x}-\frac{5xy}{3x}+\frac{y^2}{3x}=\frac{4x}{3}-\frac{5y}{3}+\frac{y^2}{3x}$$

9.- Descomponer la fracción siguiente en la suma o resta de tres fracciones simples irreducibles:

$$\frac{m-n-x}{mnx}=$$

Solución:

$$\frac{m-n-x}{mnx}=\frac{m}{mnx}-\frac{n}{mnx}-\frac{x}{mnx}=\frac{1}{nx}-\frac{1}{mx}-\frac{1}{mn}$$

10.- Probar que:

$$\frac{x^3-xy^2}{x-y}=x^2+xy$$

Solución:

$$\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{x-y}=\frac{x(x+y)(x-y)}{x-y}=x(x+y)=x^2+xy$$

11.- Probar que:

$$x^2-2x+1-\frac{9x-3x^2}{x-3}=\frac{x^3-1}{x-1}$$

Solución:

Trabajando con el lado derecho de la igualdad:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}=x^2+x+1$$

Trabajando ahora con el lado izquierdo de la igualdad:

$$x^2-2x+1-\frac{9x-3x^2}{x-3}=x^2-2x+1-\frac{3x(3-x)}{x-3}=x^2-2x+1+3x=$$

$$=x^2+x+1$$

Entonces los dos lados son iguales a x^2+x+1 y por lo tanto la igualdad se cumple.

12.- Probar que:

$$\frac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-3+\frac{2+4a}{2a+1}$$

Trabajando con el lado derecho de la igualdad:

$$a-3+\frac{2(2a+1)}{2a+1}=a-3+2=a-1$$

Si la igualdad existe:

$$\frac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-1$$

Entonces se debe cumplir que:

$$a^4-5a^2+4=\left(a^3+a^2-4a-4\right)(a-1)=a^4+a^3-4a^2-4a-a^3-a^2+4a+4=$$
$$=a^4-5a^2+4$$

Con lo que queda demostrado.

13.- Simplificar:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2-ab+b^2}=$$

Solución:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{\frac{a^3+b^3}{a+b}}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a(a+b)}{a^3+b^3}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a^3+b^3\right)+(a-b)\left(a^3+b^3\right)+2a(a+b)(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)\left(a^3+b^3\right)}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a^3+b^3\right)+(a-b)(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+2a(a+b)\left(a^2-b^2\right)}{(a-b)(a+b)\left(a^3+b^3\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^3+b^3\right)+(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)+2a\left(a^2-b^2\right)}{(a-b)\left(a^3+b^3\right)}=$$

$$=\frac{a^3+b^3+a^3-a^2b+ab^2-a^2b+ab^2-b^3+2a^3-2ab^2}{(a-b)\left(a^3+b^3\right)}=$$

$$=\frac{4a^3-2a^2b}{(a-b)(a^3+b^3)}$$

14.- $\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=$

Solución:

$$\left[\frac{a^2(1+a^2)-a^4}{(1-a^2)(1+a^2)}\right]\times\left[\frac{a^2(1-a)+1+a^3}{a^2}\right]=\frac{a^2+a^4-a^4}{(1-a^2)(1+a^2)}\times\frac{a^2-a^3+1+a^3}{a^2}=$$

$$=\frac{a^2}{(1-a^2)(1+a^2)}\times\frac{a^2+1}{a^2}=\frac{1}{1-a^2}$$

15.-

$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}\right)\times\left(\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\right)\times\left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right)=$$

Solución:

En primer lugar se debe buscar la factorización de la expresión siguiente:

$$2x^2+7x+3=\frac{2(2x^2+7x+3)}{2}=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}=$$

$$=\frac{(2x+1)(2x+6)}{2}=(2x+1)(x+3)$$

$$\left[\frac{(x+3)(x-3)}{(x-4)(x+3)}\times\frac{x(x+3)}{x-3}\right]\times\frac{a^2(x+4)(x-4)}{(2x+1)(x+3)}\times\left(\frac{2x+1}{a^2x^2}\right)=$$

$$=\frac{xa^2(x+4)}{a^2x^2}=\frac{x+4}{x}$$

16.- $\frac{3x^3-x^2-12x+4}{6x^4+x^3-25x^2-4x+4}=$

Solución: Aplicando Ruffini para factorizar el numerador:

	3	-1	-12	4
-2		-6	14	-4
	3	-7	2	$\boxed{0}$
2		6	-2	
	3	-1	$\boxed{0}$	

$$\left(3x^3-x^2-12x+4\right)=(x+2)(x-2)(3x-1)$$

Aplicando Ruffini al denominador:

	6	1	-25	-4	4
2		12	26	2	-4
	6	13	1	-2	$\boxed{0}$
-2		-12	-2	2	
	6	1	-1	$\boxed{0}$	

$$6x^4+x^3-25x^2-4x+4=(x-2)(x+2)\left(6x^2+x-1\right)$$

Luego, la fracción original se puede escribir como:

$$\frac{(x-2)(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-2)\left(6x^2+x-1\right)}=\frac{(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2x+1}$$

Nota: la división $\left(6x^2+x-1\right)\div(3x-1)=(2x+1)$

17.- $\dfrac{16-81x^2}{72x^2-5x-12}=$

Solución:

En primer lugar se factoriza la siguiente expresión:

$$72x^2-5x-12=\frac{72\left(72x^2-5x-12\right)}{12}=\frac{(72x)^2-5(72x)-864}{72}=$$

$$=\frac{(72x-32)(72x+27)}{72}=(9x-4)(8x+3)$$

Luego:

$$\frac{(4-9x)(4+9x)}{(9x-4)(8x+3)}=-\frac{(9x-4)(4+9x)}{(9x-4)(8x+3)}=-\frac{9x+4}{8x+3}$$

18.- $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}\right)\div\left(\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{6}{x^2+5x+6}\right)=$

Solución:

$$\left(\frac{(x+2)(x+3)-2x(x+3)+3x(x+2)}{x(x+2)(x+3)}\right)\div\frac{x(x+3)+x(x+2)+6x}{(x+2)(x+3)}=$$

$$\frac{x^2+5x+6-2x^2-6x+3x^2+6x}{x(x+2)(x+3)}\div\frac{x^2+3x+x^2+2x+6}{(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{2x^2+5x+6}{x(x+2)(x+3)}\div\frac{2x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)}=\frac{2x^2+5x+6}{x(x+2)(x+3)}\times\frac{(x+2)(x+3)}{2x^2+5x+6}=\frac{1}{x}$$

19.- $\dfrac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}+\dfrac{1+\frac{b}{a-b}}{2-\frac{a-3b}{a-b}}=$

Solución:

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}+\frac{\frac{a-b+b}{a-b}}{\frac{2a-2b-a+3b}{a-b}}=\frac{a^2b}{a\left(a+b\right)\left(a-b\right)}+\frac{a\left(a-b\right)}{\left(a-b\right)\left(a+b\right)}=$$

$$=\frac{ab}{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}+\frac{a}{a+b}=\frac{ab+a\left(a-b\right)}{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}=\frac{a^2+ab-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$$

20.- $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^2-36}{x}\div\dfrac{x}{x^2-4}\right)\times\dfrac{1}{x-\frac{36}{x}}\times\dfrac{1}{x-\frac{4}{x}}=$

S0lución:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{x^2-36}{x}\times\frac{x^2-4}{x}\right]\times\frac{1}{\frac{x^2-36}{x}}\times\frac{1}{\frac{x^2-4}{x}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2-36}{x}\times\frac{x^2-4}{x}\times\frac{x}{x^2-36}\times\frac{x}{x^2-4}\right]=\frac{1}{3}$$

21.- $\dfrac{\frac{3a}{\left(a-2b\right)^2}+\frac{5}{a-5b}+\frac{1}{a-2b}}{\frac{3a^2-14ab+10b^2}{a^2-4ab+4b^2}}=\dfrac{N}{D}$

Solución:

$$N=\frac{3a}{\left(a-2b\right)^2}+\frac{5}{a-5b}+\frac{1}{a-2b}=\frac{3a\left(a-5b\right)+5\left(a-2b\right)^2+\left(a-2b\right)\left(a-5b\right)}{\left(a-2b\right)^2\left(a-5b\right)}=$$

$$=\frac{3a^2-15ab+5a^2-20ab+20b^2+a^2-7ab+10b^2}{\left(a-2b\right)^2\left(a-5b\right)}=$$

$$=\frac{9a^2-42ab+30b^2}{\left(a-2b\right)^2\left(a-5b\right)}=\frac{3\left(3a^2-14ab+10b^2\right)}{\left(a-2b\right)^2\left(a-5b\right)}$$

$$D=\frac{3a^2-14ab+10b^2}{(a-2b)^2}$$

Luego:

$$\frac{N}{D}=\frac{\dfrac{3\left(3a^2-14ab+10b^2\right)}{(a-2b)^2(a-5b)}}{\dfrac{3a^2-14ab*10b^2}{(a-2b)^2}}=\frac{\dfrac{3}{(a-5b)}}{1}=\frac{3}{a-5b}$$

22.- $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}}\times\frac{x^2+1}{2a^2-2b}\div\frac{2x}{a^2-b}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-1}}{\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x^2-1}}\times\frac{x^2+1}{2\left(a^2-b\right)}\times\frac{a^2-b}{2x}=$$

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-2x+1+x^2+2x+1}\times\frac{x^2+1}{4x}=\frac{4x\left(x^2+1\right)}{\left(2x^2+2\right)4x}=\frac{4x\left(x^2+1\right)}{4x\times2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}$$

23.-

$$\frac{1}{3x-9}-\frac{1}{6x+12}-\frac{1}{2(x-3)^2}+\frac{1}{x-6+\dfrac{9}{x}}=$$

Solución:

$$\frac{1}{3(x-3)}-\frac{1}{6(x+2)}-\frac{1}{2(x-3)^2}+\frac{1}{\dfrac{x^2-6x+9}{x}}=\frac{1}{3(x-3)}-\frac{1}{6(x+2)}-\frac{1}{2(x-3)^2}+\frac{x}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2(x+2)(x-3)-(x-3)^2-3(x+2)+6x(x+2)}{6(x+2)(x-3)^2}=\frac{2\left(x^2-x-6\right)-x^2+6x-9-3x-6+6x^2+12x}{6(x+2)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-12-x^2+6x-9-3x-6+6x^2+12x}{6(x+2)(x-3)^2}=\frac{7x^2+13x-27}{6(x+2)(x-3)^2}$$

24.-

$$\frac{a-b+\dfrac{a^2+b^2}{a+b}}{a+b-\dfrac{a^2-2b^2}{a-b}}\times\frac{b+\dfrac{b^2}{a}}{a-b}\times\frac{1}{1+\dfrac{2a-b}{b}}=$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{a^2-b^2+a^2+b^2}{a+b}}{\dfrac{a^2-b^2-a^2+2b^2}{a-b}}\times\frac{ab+b^2}{a\left(a-b\right)}\times\frac{1}{\dfrac{b+2a-b}{b}}=$$

$$=\frac{\left(a-b\right)\left(2a^2\right)}{\left(a+b\right)\left(b^2\right)}\times\frac{b\left(a+b\right)}{a\left(a-b\right)}\times\frac{b}{2a}=1$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 55.

Tema: Ecuaciones fraccionarias de primer grado. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 141. Resolver las siguientes ecuaciones:

1.- $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$

Solución:

m.c.m. = 6.

Se multioplican ambos lados de la igualdad por 6:

$$6\times\left(\frac{x}{6}+5\right)=6\times\left(\frac{1}{3}-x\right)\Rightarrow x+30=2-6x\Rightarrow 7x=2-30=-28\Rightarrow x=-4$$

2.- $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$

Solución:

$$15\left(\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}\right)=0\Rightarrow 9x-10x+3=0\Rightarrow x=3$$

3.- $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$

Solución:

$$20x\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}\right)=20x\left(\frac{1}{5}\right)\Rightarrow 10+5x-2=4x\Rightarrow x=-8$$

4.- $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$

Solución:

$$12\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}\right)=12\left(\frac{x}{6}-\frac{5}{4}\right)\Rightarrow 6x+24-x=2x-15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=-39\Rightarrow x=-13$$

5.-

$\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}$

Solución:

$$20\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x\right)=20\left(\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}\right)\Rightarrow 15x-4+40x=25-3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 58x=29\Rightarrow x=\frac{29}{58}=\frac{1}{2}$$

6.-

$\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1$

Solución:

$$30x\left(\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}\right)=30x\left(\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1\right)=20-150=21x-45+30x=$$

$$=-85=51x\Rightarrow x=-\frac{85}{51}=-\frac{5}{3}$$

7.- $\frac{x-4}{3}-5=0$

Solución:

$x-4-15=0\Rightarrow x=19$

8.- $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}$

Solución:

$$12\left(x-\frac{x+2}{12}\right)=12\times\frac{5x}{2}\Rightarrow 12x-x-2=30x\Rightarrow 19x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{19}$$

9.- $x-\frac{5x-1}{3}=4x-\frac{3}{5}$

Solución:

$$15\left(x-\frac{5x-1}{3}\right)=15\left(4x-\frac{3}{5}\right)\Rightarrow 15x-25x+5=60x-9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70x=14\Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

10.- $10x-\frac{8x-3}{4}=2(x-3)$

Soluciuón:

$$40x-8x+3=8x-24\Rightarrow 24x=-27\Rightarrow x=-\frac{27}{24}=-\frac{9}{8}$$

11.- $\frac{x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x-4}{5}$

Solución:

$$60\left(\frac{x-2}{3}-\frac{x-8}{4}\right)=60\left(\frac{x-4}{5}\right)\Rightarrow 20x-40-15x+120=12x-48\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 128=7x\Rightarrow x=\frac{128}{7}$$

12.- $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$

Solución:

$$60\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}\right)=60\left(-\frac{x-5}{5}\right)\Rightarrow 30x-30-20x+40-15x+45=-12x+60\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x=5\Rightarrow x=\frac{5}{7}$$

13.- $x-(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$

Solución:

$$10x-10(5x-1)-7+5x=10\Rightarrow 10x-50x+10-7+5x=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -35x=7\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$$

14.- $2x-\frac{5x-6}{4}+\frac{1}{3}(x-5)=-5x$

Solución:

$$12\left[2x-\frac{5x-6}{4}+\frac{1}{3}(x-5)\right]=12(-5x)\Rightarrow 24x-15x+18+4x-20=-60x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 73x=2\Rightarrow x=\frac{2}{73}$$

15.- $4-\dfrac{10x+1}{6}=4x-\dfrac{16x+3}{4}$

Solución:

$$24\left(4-\frac{10x+1}{6}\right)=24\left(4x-\frac{16x+3}{4}\right)\Rightarrow 96-40x-4=96x-96x-18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 110=40x\Rightarrow x=\frac{110}{40}=\frac{11}{4}$$

16.- $\dfrac{1}{2}(x-1)-(x-3)=\dfrac{1}{3}(x+3)+\dfrac{1}{6}$

Solución:

$$6\left[\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)\right]=6\left[\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}\right]\Rightarrow 3x-3-6x+18=2x+6+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=5x\Rightarrow x=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

17.- $\dfrac{6x+1}{3}-\dfrac{11x-2}{9}-\dfrac{1}{4}(5x-2)=\dfrac{5}{6}(6x=1)$

Solución:

$$36\left[\frac{6x+1}{3}-\frac{11x-2}{9}-\frac{1}{4}(5x-2)\right]=36\times\frac{5}{6}(6x+1)\Rightarrow 72x+12-44x+8-45x+18=180x+30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=197x\Rightarrow x=\frac{8}{197}$$

18.- $\dfrac{4x+1}{3}=\dfrac{1}{3}(4x-1)-\dfrac{13+2x}{6}-\dfrac{1}{2}(x-3)$

Solución:

$$6\left[\frac{4x+1}{3}\right]=6\left[\frac{1}{3}(4x-1)-\frac{13+2x}{6}-\frac{1}{2}(x-3)\right]\Rightarrow 8x+2=8x-2-13-2x-3x+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=-8\Rightarrow x=-\frac{8}{5}$$

19.- $\frac{2}{5}(5x-1)+\frac{3}{10}(10x-3)=-\frac{1}{2}(x-2)-\frac{6}{5}$

Solución:

$$10\left[\frac{2}{5}(5x-1)+\frac{3}{10}(10x-3)\right]=10\left[-\frac{1}{2}(x-2)-\frac{6}{5}\right]\Rightarrow 20x-4+30x-9=-5x+10-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55x=11\Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

20.- $\frac{3x-1}{2}-\frac{5x+4}{3}-\frac{x+2}{8}=\frac{2x-3}{5}-\frac{1}{10}$

Solución:

$$120\left[\frac{3x-1}{2}-\frac{5x+4}{3}-\frac{x+2}{8}\right]=120\left[\frac{2x-3}{5}-\frac{1}{10}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180x-60-200x-160-15x-30=48x-72-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -166=83x\Rightarrow x=-2$$

21.- $\frac{7x-1}{3}-\frac{5-2x}{2x}=\frac{4x-3}{4}+\frac{1+4x^2}{3x}$

Solución:

$$12x\left[\frac{7x-1}{3}-\frac{5-2x}{2x}\right]=12x\left[\frac{4x-3}{4}+\frac{1+4x^2}{3x}\right]\Rightarrow 28x^2-4x-30+12x=12x^2-9x+4+16x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17x=34\Rightarrow x=2$$

22.- $\frac{2x+7}{3}-\frac{2\left(x^2-4\right)}{5x}-\frac{4x^2-6}{15x}=\frac{7x^2+6}{3x^2}$

Solución:

$$15x^2\left[\frac{2x+7}{3}-\frac{2\left(x^2-4\right)}{5x}-\frac{4x^2-6}{15x}\right]=15x^2\left(\frac{7x^2+6}{3x^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^3+35x^2-6x^3+24x-4x^3+6x=35x^2+30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x=30\Rightarrow x=1$$

23.- $\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$

Solución:

$$\frac{2}{15}(x+1)=\frac{1}{4}(x-6)\Rightarrow 60\left[\frac{2}{15}(x+1)\right]=60\left[\frac{1}{4}(x-6)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x+1)=15(x-6)\Rightarrow 8x+8=15x-90\Rightarrow 98=7x\Rightarrow x=\frac{98}{7}=14$$

24.- $\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{4}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{5}=0$

Solución:

$$\frac{2x-1}{10}-\frac{3x+2}{3}-\frac{(x-2)}{15}+\frac{1}{5}=0\Rightarrow 30\left(\frac{2x-1}{10}-\frac{3x-2}{3}-\frac{(x-2)}{15}+\frac{1}{5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-3-30x-20-2x+4+6=0\Rightarrow -26x=13\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

25.- $10-\frac{3x+5}{6}=3\frac{11}{16}-\frac{\frac{x}{2}}{4}$

Solución:

$$10-\frac{3x+5}{6}=\frac{47}{12}-\frac{x}{8}\Rightarrow 72\left(10-\frac{(3x+5)}{6}\right)=72\left(\frac{47}{12}-\frac{x}{8}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 720-36x-60=282-9x\Rightarrow 660-282=36x-9x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 378=27x\Rightarrow x=\frac{378}{27}=14$$

26.- $9x-2-7x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\frac{x}{2}}{2}+2\frac{3}{4}$

Solución:

$$9x-2-7x\left(\frac{2-x}{2x}\right)=\frac{\frac{2+x}{2}}{2}+\frac{11}{4}\Rightarrow 9x-2-7\left(\frac{2-x}{2}\right)=\frac{2+x}{4}+\frac{11}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left[9x-2-7\left(\frac{2-x}{2}\right)\right]=4\left[\left(\frac{2+x}{4}\right)+\frac{11}{4}\right]\Rightarrow 36x-8-28+14x=2+x+11\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x=49\Rightarrow x=\frac{49}{49}=1$$

27.- $\frac{3x}{8}-\frac{7}{10}-\frac{12x-5}{16}-\frac{2x-3}{20}+\frac{4x+9}{4}+\frac{7}{80}=$

Solución:

m.c.m. = 80.

$$80\left[\frac{3x}{8}-\frac{7}{10}-\frac{12x-5}{16}-\frac{2x-3}{20}+\frac{4x+9}{4}+\frac{7}{80}\right]=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 30x-56-60x+25-8x+12+80x+180+7=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 42x+168=0\Rightarrow x=-\frac{168}{42}=-4$$

28.- $\frac{5x}{4}-\frac{3}{17}(x-20)-(2x-1)=\frac{x+24}{34}$

m.c.m. de los denominadores = 68.

$$68\left[\frac{5x}{4}-\frac{3}{17}(x-20)-(2x-1)\right]=68\left[\frac{x+24}{34}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 85x-12x+240-136x+68=2x+48\Rightarrow 240+68-48=2x+12x+136x-85x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 260=65x\Rightarrow x=\frac{260}{65}=\frac{52}{13}=4$$

29.- $5+\frac{x}{4}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\left(10-\frac{5x}{3}\right)$

Solución:

$$\frac{20+x}{4}=\frac{4-x}{6}-\frac{2}{3}+\frac{30-5x}{12}\Rightarrow 12\left(\frac{20+x}{4}\right)=12\left[\left(\frac{4-x}{6}\right)-\frac{2}{3}+\frac{30-5x}{12}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60+3x=8-2x-8+30-5x\Rightarrow 10x=30-60=-30\Rightarrow x=-3$$

30.- $\frac{5(x+2)}{12}+\frac{4}{9}-\frac{22-x}{36}=3x-20-\frac{8-x}{12}-\frac{20-3x}{18}$

Solución:

Continúa en la próxima página

$$36\left[\frac{5(x+2)}{12}+\frac{4}{9}-\frac{22-x}{36}\right]=36\left[3x-20-\frac{8-x}{12}-\frac{20-3x}{18}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15(x+2)+16-22+x=108x-720-24+3x-40+6x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x+30+16-22+x=108x-720-24+3x-40+6x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30+16-22+720+24+40=108x+3x+6x-15x-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 808=101x\Leftrightarrow x=\frac{808}{101}=8$$

31.- $\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{3}\right)=7-\left(x-\frac{x}{2}\right)$

Solución:

$$\left(\frac{6-x}{2}\right)-\left(\frac{3-x}{3}\right)=7-\left(\frac{2x-x}{2}\right)\Rightarrow 6\left[\left(\frac{6-x}{2}\right)-\left(\frac{3-x}{3}\right)\right]=42-6\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18-3x-6+2x=42-3x\Rightarrow 2x=42-18+6=30\Rightarrow x=\frac{30}{2}=15$$

32.- $(x+3)(x-3)-x^2-\frac{5}{4}=\left(x-\frac{x}{5}\right)-\left(3x-\frac{3}{4}\right)$

Solución:

$$x^2-9-x^2-\frac{5}{4}=\left(\frac{5x-x}{5}\right)-\left(\frac{12x-3}{4}\right)\Rightarrow -9-\frac{5}{4}=\left(\frac{4x}{5}\right)-\left(\frac{12x-3}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{41}{4}=\left(\frac{4x}{5}\right)-\left(\frac{12x-3}{4}\right)\Rightarrow -20\times\frac{41}{4}=20\left[\frac{4x}{5}-\left(\frac{12x-3}{4}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -205=16x-60x+15\Rightarrow -220=-44x\Rightarrow x=\frac{220}{44}=5$$

33.- $2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$

Solución:

$$2x-\left(\frac{16x-3x+1}{8}\right)=\frac{2x+4}{18}-\frac{1}{4}\Rightarrow 144\left[2x-\frac{13x+1}{8}\right]=144\left[\frac{2x+4}{18}-\frac{1}{4}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 288x-18(13x+1)=8(2x+4)-36\Rightarrow 288x-234x-18=16x+32-36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 38x=14\Rightarrow x=\frac{14}{38}=\frac{7}{19}$$

Ejercicio 142. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores compuestos.

1.- $\frac{3}{5}+\frac{3}{2x-1}=0$

Solución:

$$\frac{3}{5}=-\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{1-2x}\Rightarrow 3(1-2x)=15\Rightarrow 3-6x=15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -6x=12\Rightarrow x=-2$$

2.- $\frac{2}{4x-1}=\frac{3}{4x+1}$

Solución:

$$2(4x+1)=3(4x-1)\Rightarrow 8x+2=12x-3\Rightarrow 5=4x\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

3.- $\frac{5}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$

Solución:

$$5(x-1)=(x+1)(x-1)\Rightarrow 5=x+1\Rightarrow x=5-1\Rightarrow x=4$$

4.- $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}=0$

Solución:

$$\frac{3}{x+1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}\Rightarrow 3(x-1)(x+1)=(x+1)\Rightarrow 3(x-1)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-3=1\Rightarrow 3x=4\Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

5.- $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$

Solución:

$$(5x+8)(3x-4)=(3x+4)(5x+2)\Rightarrow 15x^2-20x+24x-32=15x^2+6x+20x+8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15x^2+4x-32=15x^2+26x+8\Rightarrow -32-8=26x-4x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -40=22x\Rightarrow x=-\frac{40}{22}=-\frac{20}{11}$$

6.- $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19}=2$

Solución:

$$10x^2-5x+8=2\left(5x^2+9x-19\right)=10x^2+18x-38\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+38=18x+5x\Rightarrow 46=23x\Rightarrow x=\frac{46}{23}=2$$

7.- $\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12}$

Solución:

$$\frac{1}{3\left(x-1\right)}+\frac{1}{4\left(x+1\right)}=\frac{1}{12\left(x-1\right)}$$

Solución:

$$12\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left[\frac{1}{3\left(x-1\right)}+\frac{1}{4\left(x+1\right)}\right]=12\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left[\frac{1}{12\left(x-1\right)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(x+1\right)+3\left(x-1\right)=x+1\Rightarrow 4x+4+3x-3=x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$$

8.- $\frac{x}{4}-\frac{x^2-8x}{4x-5}=\frac{7}{4}$

Solución:

$$\frac{x\left(4x-5\right)-4\left(x^2-8x\right)}{4\left(4x-5\right)}=\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{4x^2-5x-4x^2+32x}{4\left(4x-5\right)}=\frac{7}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{27x}{4x-5}=7\Rightarrow 27x=28x-35=28x-27x=35\Rightarrow x=35$$

9.- $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$

Solución:

$$\frac{(2x-9)(2x-1)+10(2x-3)}{10(2x-1)}=\frac{x}{5}\Rightarrow\frac{4x^2-2x-18x+9+20x-30}{10(2x-1)}=\frac{x}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\left(4x^2-21\right)=10x(2x-1)\Rightarrow 20x^2-105=20x^2-10x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x=105\Rightarrow x=\frac{105}{10}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$$

10.- $\dfrac{(3x-1)^2}{x-1}=\dfrac{18x-1}{2}$

Solución:

$$2(3x-1)^2=(x-1)(18x-1)\Rightarrow 2\left(9x^2-6x+1\right)=18x^2-x-18x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x^2-12x+2=18x^2-19x+1\Rightarrow 19x-12x=1-2\Rightarrow x=-\frac{1}{7}$$

11.- $\dfrac{2x+7}{5x+2}-\dfrac{2x-1}{5x-4}=0$

Solución:

$$\frac{2x+7}{5x+2}=\frac{2x-1}{5x-4}\Rightarrow(2x+7)(5x-4)=(5x+2)(2x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^2-8x+35x-28=10x^2+4x-5x-2\Rightarrow 28x=26\Rightarrow x=\frac{26}{28}=\frac{13}{14}$$

12.- $\dfrac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}-1=0$

Solución:

$$\frac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}=1\Rightarrow(5x-2)(7x+3)=7x(5x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35x^2+15x-14x-6=35x^2-7x\Rightarrow 8x=6\Rightarrow x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

13.- $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{8}{x^2-7x+12}$

Solución:

$$\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x-3}+\frac{8}{(x-3)(x-4)}\Rightarrow (x-3)(x-4)\left(\frac{3}{x-4}\right)=(x-3)(x-4)\left[\frac{2}{x-3}+\frac{8}{(x-3)(x-4)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x-3)=2(x-4)+8\Rightarrow 3x-9=2x-8+8\Rightarrow 3x-2x=9\Rightarrow x=9$$

14.- $\frac{6x-1}{18}-\frac{3(x+2)}{5x-6}=\frac{1+3x}{9}$

Solución:

$$\frac{(6x-1)(5x-6)-18(3x+6)}{18(5x-6)}=\frac{1+3x}{9}\Rightarrow \frac{30x^2-36x-5x+6-54x-108}{2(5x-6)}=1+3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x^2-95x-102=(10x-12)(3x+1)=30x^2+10x-36x-12=30x^2-26x-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -69x=102-12=90\Rightarrow x=-\frac{90}{69}=-\frac{30}{23}=-1\frac{7}{23}$$

15.- $\frac{5}{1+x}-\frac{3}{1-x}-\frac{6}{1-x^2}=0$

Solución:

$$\frac{5}{1+x}-\frac{3}{1-x}=\frac{6}{(1+x)(1-x)}\Rightarrow \frac{5(1-x)-3(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\frac{6}{(1+x)(1-x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5-5x-3-3x=6\Rightarrow 2-8x=6\Rightarrow -8x=4\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

16.- $\frac{1+2x}{1+3x}-\frac{1-2x}{1-3x}=-\frac{3x-14}{1-9x^2}$

Solución:

$$\frac{(1+2x)(1-3x)-(1+3x)(1-2x)}{1-9x^2}=-\frac{3x-14}{1-9x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-3x+2x-6x^2-\left(1-2x+3x-6x^2\right)=14-3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x-6x^2-1-x+6x^2=14-3x\Rightarrow x=14$$

17.- $\frac{3x-1}{x^2+7x+12}=\frac{1}{2x+6}+\frac{7}{6x+24}$

Solución:

$$\frac{3x-1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2(x+3)}+\frac{7}{6(x+4)}$$

Solución:

Se debe multiplicar ambos miembros de la igualdad por $6(x+3)(x+4)$

$$6(3x-1)=3(x+4)+7(x+3)\Rightarrow 18x-6=3x+12+7x+21$$

$$\Rightarrow 8x=39\Rightarrow x=\frac{39}{8}=4\frac{7}{8}$$

18.- $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{2x-2}=-\dfrac{3}{2x+2}$

Solución:

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)}=-\frac{3}{2(x+1)}\Rightarrow\frac{2-3(x-1)}{2(x-1)^2}=-\frac{3}{2(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5-3x}{2(x-1)^2}=-\frac{3}{2(x+1)}\Rightarrow(5-3x)(x+1)=-3(x-1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+5-3x^2-3x=-3x^2+6x-3\Rightarrow -4x=-8\Rightarrow x=2$$

19.- $\dfrac{5x+13}{15}-\dfrac{4x+5}{5x-15}=\dfrac{x}{3}$

Solución:

$$\frac{5x+13}{15}-\frac{4x+5}{5(x-3)}=\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{(5x+13)(x-3)-3(4x+5)}{15(x-3)}=\frac{x}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5x^2-15x+13x-39-12x-15}{15(x-3)}=\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{5x^2-14x-54}{15(x-3)}=\frac{x}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2-42x-162=15x^2-45x\Rightarrow 3x=162\Rightarrow x=\frac{162}{3}=54$$

20.- $\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{x-4}{3x-2}=\dfrac{2}{3}$

Solución:

$$\frac{(2x-1)(3x-2)-(2x+1)(x-4)}{(2x+1)(3x-2)}=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6x^2-4x-3x+2-2x^2+8x-x+4}{(2x+1)(3x-2)}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{4x^2+6}{(2x+1)(3x-2)}=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$12x^2+18=2\left(6x^2-4x+3x-2\right)=12x^2-2x-4\Rightarrow x=-\frac{22}{2}=-11$$

21.- $\dfrac{4x+3}{2x-5}-\dfrac{3x+8}{3x-7}=1$

Solución:

$$(4x+3)(3x-7)-(2x-5)(3x+8)=(2x-5)(3x-7)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2-28x+9x-21-6x^2-16x+15x+40=6x^2-14x-15x+35\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x=16\Rightarrow x=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$$

22.- $\dfrac{10x-7}{15x+3}=\dfrac{3x+8}{12}-\dfrac{5x^2-4}{20x+4}$

Solución:

$$\frac{10x-7}{3(5x+1)}+\frac{5x^2-4}{4(5x+1)}=\frac{3x+8}{12}\Rightarrow\frac{4(10x-7)+3\left(5x^2-4\right)}{12(5x+1)}=\frac{3x+8}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{40x-28+15x^2-12}{12(5x+1)}=\frac{3x+8}{12}\Rightarrow\frac{15x^2+40x-40}{5x+1}=3x+8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2+40x-40=15x^2+40x+3x+8\Rightarrow -48=3x\Rightarrow x=-\frac{48}{3}=-16$$

23.- $\dfrac{4x-1}{5}+\dfrac{x-2}{2x-7}=\dfrac{8x-3}{10}-1\dfrac{3}{10}$

Solución:

$$\frac{4x-1}{5}+\frac{x-2}{2x-7}=\frac{8x-3}{10}-\frac{13}{10}\Rightarrow\frac{x-2}{2x-7}=\frac{8x-3}{10}-\frac{13}{10}-\frac{2(4x-1)}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-2}{2x-7}=\frac{8x-3-13-8x+2}{10}=\frac{-14}{10}=-\frac{7}{5}\Rightarrow 5(x-2)=7(7-2x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-10=49-14x\Rightarrow 19x=59\Rightarrow x=\frac{59}{19}=3\frac{2}{19}$$

24.- $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{2x-2}-\dfrac{2\frac{1}{3}}{2x-4}$

Solución:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{2(x-1)}-\frac{\frac{7}{3}}{2(x-2)}\Rightarrow\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{2(x-1)}-\frac{7}{6(x-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-1)(x-2)\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}\right]=6(x-1)(x-2)\left[\frac{3}{2(x-1)}-\frac{7}{6(x-2)}\right]=$$

$$\Rightarrow 6(x-2)-12(x-1)=9(x-2)-7(x-1)\Rightarrow 6x-12-12x+12=9x-18-7x+7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x=-11\Rightarrow x=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$$

25.- $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{5x-20}=\dfrac{1\frac{1}{2}}{3x-12}-\dfrac{2}{x+3}$

Solución:

$$\frac{1}{x+3}-\frac{2}{5(x-4)}=\frac{\frac{3}{2}}{3(x-4)}-\frac{2}{x+3}\Rightarrow\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x+3}=\frac{3}{6(x-4)}+\frac{2}{5(x-4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{x+3}=\frac{15+12}{30(x-4)}=\frac{27}{30(x-4)}=\frac{9}{10(x-4)}\Rightarrow 3\times10(x-4)=9(x+3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x-120=9x+27\Rightarrow 21x=147\Rightarrow x=\frac{147}{21}=7$$

26.- $\dfrac{1}{6-2x}-\dfrac{4}{5-5x}=\dfrac{10}{12-4x}-\dfrac{3}{10-10x}$

Solución:

$$\frac{1}{2(3-x)}-\frac{4}{5(1-x)}=\frac{10}{4(3-x)}-\frac{3}{10(1-x)}$$

El m.c.m. de los denominadores es: $20(3-x)(1-x)$; entonces, multiplicamos ambos lados de la igualdad por el m.c.m.:

$$20(3-x)(1-x)\left[\frac{1}{2(3-x)}-\frac{4}{5(1-x)}\right]=20(3-x)(1-x)\left[\frac{10}{4(3-x)}-\frac{3}{10(1-x)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(1-x)-16(3-x)=50(1-x)-6(3-x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10-10x-48+16x=50-50x-18+6x\Rightarrow 50x=70\Rightarrow x=\frac{70}{50}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$$

27.- $\frac{2}{3}-\frac{6x^2}{9x^2-1}=\frac{2}{3x-1}$

Solución:

$$\frac{2}{3}-\frac{6x^2}{(3x+1)(3x-1)}=\frac{2}{3x-1}$$

El m.c.m. de todos los denominadores es: $3(3x+1)(3x-1);$ entonces:

$$3(3x+1)(3x-1)\left[\frac{2}{3}-\frac{6x^2}{(3x+1)(3x-1)}\right]=3(3x+1)(3x-1)\left(\frac{2}{3x-1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(3x+1)(3x-1)-18x^2=6(3x+1)\Rightarrow 18x^2-2-18x^2=18x+6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2=18x+6\Rightarrow -8=18x\Rightarrow x=-\frac{4}{9}$$

28.- $\frac{5x^2-27x}{5x+3}-\frac{1}{x}=x-6$

Solución:

El m.c.m. de los denominadores es: $x(5x+3);$ entonces:

$$x(5x+3)\left[\frac{5x^2-27x}{5x+3}-\frac{1}{x}\right]=x(5x+3)(x-6)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^3-27x^2-5x-3=5x^3-30x^2+3x^2-18x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x-5x=3\Rightarrow 13x=3\Rightarrow x=\frac{3}{13}$$

29.- $\frac{4x+1}{4x-1}-\frac{6}{16x^2-1}=\frac{4x-1}{4x+1}$

Solución:

m.c.m. de todos los denominadores: $16x^2-1=(4x+1)(4x-1)$; entonces:

$$(4x+1)(4x-1)\left[\frac{4x+1}{4x-1}-\frac{6}{(4x+1)(4x-1)}\right]=(4x+1)(4x-1)\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(4x+1)^2-6=(4x-1)^2\Rightarrow 16x^2+8x+1-6=16x^2-8x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x=6\Rightarrow x=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

30.- $3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=\frac{5x(x-1)}{x^2-3x-4}$

Solución:

$$\frac{3(x-1)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{x-4}=\frac{5x(x-1)}{(x+1)(x-4)}$$

Entonces:

$$\frac{3(x-1)(x-4)+2(x+1)^2}{(x+1)(x-4)}=\frac{5x(x-1)}{(x+1)(x-4)}$$

Si los denominadores son iguales, los numeradores tienen que ser iguales:

$$3\left(x^2-5x+4\right)+2\left(x^2+2x+1\right)=5x^2-5x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-15x+12+2x^2+4x+2=5x^2-5x\Rightarrow -6x=-14\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$

31.- $2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)=\frac{x^2+78}{2x^2-x-6}$

Solución:

En primer lugar se factoriza la siguiente expresión:

$$2x^2-x-6=\frac{2\left(2x^2-x-6\right)}{2}=\frac{(2x)^2-(2x)-12}{2}=$$

$$=\frac{(2x-4)(2x+3)}{2}=(x-2)(2x+3)$$

Luego:

$$(x-2)(2x+3)\left[\frac{2(x+2)}{x-2}-\frac{3(x-2)}{2x+3}\right]=(x-2)(2x+3)\left[\frac{x^2+78}{(x-2)(2x+3)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+2)(2x+3)-3(x-2)^2=x^2+78\Rightarrow 4x^2+6x+8x+12-3x^2+12x-12=x^2+78\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26x=78\Rightarrow x=\frac{78}{26}=3$$

32.- $\dfrac{1}{3x^2+3x-28}-\dfrac{1}{x^2+12x+35}=\dfrac{3}{x^2+x-20}$

Solución:

$$\frac{1}{(x-4)(x+7)}-\frac{1}{(x+5)(x+7)}=\frac{3}{(x+5)(x-4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+5)(x+7)\left[\frac{1}{(x-4)(x+7)}-\frac{1}{(x+5)(x+7)}\right]=(x-4)(x+5)(x+7)\left[\frac{3}{(x-4)(x+5)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5-x+4=3(x+7)\Rightarrow 9=3x+21\Rightarrow x=-\frac{12}{3}=-4$$

33.- $\dfrac{x-2}{x^2+8x+7}=\dfrac{2x-5}{x^2-49}-\dfrac{x-2}{x^2-6x-7}$

Solución:

$$\frac{x-2}{(x+1)(x+7)}=\frac{2x-5}{(x+7)(x-7)}-\frac{x-2}{(x+1)(x-7)}$$

Entonces:

$$(x+1)(x-7)(x+7)\left[\frac{x-2}{(x+1)(x+7)}\right]=(x+1)(x-7)(x+7)\left[\frac{2x-5}{(x-7)(x+7)}-\frac{x-2}{(x+1)(x-7)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-7)(x-2)=(2x-5)(x+1)-(x-2)(x+7)\Rightarrow x^2-9x+14=2x^2-3x-5-x^2-5x+14\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=-5\Rightarrow x=5$$

34.- $\dfrac{4x+5}{15x^2+7x-2}-\dfrac{2x+3}{12x^2-7x-10}-\dfrac{2x-5}{20x^2-29x+5}=0$

Solución:

En primer lugar se deben factorizar los trinomios denominadores:

(a).-

$$15x^2+7x-2=\frac{15\left(15x^2+7x-2\right)}{15}=\frac{\left(15x\right)^2+7\left(15x\right)-30}{15}=$$
$$=\frac{\left(15x-3\right)\left(15x+10\right)}{15}=\left(5x-1\right)\left(3x+2\right)$$

(b).-

$$12x^2-7x-10=\frac{12\left(12x^2-7x-10\right)}{12}=\frac{\left(12x\right)^2-7\left(12x\right)-120}{12}=$$
$$=\frac{\left(12x+8\right)\left(12x-15\right)}{12}=\left(3x+2\right)\left(4x-5\right)$$

©.-

$$20x^2-29x+5=\frac{20\left(20x^2-29x+5\right)}{20}=\frac{\left(20x\right)^2-29\left(20x\right)+100}{20}=$$
$$=\frac{\left(20x-4\right)\left(20x-25\right)}{20}=\left(5x-1\right)\left(4x-5\right)$$

Ahora:

$$\frac{4x+5}{\left(5x-1\right)\left(3x+2\right)}-\frac{2x+3}{\left(3x+2\right)\left(4x-5\right)}-\frac{2x-5}{\left(5x-1\right)\left(4x-5\right)}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(5x-1\right)\left(3x+2\right)\left(4x-5\right)\left[\frac{4x+5}{\left(5x-1\right)\left(3x+2\right)}-\frac{2x+3}{\left(3x+2\right)\left(4x-5\right)}-\frac{2x-5}{\left(5x-1\right)\left(4x-5\right)}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(4x+5\right)\left(4x-5\right)-\left(2x+3\right)\left(5x-1\right)-\left(2x-5\right)\left(3x+2\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow16x^2-25-\left(10x^2-2x+15x-3\right)-\left(6x^2+4x-15x-10\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow16x^2-25-10x^2+2x-15x+3-6x^2-4x+15x+10=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-2x-12=0\Rightarrow x=-\frac{12}{2}=-6$$

35.- $\dfrac{7}{2x+1}-\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3\left(x+1\right)}{2x^2+9x+4}$

Solución:

En primer lugar, se busca factorizar el trinomio denominador:

$$2x^2+9x+4=\frac{2\left(2x^2+9x+4\right)}{2}=\frac{\left(2x\right)^2+9\left(2x\right)+8}{2}=$$

$$=\frac{\left(2x+1\right)\left(2x+8\right)}{2}=\left(2x+1\right)\left(x+4\right)$$

El m.c.m. de todos los denominadores es: $\left(2x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+1\right)$; entonces, se multiplica ambos lados de la igualdad por el m.c.m.:

$$\left(2x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+1\right)\left[\frac{7}{2x+1}-\frac{3}{x+4}\right]=\left(2x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+1\right)\left[\frac{2}{x+1}-\frac{3\left(x+1\right)}{\left(2x+1\right)\left(x+4\right)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\left(x+4\right)\left(x+1\right)-3\left(2x+1\right)\left(x+1\right)=2\left(2x+1\right)\left(x+4\right)-3\left(x+1\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\left(x^2+5x+4\right)-3\left(2x^2+3x+1\right)=2\left(2x^2+9x+4\right)-3\left(x^2+2x+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2+35x+28-6x^2-9x-3=4x^2+18x+8-3x^2-6x-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x=-20\Rightarrow x=-\frac{20}{14}=-\frac{10}{7}=-1\frac{3}{7}$$

36.- $\dfrac{\left(x+3\right)^2}{\left(x-3\right)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2\left(7x+1\right)}{x^2-2x-3}$

Solución:

$$\frac{\left(x+3\right)^2}{\left(x-3\right)^2}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{2\left(7x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-3\right)}$$

El m.c.m. de los denominadores es: $\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)$; entonces:

$$\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)\times\frac{\left(x+3\right)^2}{\left(x-3\right)^2}=\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{2\left(7x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-3\right)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x+1\right)\left(x+3\right)^2=\left(x-3\right)^2\left(x-1\right)+\left(x-3\right)\times2\times\left(7x+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x+1\right)\left(x^2+6x+9\right)=\left(x^2-6x+9\right)\left(x-1\right)+2\left(7x^2-20x-3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+6x^2+9x+x^2+6x+9=x^3-6x^2+9x-x^2+6x-9+14x^2-40x-6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40x=-24\Rightarrow x=-\frac{24}{40}=-\frac{3}{5}$$

37.- $\dfrac{x-4}{x+5}-\dfrac{x+1}{x-2}=-\dfrac{12\left(x+3\right)}{\left(x+5\right)^2}$

Solución:

$$\frac{(x-4)(x-2)-(x+1)(x+5)}{(x+5)(x-2)}=-\frac{12(x+3)}{(x+5)^2}\Rightarrow\frac{x^2-6x+8-x^2-6x-5}{(x+5)(x-2)}=\frac{-12x-36}{(x+5)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-12x+3}{(x-2)}=\frac{-12x-36}{x+5}\Rightarrow$$

$$(x+5)(3-12x)=(x-2)(-12x-36)\Rightarrow 3x-12x^2+15-60x=-12x^2-36x+24x+72\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -45x=57\Rightarrow x=-\frac{57}{45}=-\frac{19}{15}=-1\frac{4}{15}$$

38.- $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}$

Solución:

$$\frac{(x-3)^2-(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-3)}=\frac{(x+2)^2-(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-6x+9-x^2+6x-8}{(x-4)(x-3)}=\frac{x^2+4x+4-x^2-4x-3}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x-4)(x-3)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow x^2+3x+2=x^2-7x+12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x=10\Rightarrow x=\frac{10}{10}=1$$

39.- $\frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x+5}{x-1}-\frac{x}{x+4}$

Solución:

$$\frac{(x+6)(x-3)-(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\frac{(x-5)(x+4)-x(x-1)}{(x-1)(x+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+3x-18-x^2-3x-2}{(x+2)(x-3)}=\frac{x^2-x-20-x^2+x}{(x-1)(x+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-20}{(x+2)(x-3)}=\frac{-20}{(x-1)(x+4)}\Rightarrow x^2+3x-4=x^2-x-6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x=-2\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 56.

Tema: Ecuaciones literales de primer grado con una incógnita. Enteras y fraccionarias(Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 143. Resolver las siguientes ecuaciones literales:

1.- $a(x+1)=1$

Solución:

$$x+1=\frac{1}{a}\Rightarrow x=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$$

2.- $ax-4=bx-2$

Solución:

$$ax-bx=4-2=2\Rightarrow x(a-b)=2\Rightarrow x=\frac{2}{a-b}$$

3.- $ax+b^2=a^2-bx$

Solución:

$$ax+bx=a^2-b^2=(a+b)(a-b)\Rightarrow x(a+b)=(a+b)(a-b)\Rightarrow x=a-b$$

4.- $3(2a-x)+ax=a^2+9$

Solución:

$$6a-3x+ax=a^2+9\Rightarrow ax-3x=a^2-6a+9=(a-3)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(a-3)=(a-3)^2\Rightarrow x=a-3$$

5.- $a(x+b)+x(b-a)=2b(2a-x)$

Solución:

$$ax+ab+x(b-a)=4ab-2bx\Rightarrow ax+x(b-a)+2bx=4ab-ab\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax+bx-ax+2bx=3ab\Rightarrow 3bx=3ab\Rightarrow x=a$$

6.- $(x-a)^2-(x+a)^2=a(a-7x)$

Solución:

$$x^2-2ax+a^2-x^2-2ax-a^2=a^2-7ax\Rightarrow -4ax=a^2-7ax\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3ax=a^2\Rightarrow x=\frac{a}{3}$$

7.- $ax-a(a+b)=-x-(1+ab)$

Solución:

$$ax+x=a(a+b)-(1+ab)\Rightarrow x(a+1)=a^2+ab-1-ab=a^2-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1$$

8.- $a^2(a-x)-b^2(x-b)=b^2(x-b)$

Solución:

$$a^3-a^2x-b^2x+b^3=b^2x-b^3\Rightarrow a^3+2b^3=x\left(a^2+2b^2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{a^3+2b^3}{a^2+2b^2}$$

9.- $(x+a)(x-b)-(x+b)(x-2a)=b(a-2)+3a$

Solución:

$$x^2+ax-bx-ab-x^2+2ax-bx+2ab=ab-2b+3a\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3ax-2bx+ab=ab-2b+3a\Rightarrow x(3a-2b)=3a-2b\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{3a-2b}{3a-2b}=1$$

10.- $x^2+a^2=(a+x)^2-a(a-1)$

Solución:

$$x^2+a^2=a^2+2ax+x^2-a^2+a\Rightarrow a^2=2ax+a\Rightarrow a^2-a=2ax\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{a(a-1)}{2a}=\frac{a-1}{2}$$

11.- $m(n-x)-m(n-1)=m(mx-a)$

Solución: se puede dividir ambos lados de la igualdad por $\boldsymbol{m}$:

$$(n-x)-(n-1)=(mx-a)\Rightarrow n-x-n+1=mx-a\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+1=x(m+1)\Rightarrow x=\frac{a+1}{m+1}$$

12.-
$$x-a+2=2ax-3(a+x)-2(a-5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-a+2=2ax-3a-3x-2a+10\Rightarrow 4x-2ax=-4a+8\Rightarrow$$
$$x(4-2a)=2(4-2a)\Rightarrow x=\frac{2(4-2a)}{(4-2a)}=2$$

13.- $a(x-a)-2bx=b(b-2a-x)$

Solución:

$$ax-a^2-2bx=b^2-2ab-bx\Rightarrow ax-bx=a^2+b^2-2ab\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(a-b)=(a-b)^2\Rightarrow x=\frac{(a-b)^2}{a-b}=a-b$$

14.- $ax+bx=(x+a-b)^2-(x-2b)(x+2a)$

Solución:

Primero se obtiene el resultado de $(x+a-b)^2$:

$$\left(x+a\right)^2-2\left(x+a\right)b+b^2=x^2+2ax+a^2-2bx-2ab+b^2$$

Entonces:

$$ax+bx=x^2+2ax+a^2-2bx-2ab+b^2-x^2-2ax+2bx+4ab\Rightarrow$$

$$ax+bx=a^2+2ab+b^2\Rightarrow x\left(a+b\right)=\left(a+b\right)^2\Rightarrow x=\frac{\left(a+b\right)^2}{a+b}=a+b$$

15.- $x\left(a+b\right)-3-a\left(a-2\right)=2\left(x-1\right)-x\left(a-b\right)$

Solución:

$$x\left(a+b\right)+x\left(a-b\right)-2\left(x-1\right)=3+a\left(a-2\right)\Rightarrow ax+bx+ax-bx-2x+2=3+a^2-2a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax-2x=1+a^2-2a\Rightarrow 2x\left(a-1\right)=\left(a-1\right)^2\Rightarrow x=\frac{a-1}{2}$$

16.- $\left(m+4x\right)\left(3m+x\right)=\left(2m-x\right)^2+m\left(15x-m\right)$

Solución:

$$3m^2+mx+12mx+4x^2=4x^2-4mx+m^2+15mx-m^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mx=-3m^2\Rightarrow x=-\frac{3m}{2}$$

17.- $a^2\left(a-x\right)-a^2\left(a+1\right)-b^2\left(b-x\right)-b\left(1-b^2\right)+a\left(1+a\right)=0$

Solución:

$$a^3-a^2x-a^3-a^2-b^3+b^2x-b+b^3+a+a^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(b^2-a^2\right)=b-a\Rightarrow x=\frac{\left(b-a\right)}{\left(b+a\right)\left(b-a\right)}=\frac{1}{b+a}$$

18.- $\left(ax-b\right)^2=\left(bx-a\right)\left(a+x\right)-x^2\left(b-a^2\right)+a^2+b\left(1-2b\right)$

Solución:

$$a^2x^2-2abx+b^2=abx+bx^2-a^2-ax-bx^2+a^2x^2+a^2++b-2b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3abx+ax=b-3b^2\Rightarrow ax\left(1-3b\right)=b\left(1-3b\right)\Rightarrow x=\frac{b\left(1-3b\right)}{a\left(1-3b\right)}=\frac{b}{a}$$

19.- $\left(x+b\right)^2-\left(x-a\right)^2-\left(a+b\right)^2=0$

Solución:

$$x^2+2bx+b^2-x^2+2ax-a^2-a^2-2ab-b^2=0 \Rightarrow$$
$$2x(b+a)=2a^2+2ab=2a(a+b) \Rightarrow x=\frac{2a(a+b)}{2(a+b)}=a$$

20.- $(x+m)^3-12m^3=-(x-m)^3+2x^3$

Solución:

$$x^3+3mx^2+3m^2x+m^3-12m^3=-x^3+3mx^2-3m^2x+m^3+2x^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6m^2x=12m^3 \Rightarrow x=\frac{12m^3}{6m^2}=2m$$

Ejercicio 144. Ecuaciones literales fraccionarias:

1.- $\frac{m}{x}-\frac{1}{m}=\frac{2}{m}$

Solución:

$$mx\left(\frac{m}{x}-\frac{1}{m}\right)=mx\left(\frac{2}{m}\right) \Rightarrow m^2-x=2x \Rightarrow 3x=m^2 \Rightarrow x=\frac{m^2}{3}$$

2.- $\frac{a}{x}+\frac{b}{2}=\frac{4a}{x}$

Solución:

$$2x\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{2}\right)=2x\left(\frac{4a}{x}\right) \Rightarrow 2a+bx=8a \Rightarrow bx=6a \Rightarrow x=\frac{6a}{b}$$

3.- $\frac{x}{2a}-\frac{1-x}{a^2}=\frac{1}{2a}$

Solución:

$$2a^2\left(\frac{x}{2a}-\frac{1-x}{a^2}\right)=2a^2\left(\frac{1}{2a}\right) \Rightarrow ax-2+2x=a \Rightarrow x(a+2)=a+2 \Rightarrow x=\frac{a+2}{a+2}=1$$

4.- $\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{n}{x}+1$

Solución:

$$mx\left(\frac{m}{x}+\frac{n}{m}\right)=mx\left(\frac{n}{x}+1\right)\Rightarrow m^2+nx=mn+mx\Rightarrow m^2-mn=mx-nx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow m\left(m-n\right)=x\left(m-n\right)\Rightarrow x=m$$

5.- $\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x}$

Solución:

$$2ax\left(\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}\right)=2ax\left(\frac{3a-2}{x}\right)$$

6.- $\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}=\frac{2\left(a-b\right)}{ab}$

Solución:

$$ab\left[\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}\right]=ab\left[\frac{2\left(a-b\right)}{ab}\right]\Rightarrow b\left(a-x\right)-a\left(b-x\right)=2\left(a-b\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab-bx-ab+ax=2\left(a-b\right)\Rightarrow x\left(a-b\right)=2\left(a-b\right)\Rightarrow x=2$$

7.- $\frac{x-3a}{a^2}-\frac{2a-x}{ab}=-\frac{1}{a}$

Solución:

$$a^2b\left[\frac{x-3a}{a^2}-\frac{2a-x}{ab}\right]=a^2b\left(-\frac{1}{a}\right)\Rightarrow b\left(x-3a\right)-a\left(2a-x\right)=-ab\Rightarrow$$
$$\Rightarrow bx-3ab-2a^2+ax=-ab\Rightarrow x\left(a+b\right)=2a^2+2ab=2a\left(a+b\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{2a\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)}=2a$$

8.- $\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}-2$

Solución:

$$mn\left[\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}\right]=mn\left(\frac{m^2+n^2}{mn}-2\right)\Rightarrow n\left(x+m\right)-m\left(x+n\right)=m^2+n^2-2mn\Rightarrow$$
$$\Rightarrow nx+mn-mx-mn=\left(m-n\right)^2\Rightarrow x\left(n-m\right)=\left(m-n\right)^2=\left(n-m\right)^2\Rightarrow x=n-m$$

9.- $\dfrac{x-b}{a}=2-\dfrac{x-a}{b}$

Solución:

$$ab\left[\frac{x-b}{a}\right]=ab\left[2-\frac{x-a}{b}\right]\Rightarrow b\left(x-b\right)=2ab-a\left(x-a\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow bx-b^2=2ab-ax+a^2\Rightarrow x\left(a+b\right)=a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(a+b\right)^2}{a+b}=a+b$$

10.- $\dfrac{4x}{2a+b}-3=-\dfrac{3}{2}$

Solución:

$$2\left(2a+b\right)\left[\frac{4x}{2a+b}-3\right]=2\left(2a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow 8x-6\left(2a+b\right)=-3\left(2a+b\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-12a-6b=-6a-3b\Rightarrow 8x=6a+3b\Rightarrow x=\frac{6a+3b}{8}$$

11.- $\dfrac{2a+3x}{x+a}=\dfrac{2\left(6x-a\right)}{4x+a}$

Solución:

$$\left(2a+3x\right)\left(4x+a\right)=2\left(6x-a\right)\left(x+a\right)\Rightarrow 8ax+2a^2+12x^2+3ax=2\left(6x^2+6ax-ax-a^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2+11ax+2a^2=12x^2+10ax-2a^2\Rightarrow ax=-4a^2\Rightarrow x=-4a$$

12.- $\dfrac{2\left(x-c\right)}{4x-b}=\dfrac{2x+c}{4\left(x-b\right)}$

Solución:

$$2\left(x-c\right)\times 4\left(x-b\right)=\left(2x+c\right)\left(4x-b\right)\Rightarrow 8\left(x^2-cx-bx+bc\right)=8x^2-2bx+4cx-bc\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^2-8bx-8cx+8bc=8x^2-x\left(2b-4c\right)-bc\Rightarrow -x\left(6b+12c\right)=-9bc\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{9bc}{\left(6b+12c\right)}=\frac{9bc}{6\left(b+2c\right)}=\frac{3bc}{2\left(b+2c\right)}$$

13.- $\dfrac{1}{n}-\dfrac{m}{x}=\dfrac{1}{mn}-\dfrac{1}{x}$

Solución:

$$mnx\left[\frac{1}{n}-\frac{m}{x}\right]=mnx\left[\frac{1}{mn}-\frac{1}{x}\right]=mx-m^2n=x-mn\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(m-1)=mn(m-1)\Rightarrow x=\frac{mn(m-1)}{(m-1)}=mn$$

14.- $\dfrac{(x-2b)(2x+a)}{(x-a)(a-2b+x)}=2$

Solución:

$$(x-2b)(2x+a)=(2)(x-a)(a-2b+x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+ax-4bx-2ab=2\left(ax-2bx+x^2-a^2+2ab-ax\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+ax-4bx-2ab=2ax-4bx+2x^2-2a^2+4ab-2ax\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax=6ab-2a^2\Rightarrow x=6b-2a=2(3b-a)$$

15.- $\dfrac{x+m}{x-n}=\dfrac{x+n}{x+m}$

Solución:

$$(x+m)^2=x^2-n^2\Rightarrow x^2+2mx+m^2=x^2-n^2\Rightarrow 2mx=-n^2-m^2\Rightarrow$$

$$x=-\frac{m^2+n^2}{2m}$$

16.- $\dfrac{x(2x+3b)(x+b)}{x+3b}=2x^2-bx+b^2$

Solución:

$$x(2x+3b)(x+b)=(x+3b)\left(2x^2-bx+b^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(2x^2+2bx+3bx+3b^2\right)=2x^3-bx^2+xb^2+6bx^2-3b^2x+3b^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3+5bx^2+3b^2x=2x^3+5bx^2-2b^2x+3b^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5b^2x=3b^3\Rightarrow x=\frac{3b}{5}$$

17.- $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x}{b}+\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{b}-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{5a+13b}{12a}$

Solución:

$$12ab\left[\frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{b}\right)\right]=12ab\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{5a+13b}{12a}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9ab\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{b}\right)=4ab\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+(b)(5a+13b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9bx+9ax=4ax-4bx+5ab+13b^2\Rightarrow 5ax+13bx=5ab+13b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(5a+13b)=b(5a+13b)\Rightarrow x=b$$

18.- $\dfrac{x+a}{3}=\dfrac{(x-b)^2}{3x-a}+\dfrac{3ab-3b^2}{9x-3a}$

Solución:

$$\frac{x+a}{3}=\frac{(x-b)^2}{3x-a}+\frac{ab-b^2}{3x-a}\Rightarrow 3(3x-a)\left[\frac{x+a}{3}\right]=3(3x-a)\left[\frac{x^2-2bx+b^2+ab-b^2}{3x-a}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(3x-a)(x+a)=3(x^2-2bx+ab)\Rightarrow 3x^2+2ax-a^2=3x^2-6bx+3ab\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2a+6b)=a^2+3ab\Rightarrow 2x(a+3b)=a(a+3b)\Rightarrow x=\frac{a}{2}$$

19.- $\dfrac{5x+a}{3x+b}=\dfrac{5x-b}{3x-a}$

Solución:

$$(5x+a)(3x-a)=(5x-b)(3x+b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x^2-5ax+3ax-a^2=15x^2+5bx-3bx-b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2ax-a^2=2bx-b^2\Rightarrow 2bx+2ax=b^2-a^2\Rightarrow 2x(a+b)=(b+a)(b-a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{b-a}{2}$$

20.- $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$

Solución:

$$\frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{x^2-a^2}=\frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}\Rightarrow x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2=a(2x+ab)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ax=2ax+a^2b\Rightarrow 2ax=a^2b\Rightarrow x=\frac{ab}{2}$$

21.- $\frac{2x-3a}{x+4a}-2=\frac{11a}{x^2-16a^2}$

Solución:

$$\frac{2x-3a-2\left(x+4a\right)}{x+4a}=\frac{11a}{x^2-16a^2}\Rightarrow\frac{-11a}{\left(x+4a\right)}=\frac{11a}{\left(x+4a\right)\left(x-4a\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -11a=\frac{11a}{x-4a}\Rightarrow -11ax+44a^2=11a\Rightarrow -11ax=11a-44a^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax=a\left(4a-1\right)\Rightarrow x=4a-1$$

22.- $\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a^2+ax}=\frac{x+a}{a}$

Solución:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a\left(a+x\right)}=\frac{x+a}{a}\Rightarrow a\left(a+x\right)\left[\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a\left(a+x\right)}\right]=a\left(a+x\right)\left(\frac{x+a}{a}\right)=\left(a+x\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+x^2=a^2+2ax+x^2\Rightarrow a-a^2=2ax\Rightarrow x=\frac{a\left(1-a\right)}{2a}=\frac{1-a}{2}$$

23.- $\frac{2\left(a+x\right)}{b}-\frac{3\left(b+x\right)}{a}=\frac{6\left(a^2-2b^2\right)}{ab}$

Solución:

$$ab\left[\frac{2\left(x+a\right)}{b}-\frac{3\left(b+x\right)}{a}\right]=ab\left[\frac{6\left(a^2-2b^2\right)}{ab}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a\left(x+a\right)-3b\left(b+x\right)=6a^2-12b^2\Rightarrow 2ax+2a^2-3b^2-3bx=6a^2-12b^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\left(2a-3b\right)=4a^2-9b^2\Rightarrow x=\frac{\left(2a+3b\right)\left(2a-3b\right)}{2a-3b}=2a+3b$$

24.- $m\left(n-x\right)-\left(m-n\right)\left(m+x\right)=n^2-\frac{1}{n}\left(2mn^2-3m^2n\right)$

Solución:

$$mn - mx - m^2 - mx + mn + nx = n^2 - \frac{mn}{n}\left(2n - 3m\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mn - 2mx + nx = n^2 - 2mn + 4m^2 \Rightarrow x\left(n - 2m\right) = n^2 - 4mn + 4m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(n - 2m\right) = \left(n - 2m\right)^2 \Rightarrow x = n - 2m$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 57A.

Tema: Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 145.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- Hallar el número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su doble disminuido en 11.

Solución:

$$x-\frac{3}{8}x=2x-11\Rightarrow 8x-3x=16x-88\Rightarrow 88=16x-5x=11x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{88}{11}=8$$

2.- Hallar el número que aumentado en sus $\frac{5}{6}$ equivale a su triple disminuido en 14.

Solución:

$$x+\frac{5}{6}x=3x-14\Rightarrow 6x+5x=18x-84\Rightarrow 7x=84\Rightarrow x=12$$

3.- ¿Qué número hay que restar de 22 para que la diferencia equivalga a la mitad de 22 aumentada en los $\frac{6}{5}$ del número que se resta?.

Solución:

$$22-x=\frac{22}{2}+\frac{6}{5}x\Rightarrow \frac{6}{5}x+x=22-11=11\Rightarrow \frac{11}{5}x=11\Rightarrow x=5$$

4.- ¿Cuál es el número que tiene 30 de diferencia entre sus $\frac{5}{4}$ y sus $\frac{7}{8}$?

Solución:

$$\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}\right)x=30\Rightarrow\left(\frac{10-7}{8}\right)x=30\Rightarrow \frac{3}{8}x=30\Rightarrow x=\frac{8}{3}\times 30=80$$

5.- El exceso de un número sobre 17 equivale a la diferencia entre los $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{6}$ del número. Hallar el número.

Solución:

$$x-17=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)x\Rightarrow x-17=\left(\frac{18-5}{30}\right)x=x-17=\frac{13}{30}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{13}{30}x=17\Rightarrow\left(\frac{30-13}{30}\right)x=17\Rightarrow \frac{17}{30}x=17\Rightarrow \frac{x}{30}=1\Rightarrow x=30$$

6.- La suma de la quinta parte de un número con los $\frac{3}{8}$ del número excede en 49 al doble de la diferencia entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del número. Hallar el número.

Solución:

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\right)x-49=2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)x\Rightarrow\left(\frac{8+15}{40}\right)x-49=2\left(\frac{2-1}{12}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{23}{40}x-\frac{1}{6}x=49\Rightarrow\left(\frac{69-20}{120}\right)x=49\Rightarrow \frac{49}{120}x=49\Rightarrow x=120$$

7.- La edad de B es los $\frac{3}{5}$ de la de A, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de B. Hallar ambas edades.

Solución:

$$[A+B]-4=2B\Rightarrow A+\frac{3}{5}A-4=2\left(\frac{3}{5}A\right)\Rightarrow\frac{8}{5}A-4=\frac{6}{5}A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{8}{5}-\frac{6}{5}\right)A=4\Rightarrow\frac{2}{5}A=4\Rightarrow A=\frac{4\times5}{2}=10(años);B=\frac{3}{5}\times10=6(años)$$

8.- B tiene los $\frac{7}{8}$ de lo que tiene A. Si A recibe \$90, entonces tiene el doble de lo que tiene B ahora. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$A+90=2B\Rightarrow A+90=2\left(\frac{7}{8}A\right)\Rightarrow 90=\left(\frac{7}{4}\right)A-A=\frac{7-4}{4}A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{3}{4}A=90\Rightarrow A=\frac{90\times4}{3}=120(\$);B=\frac{7}{8}\times120=105(\$)$$

9.- Después de vender los $\frac{3}{5}$ de una pieza de tela quedan 40 metros. ¿Cuál era la longitud de la pieza?.

Solución:

$$\left(1-\frac{3}{5}\right)x=40\Rightarrow\left(\frac{5-3}{5}\right)x=40\Rightarrow\frac{2}{5}x=40\Rightarrow x=100(m)$$

10.- Después de gastar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$ de lo que tenía me quedan 39 bolívares. ¿ Cuánto tenía?.

Solución:

$$x-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x=39\Rightarrow x-\left(\frac{8+3}{24}\right)x=39\Rightarrow x-\frac{11}{24}x=39\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(1-\frac{11}{24}\right)x=39\Rightarrow\left(\frac{13}{24}\right)x=39\Rightarrow x=\frac{39}{13}\times24=72$$

11.- El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Hallar el número.

Solución:

$$3x-\frac{x}{3}=48\Rightarrow\frac{9x-x}{3}=48\Rightarrow\frac{8x}{3}=48\Rightarrow x=\frac{48}{8}\times3=18$$

12.- El cuádruplo de un número excede en 19 a la mitad del número aumentado en 30. Hallar el número.

Solución:

$$4x-\left(\frac{x}{2}+30\right)=19\Rightarrow 4x-\frac{x}{2}-30=19\Rightarrow\frac{8x-x}{2}=19+30=49\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{7}{2}x=49\Rightarrow x=\frac{98}{7}=14$$

13.- El exceso de 80 sobre la mitad de un número equivale al exceso del númeroi sobre 10. Hallar el número.

Solución:

$$80-\frac{x}{2}=x-10\Rightarrow160-x=2x-20\Rightarrow160+20=2x+x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow180=3x\Rightarrow x=60$$

14.- Hallar el número cuyos $\frac{7}{8}$ excedan a sus $\frac{4}{5}$ en 2.

Solución:

$$\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{5}\right)x=2\Rightarrow\left(\frac{35-32}{40}\right)x=2\Rightarrow\frac{3}{40}x=2\Rightarrow x=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$$

15.- El largo de un buque que es 800 pies excede en 744 pies los $\frac{8}{9}$ del ancho. Hallar el ancho.

Solución:

$$800-\frac{8}{9}A=744\Rightarrow800-744=\frac{8}{9}A\Rightarrow56=\frac{8}{9}A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=\frac{56}{8}\times9=63(pies)$$

Ejercicio 146.- Resolver los siguientes p[roblemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- Hallar dos números consecutivos tales que los $\frac{4}{5}$ del mayor equivalgan aal mneor disminuido en 4.

Solución:

$$\frac{4}{5}(x+1) = x-4 \Rightarrow 4(x+1) = 5x-20 \Rightarrow 4x+4 = 5x-20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24 = 5x-4x = x$$

Entonces, el resultado es 24 y 25.

2.- Hallar dos números consecutivos tales que los $\frac{7}{8}$ del menor excedan en 17 a los $\frac{3}{5}$ del mayor.

Solución:

$$\frac{7}{8}x-\frac{3}{5}(x+1)=17 \Rightarrow \frac{7}{8}x-\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}=17 \Rightarrow x\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{5}\right)=17+\frac{3}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{35-24}{40}\right)x=\frac{85+3}{5}=\frac{88}{5} \Rightarrow \frac{11}{40}x=\frac{88}{5} \Rightarrow \frac{1}{8}x=8 \Rightarrow x=64$$

Entonces, el resultado es 64 y 65.

3.- Hallar dos números consecutivos tales que el menor exceda en 81 a la diferencia entre los $\frac{3}{4}$ del menor y los $\frac{2}{5}$ del mayor.

Solución:

$$x-81=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}(x+1) \Rightarrow x-81=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5} \Rightarrow x+\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}x=81-\frac{2}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20\left(x+\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}x\right)=20\left(81-\frac{2}{5}\right) \Rightarrow 20x+8x-15x=20\left(\frac{405-2}{5}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13x = 4\times 403 \Rightarrow x=\frac{4\times 403}{13}=124$$

Entonces, el resultado es 124 y 125.

4.- Se tienen dos números consecutivos tales que la suma de $\frac{1}{5}$ del mayor con $\frac{1}{33}$ del menor excede en 8 a los $\frac{3}{20}$ del mayor. Hallar los dos números.

Solución:

$$\frac{1}{5}(x+1)+\frac{1}{33}x-8=\frac{3}{20}(x+1)\Rightarrow$$

El m.c.m. de 5, 33 y 20 es:

$$5=5\times 1$$
$$33=3\times 11$$
$$20=(2)^2\times 5$$
$$m.c.m.=(2)^2\times 3\times 5\times 11=660$$

Luego:

$$660\left[\frac{1}{5}(x+1)+\frac{1}{33}x-8\right]=660\left[\frac{3}{20}(x+1)\right]\Rightarrow 132x+132+20x-5280=99x+99\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 132x+20x-99x=5280-132+99=5247\Rightarrow 53x=5247\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{5247}{53}=99$$

Entonces, el resultado es 99 y 100.

5.- La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 324. Hallar los números.

Solución:

$$(x+2)^2-x^2=324\Rightarrow x^2+4x+4x-x^2=324\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=320\Rightarrow x=80$$

Entonces, el resultado es 80 y 82.

6.- A tiene \$1,0 más que B. Si B gastara \$8,0 , tendría \$4,0 menos que los $\frac{4}{5}$ de lo que tiene A. ¿ Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$A = B + 1 \Rightarrow B = A - 1$$

$$B - 8 = \frac{4}{5}A - 4 \Rightarrow (A-1) - 8 = \frac{4}{5}A - 4 \Rightarrow A - 9 = \frac{4}{5}A - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - \frac{4}{5}A = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \left(\frac{5-4}{5}\right)A = 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \times A = 5 \Rightarrow A = 25; B = 24$$

7.- Hoy gané \$1 más que ayer; y lo que he ganado en los dos días es \$25 más que los $\frac{2}{5}$ de lo que gané ayer. ¿ Cuánto gané hoy y cuánto gané ayer?.

Solución:

$$y = x + 1$$

$$x + y = \frac{2}{5}x + 25 \Rightarrow x + (x+1) = \frac{2}{5}x + 25 \Rightarrow 2x - \frac{2}{5}x = 25 - 1 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10-2}{5}\right)x = 24 \Rightarrow \frac{8}{5}x = 24 \Rightarrow x = 15(\$); y = 16(\$)$$

8.- Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41 la suma de los cocientes es 9.

Solución:

$$\frac{x}{20} + \frac{x+1}{27} + \frac{x+2}{41} = 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{27} + \frac{1}{41}\right)x + \frac{1}{27} + \frac{2}{41} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{27} + \frac{1}{41}\right)x = 9 - \frac{1}{27} - \frac{2}{41} \Rightarrow$$

Los números 20, 27 y 41 son primos entre si; por tanto, su m.c.m. es el producto de los tres, o sea: 22140. Luego:

$$22140\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{27} + \frac{1}{41}\right]x = 22140\left[9 - \frac{1}{27} - \frac{2}{41}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1107 + 820 + 540)x = 199260 - 820 - 1080 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2467)x = 197360 \Rightarrow x = \frac{197360}{2467} = 80$$

Entonces, los números buscados son 80, 81 y 82.

9.- Hallar tres números consecutivos tales que la suma de los $\frac{3}{5}$ del menor con los $\frac{5}{6}$ del mayor exceda en 31 al del medio.

Solución:

$$\left(\frac{3}{5}\right)x+\left(\frac{5}{6}\right)(x+2)=(x+1)+31\Rightarrow\frac{3}{5}x+\frac{5}{6}x-x=32-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$m.c.m.(5;6;3)=30$$

$$30\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{6}-1\right)x=30\left(32-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow(18+25-30)x=960-50=910\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x=910\Rightarrow x=\frac{910}{13}=70$$

Entonces, el resultado buscado es 70, 71 y 72.

10.- Se tienen tres números consecutivos tales que la diferencia entre los $\frac{3}{7}$ del mediano y los $\frac{3}{10}$ del menor excede en 1 a $\frac{1}{11}$ del mayor. Hallar los números.

Solución:

$$\left(\frac{3}{7}\right)(x+1)-\left(\frac{3}{10}\right)x=\left(\frac{1}{11}\right)(x+2)+1\Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{7}-\frac{3}{10}-\frac{1}{11}\right)x=1+\frac{2}{11}-\frac{3}{7}\Rightarrow$$

$$m.c.m.(7;10;11)=770$$

$$\Rightarrow 770\left[\frac{3}{7}-\frac{3}{10}-\frac{1}{11}\right]x=770\left[1+\frac{2}{11}-\frac{3}{7}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(330-231-70)x=770+140-330\Rightarrow(29)x=580\Rightarrow x=\frac{580}{29}=20$$

Entonces, la respuesta buscada es 20, 21 y 22.

11.- A tiene 2 años más que B y éste 2 años más que C. Si las edades de B y C se suman; esta suma excede en 12 años a los $\frac{7}{8}$ de la edad de A. Hallar las tres edades.

Solución:

$$A = B + 2; B = C + 2 \Rightarrow A = C + 4$$

$$B + C = \frac{7}{8}A + 12 \Rightarrow (A-2) + (A-4) = \frac{7}{8}A + 12 \Rightarrow 2A - \frac{7}{8}A = 12 + 6 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{16-7}{8}\right)A = 18 \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)A = 18 \Rightarrow A = \frac{18\times 8}{9} = 16(años); B = 14(años); C = 12(años)$$

12.- A tiene 1 año menos que B y B 1 año menos que C. Si del cuadrado de la edad de C se resta el cuadrado de la edad de B la diferencia es 4 años menos que los $\frac{17}{5}$ de la edad de A. Hallar las tres edades.

Solución:

$$A = B - 1; B = C - 1 \Rightarrow A = C - 2$$

$$C^2 - B^2 = \frac{17}{5}A - 4 \Rightarrow (A+2)^2 - (A+1)^2 = \frac{17}{5}A - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 + 4A + 4 - A^2 - 2A - 1 = \frac{17}{5}A - 4 \Rightarrow 2A + 3 = \frac{17}{5}A - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A - \frac{17}{5}A = -7 \Rightarrow \left(\frac{10-17}{5}\right)A = -7 \Rightarrow \left(-\frac{7}{5}\right)A = -7 \Rightarrow$$

$$A = 5(años); B = 6(años); C = 7(años)$$

Ejercicio 147.- Resolver los siguientes p[roblemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- La suma de dos números es 59, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números.

Solución:

Se $\boldsymbol{x}$ el número mayor. Entonces, el menor es ***59 – x***. Luego:

$$\frac{x}{59-x} = 2 + \frac{5}{59-x} \Rightarrow \frac{x}{59-x} - \frac{5}{59-x} = 2 \Rightarrow \frac{x-5}{59-x} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 5 = 2(59-x) = 118 - 2x \Rightarrow 3x = 123 \Rightarrow x = \frac{123}{3} = 41$$

Entonces, la respuesta es 41 y 18.

2.- La suma de dos números es 436, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo es 73. Hallar los números.

Solución:

Sea ***x*** el mayor de lo dos números; entonces, el menor será ***436 - x***.

$$\frac{x}{436-x}=2+\frac{73}{436-x}\Rightarrow\frac{x-73}{436-x}=2\Rightarrow x-73=2\left(436-x\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-73=872-2x\Rightarrow 3x=872+73=945\Rightarrow x=\frac{945}{3}=315$$

Los números son: 315 y 121.

3.- La diferencia de dos números es 44, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 2. Hallar los números.

Solución:

El mayor de los dos números lo llamaremos ***x*** y por tanto, el menor será **x – 44**.

$$\frac{x}{x-44}=3+\frac{2}{x-44}\Rightarrow\frac{x-2}{x-44}=3\Rightarrow x-2=3x-132\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x=130\Rightarrow x=\frac{130}{2}=65$$

Los números serán 65 y 21.

4.- Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 3 y el residuo es 8. Hallar los números.

Solución:

Sea ***x*** el mayor de los dos números, por tanto, el menor será ***x – 56***.

$$\frac{x}{x-56}=3+\frac{8}{x-56}\Rightarrow\frac{x-8}{x-56}=3\Rightarrow x-8=3x-168\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x=160\Rightarrow x=80$$

Los dos números son 80 y 24.

5.- Dividir 260 en dos partes tales que el doble de la mayor dividido entre el triple de la menor de 2 de cociente y 40 de residuo.

Solución:

Sea **x** el mayor de los dos números, por tanto, el menor será **260 – x**.

$$\frac{2x}{3(260-x)}=2+\frac{40}{3(260-x)}\Rightarrow\frac{2x-40}{3(260-x)}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-40=1560-6x\Rightarrow 8x=1600\Rightarrow x=\frac{1600}{6}=200.$$

Los números son 200 y 60.

6.- Repartir 196 soles entre A y B de modo que si los $\frac{3}{8}$ de la parte de A se dividen entre el quinto de la de B, se obtiene 1 de cociente y 16 de residuo.

Solución:

$$A+B=196\Rightarrow B=196-A$$

$$\frac{\frac{3}{8}A}{\frac{1}{5}(196-A)}=1+\frac{16}{\frac{1}{5}(196-A)}\Rightarrow\frac{\frac{3}{8}A-16}{\frac{1}{5}(196-A)}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{3A-128}{8}}{\frac{1}{5}(196-A)}=1\Rightarrow\frac{5(3A-128)}{8(196-A)}=1\Rightarrow 15A-640=1568-8A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23A=2208\Rightarrow A=\frac{2208}{23}=96$$

Los números son $A=96(soles);B=100(soles)$.

Ejercicio 148.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- En tres días un hombre ganó $175. Si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior; ¿cuánto ganó cada día?.

Solución:

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=175\Rightarrow 4\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)=4\times 175=700\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2x+x=700\Rightarrow 7x=700\Rightarrow x=100$$

Entonces el hombre ganó en los tres días: 100, 50 y 25, respectivamente.

2.- El jueves perdía los $\frac{3}{5}$ de lo que perdía el miércoles y el viernes los $\frac{5}{6}$ de lo que perdí el jueves. Si en los tres días perdí $252, ¿cuánto perdí cada día?.

Solución:

$$x+\frac{3}{5}x+\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}x=252\Rightarrow x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}x=252\Rightarrow$$
$$10\left(x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}x\right)=2520\Rightarrow 10x+6x+5x=2520\Rightarrow 21x=2520\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{2520}{21}=120(\$)$$

Las pérdidas fueron:

Miércoles = $120; Jueves: $72 y Viernes: $60.

3.- B tiene $\frac{2}{3}$ de lo que tiene A y C tiene $\frac{3}{5}$ de lo que tiene B. Si entre los tres tienen 248 sucres, ¿cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}x=248\Rightarrow x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}x=248\Rightarrow$$
$$15\left(x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}x\right)=3720\Rightarrow 15x+10x+6x=3720\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 31x=3720\Rightarrow x=\frac{3720}{31}=120(\$).$$

Las tres personas tienen: $A=120(\$);B=80(\$);C=48(\$)$.

4.- La edad de B es los $\frac{3}{5}$ de la de A y la de C es los $\frac{3}{8}$ de la de B. Si las tres edades suman 73 años, hallar las edades respectivas.

Solución:

$$x+\frac{3}{5}x+\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}x=73\Rightarrow x+\frac{3}{5}x+\frac{9}{40}x=73\Rightarrow$$
$$40\left(x+\frac{3}{5}x+\frac{9}{40}x\right)=2920\Rightarrow 40x+24x+9x=2920\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 73x=2920\Rightarrow x=\frac{2920}{73}=40(años).$$

Las edades son: $A=40(años);B=24(años);C=9(años).$

5.- En 4 días un hombre recorrió 120 Km. Si cada día recorrió $\frac{1}{3}$ de lo que recorrió el día anterior, ¿cuántos kilómetros recorrió en cada día?

Solución:

$$x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^2}\right)x=120\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^3\left[x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3^2}x+\frac{1}{3^3}x\right]=(3)^3\times 120=3240\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 27x+9x+3x+x=3240\Rightarrow 40x=3240\Rightarrow x=\frac{3240}{40}=81$$

El hombre recorrió en cada día : 81 Km,; 27 Km, 9 Km.; 3 Km.

6.- En cuatro semanas un avión recorrió 4641 Km. Si cada semana recorrió los $\frac{11}{10}$ de lo que recorrió la semana anterior, ¿cuántos kilómetros recorrió en cada semana?

Solución:

$$x+\frac{11}{10}x+\left(\frac{11}{10}\right)^2x+\left(\frac{11}{10}\right)^3x=4641\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1000\left[x+\frac{11}{10}x+\left(\frac{11}{10}\right)^2x+\left(\frac{11}{10}\right)^3x\right]=1000\times 4641=4.641.000.\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1000x+1100x+1210x+1331x=4.641.000\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4641x=4.641.000\Rightarrow x=\frac{4641000}{4641}=1.000(km)$$

Entonces, el avión recorrió por semana: $1.000(Km);1100(Km);1210(Km);1331(Km)$

7.-

7.- Una herencia de 330500 colones se ha repartido entre cinco personas. La segunda recibe la mitad de lo que recibe la primera; la tercera $\frac{1}{4}$ de lo que recibe la segunda; la cuarta $\frac{1}{5}$ de lo que recibe la tercera y la quinta $\frac{1}{10}$ de lo que recibe la cuarta. ¿ Cuánto recibió cada persona?

Solución:

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x=330500\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 400\left(x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{40}x+\frac{1}{400}x\right)=400\times330500=132200000\Rightarrow$$
$$400x+200x+50x+10x+x=132200000\Rightarrow 661x=132200000\Rightarrow$$
$$x=\frac{132200000}{661}=200.000\left(colones\right)$$

Las cinco personas recibieron la herencia con estas cantidades:

$1).200.000:2).-100.000;3).-25.000:4).-5.000;5).-500.$

8.- Un hombre viajó 9362 Km. por barco, tren y avión. Por tren recorrió $\frac{4}{9}$ de lo que recorrió en barco y en avión los $\frac{5}{8}$ de lo que recorrió en tren. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo?

Solución:

$$x+\frac{4}{9}x+\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}x=9362\Rightarrow 18\left(x+\frac{4}{9}x+\frac{5}{18}x\right)=18\times9362=168516\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18x+8x+5x=168516\Rightarrow 31x=168516\Rightarrow x=\frac{168516}{31}=5436\left(Km\right)$$

El viaje fue hecho así:

Barco: 5.436 (Km).
Tren: 2.416 (Km)
Avión: 1.510 (Km)

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 57B.

Tema: Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 149.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- Tenía cierta suma de dinero. Gasté \$20 y presté los $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo \$10; ¿cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$(x-20)-\frac{2}{3}(x-20)=10 \Rightarrow 3x-60-2x+40=30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=50(\$)$$

2.- Después de gastar la mitad de lo que tenía y de prestar la mitad de lo que me quedó, tengo 21 quetzales. ¿ Cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(x-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)=21\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=21\Rightarrow 2x-x=84\Rightarrow x=84(Q)$$

3.- Tengo cierta suma de dinero. Si me pagan \$7 que me deben, puedo gastar los $\frac{4}{5}$ de mi nuevo capital y me quedarán \$20. ¿Cuánto tengo ahora?.

Solución:

$$x+7-\frac{4}{5}(x+7)=20\Rightarrow 5x+35-4x-28=100\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=100-7=93(\$)$$

4.- Gasté los $\frac{2}{5}$ de lo que tenía y presté los $\frac{5}{6}$ de lo que quedó. Si aún tengo 500 bolívares; ¿cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)x-\frac{5}{6}x\left(1-\frac{2}{5}\right)=500\Rightarrow x-\frac{2}{5}x-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}x=500\Rightarrow$$
$$30\left(x-\frac{2}{5}x-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}x\right)=15000\Rightarrow(30-12-25+10)x=15000\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{15000}{3}=5000(Bs.)$$

5.- Los $\frac{4}{5}$ de las aves de una granja son palomas; los $\frac{3}{4}$ del resto gallinas y las 4 aves restantes son gallos. ¿Cuántas aves hay en la granja?.

Solución:

$$x-\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{5}x\right)=4\Rightarrow x\left(1-\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20\left(1-\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)x=80\Rightarrow(20-15-4)x=80\Rightarrow x=80(aves)$$

6.- Gasté los $\frac{4}{5}$ de lo que tenía; perdí los $\frac{2}{3}$ de lo que me quedó; se me perdieron 8 soles y me quedé sin nada. ¿Cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(1-\frac{4}{5}\right)x-\frac{2}{3}\left(1-\frac{4}{5}\right)x-8=0\Rightarrow\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}x=8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15\left[\frac{1}{5}x-\frac{2}{15}x\right]=15\times 8=120\Rightarrow 3x-2x=120\Rightarrow x=120\left(soles\right)$$

7.- Tenía cierta suma. Gasté $\frac{5}{12}$ de lo que tenía; cobré \$42 que me debían y ahora tengo 2 más que al principio. ¿ Cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(1-\frac{5}{12}\right)x+42=x+2\Rightarrow\frac{7}{12}x+42=x+2\Rightarrow 40=x-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}x\Rightarrow$$
$$x=\frac{40\times 12}{5}=96\left(\$\right)$$

8.- Después de gastar la mitad de lo que tenía y \$15 más, me quedan \$30. ¿Cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$x-\frac{x}{2}-15=30\Rightarrow\frac{x}{2}=45\Rightarrow x=90\left(\$\right)$$

9.- Gasté los $\frac{3}{4}$ de lo que tenía y después recibí 1300 sucres. Si ahora tengo 100 sucres más de loo que tenía al principio, ¿cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)x+1300=x+100\Rightarrow 1200=x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{1200}{3}\times 4=1600\left(sucres\right)$$

10.- Tenía cierta suma. Gasté los $\frac{3}{4}$ en trajes y los $\frac{2}{3}$ de lo que me quedó en libros. Si lo que tengo ahora es \$38 menos que los $\frac{2}{5}$ de lo que tenía al principio; ¿cuánto tenía al principio?.

Solución:

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)x-\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)x=\frac{2}{5}x-38\Rightarrow\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}x=\frac{2}{5}x-38\Rightarrow$$
$$38=\frac{2}{5}x+\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x\Rightarrow 60\times 38=24x+10x-15x=19x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60\times\frac{38}{19}=120(\$)$$

Ejercicio 150.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- La edad de A es $\frac{1}{3}$ de la de B y hace 15 años la edad de A era $\frac{1}{6}$ de la de B. Hallar las edades actuales.

Solución:

Edad de ***A = x***; entonces la edad actual de B es 3x.

$$x-15=\frac{1}{6}(3x-15)\Rightarrow 6x-90=3x-15\Rightarrow 3x=75\Rightarrow x=25(años)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=25(años);B=75(años)$$

2.- La edad de A es el triple de la de B y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

Solución:

La edad de B es ***x***, entonces la edad de A es $3x$. Luego.

$$3x+20=2(x+20)\Rightarrow x+20=2x+40\Rightarrow x=20(años)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=60(años);B=20(años)$$

3.- La edad de A hace 5 años era los $\frac{9}{11}$ de la edad que tendrá dentro de 5 años:

Solución:

$$x-5=\frac{9}{11}(x+5)\Rightarrow 11x-55=9x+45\Rightarrow 2x=100\Rightarrow x=50(años)$$

4.- Hace 6 años la edad de A era la mitad de la edad que tendrá dentro de 24 años. Hallar la edad actual de A.

Solución:

$$x-6=\frac{1}{2}(x+24)\Rightarrow 2x-12=x+24\Rightarrow x=36(años)$$

5.- La edad de un hijo es $\frac{1}{3}$ de la edad de su padre y dentro de 16 años será la mitad. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$Hijo=x; Padre=3x.$$
$$x+16=\frac{1}{2}(3x+16)\Rightarrow 2x+32=3x+16\Rightarrow x=16(años)$$
$$Hijo=16(años); padre=48(años)$$

6.- La edad de un hijo es los $\frac{2}{5}$ de la edad de su padre y hace 8 años la edad del hijo era los $\frac{2}{7}$ de la edad del padre. Hallar las edades actuales:

Solución:

$$Hijo=x; padre=\frac{5}{2}x$$
$$x-8=\frac{2}{7}\left(\frac{5}{2}x-8\right)=\frac{5}{7}x-\frac{16}{7}\Rightarrow 7x-56=5x-16\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x=40\Rightarrow x=20(años).$$
$$Hijo=20(años); padre=50(años)$$

7.- La suma de las edades actuales de A y B es 65 años y dentro de 10 años la edad de B será los $\frac{5}{12}$ de la de A. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$A+B=65$$
$$B+10=\frac{5}{12}[A+10]\Rightarrow 65-A+10=\frac{5}{12}[A+10]\Rightarrow$$
$$75-A=\frac{5}{12}(A+10)\Rightarrow 900-12A=5A+50\Rightarrow 17A=850\Rightarrow$$
$$A=\frac{850}{17}=50(años); B=15(años)$$

8.- Las diferencias de las edades de un padre y su hijo es 25 años. Hace 15 años la edad del hijo era los $\frac{3}{8}$ de la del padre. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$P - H = 25 \Rightarrow P = H + 25$$
$$H - 15 = \frac{3}{8}(H + 25 - 15) \Rightarrow H - 15 = \frac{3}{8}(H + 10) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8H - 120 = 3H + 30 \Rightarrow 5H = 150 \Rightarrow H = 30(años); P = 55(años)$$

9.- Hace 10 años la edad de un padre era el doble que la de su hijo y dentro de 10 años la edad del padre será los $\frac{3}{2}$ de la del hijo. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$P - 10 = 2(H - 10) = 2H - 20 \Rightarrow H = \frac{P + 10}{2}$$
$$P + 10 = \frac{3}{2}(H + 10) \Rightarrow P + 10 = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{P + 10}{2}\right) + 10\right] = \frac{3}{4}P + \frac{15}{2} + 15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4P + 40 = 3P + 30 + 60 \Rightarrow P = 50(años); H = 30(años)$$

10.- A tiene 18 años más que B. Hace 18 años la edad de A era los $\frac{5}{2}$ de la de B. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$A = B + 18 \Rightarrow B = A - 18$$
$$A - 18 = \frac{5}{2}(B - 18) = \frac{5}{2}(A - 18 - 18) = \frac{5}{2}(A - 36) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2A - 36 = 5A - 180 \Rightarrow 3A = 144 \Rightarrow A = \frac{144}{3} = 48(años); B = 30(años)$$

11.- La edad de A es el triple de la de B y hace 4 años la suma de ambas edades era igual a la que tendrá B dentro de 16 años. Hallar las edades actuales.

Solución:

$A = 3B;$

$(A-4)+(B-4) = B+16 \Rightarrow 3B-4+B-4 = B+16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3B = 24 \Rightarrow B = 8(años); A = 24(años)$

Ejercicio 151.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- A tiene doble de dinero que B. Si A le diera a B 20 bolívares tendería los $\frac{4}{5}$ de lo que tendría B. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$A = 2B$

$A-20 = \frac{4}{5}(B+20) \Rightarrow 2B-20 = \frac{4}{5}(B+20) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10B-100 = 4B+80 \Rightarrow 6B = 180 \Rightarrow B = \frac{180}{6} = 30(Bs.); A = 60(Bs.)$

2.- A tiene la mitad de lo que tiene B, pero si B le da a A 24 colones, ambos tendrán lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$A = \frac{1}{2}B \Rightarrow 2A = B$

$A+24 = B-24 \Rightarrow A+24 = 2A-24 \Rightarrow A = 48(colones); B = 96(colones).$

3.- B tiene el doble de lo que tiene A; pero, si B le da a A \$6, A tendrá los $\frac{3}{5}$ de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$B = 2A$

$A+6 = \frac{3}{5}(B-6) \Rightarrow A+6 = \frac{3}{5}(2A-6) \Rightarrow 5A+30 = 6A-18 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 48(\$); B = 96(\$)$

4.- B tiene los $\frac{3}{5}$ de lo que tiene A. Si B le gana a A \$30, B tendrá los $\frac{9}{5}$ de lo que le quede a A. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$B = \frac{3}{5}A$$

$$B + 30 = \frac{9}{5}(A - 30) \Rightarrow \frac{3}{5}A + 30 = \frac{9}{5}(A - 30) \Rightarrow 3A + 150 = 9A - 270 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6A = 420 \Rightarrow A = 70(\$); B = 42(\$)$$

5.- A y B empiezan a jugar con igual suma de dinero. Cuando A ha perdido 30 sucres, tiene la mitad de lo que tiene B. ¿ Con cuánto empezó a jugar cada uno?.

Solución:

$$A = B$$

$$A - 30 = \frac{1}{2}(B + 30) \Rightarrow A - 30 = \frac{1}{2}(A + 30) \Rightarrow 2A - 60 = A + 30 \Rightarrow$$

$$A = B = 90(sucres)$$

6.- A y B empiezan a jugar teniendo B los $\frac{2}{3}$ de lo que tiene A. Cuando B ha ganado \$22, tiene los $\frac{7}{5}$ de lo que le queda a A. ¿Con cuánto empezó a jugar cada uno?.

Solución:

$$B = \frac{2}{3}A$$

$$B + 22 = \frac{7}{5}(A - 22) \Rightarrow \frac{2}{3}A + 22 = \frac{7}{5}(A - 22) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\left[\frac{2}{3}A + 22\right] = 15 \times \left[\frac{7}{5}(A - 22)\right] \Rightarrow 10A + 330 = 21A - 462 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11A = 792 \Rightarrow A = \frac{792}{11} = 72(\$); B = 48(\$)$$

7.- A tiene los $\frac{4}{5}$ de lo que tiene B. Si A gana \$13 y B pierde \$5, ambos tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$A=\frac{4}{5}B$$

$$A+13=B-5\Rightarrow\frac{4}{5}B+13=B-5\Rightarrow 4B+65=5B-25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=90(\$);A=72(\$)$$

8.- B tiene la mitad de lo que tiene A. Si B le gana a A una suma igual a $\frac{1}{3}$ de lo que tiene A, B tendrá $5 más que A. ¿ Cuánto tiene cada uno?.

Solución:

$$B=\frac{1}{2}A\Rightarrow A=2B$$

$$B+\frac{1}{3}A=\left(A-\frac{1}{3}A\right)+5\Rightarrow B+\frac{2}{3}B=\left(\frac{3-1}{3}\right)(2B)+5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3B+2B=4B+15\Rightarrow B=15(\$);A=30(\$)$$

9.- A y B empiezan a jugar con igual suma de dinero. Cuando B ha perdido los $\frac{3}{5}$ del dinero con que empezó a jugar, A ha ganado 24 balboas. ¿Con cuánto empezaron a jugar?.

Solución:

$$A=B$$

$$\frac{3}{5}A=24\Rightarrow A=\frac{24\times 5}{3}=\frac{120}{3}=40(Balboas)=B$$

10.- A y B empiezan a jugar con igual suma de dinero. Cuando B ha perdido los $\frac{3}{4}$ del dinero con que empezó a jugar, lo que ha ganado A es 24 soles más que la tercera parte de lo que le queda a B. ¿ ¿ Con cuánto empezaron a jugar?.

Solución:

$$A=B;B-\frac{3}{4}B=\frac{B}{4}$$

$$\frac{3}{4}B=24+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{B}{4}\right)\Rightarrow\frac{3}{4}B=24+\frac{B}{12}\Rightarrow 9B=288+B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8B=288\Rightarrow A=B=36(soles)$$

Ejercicio 152.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- A tiene 38 años y B 28 años. ¿ Dentro de cuántos años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la edad de A?.

Solución:

$$28+x=\frac{3}{4}(38+x)\Rightarrow 112+4x=114+3x\Rightarrow x=2\left(años\right)$$

2.- B tiene 25 años y A 30. ¿Dentro de cuántos años la edad de A será los $\frac{7}{6}$ de la edad de B?.

Solución:

$$30+x=\frac{7}{6}(25+x)\Rightarrow 180+6x=175+7x\Rightarrow x=5\left(años\right)$$

3.- A tiene 52 años y B 48. ¿Cuántos años hace que la edad de B era los $\frac{9}{10}$ de la edad de A?.

Solución:

$$48-x=\frac{9}{10}(52-x)\Rightarrow 480-10x=468-9x\Rightarrow x=480-468=12\left(años\right)$$

4.- Rosa tiene 27 años y María 18. ¿Cuántos años hace que la edad de María era $\frac{1}{4}$ de la de Rosa?.

Solución:

$$18-x=\frac{1}{4}(27-x)\Rightarrow 72-4x=27-x\Rightarrow 3x=45\Rightarrow x=15\left(años\right)$$

5.- Enrique tiene \$50 y Ernesto \$22. Si ambos reciben una misma suma de dinero, Ernesto tiene los $\frac{3}{5}$ de lo de Enrique. ¿Cuál es esa suma?.

Solución:

$$22+x=\frac{3}{5}(50+x)\Rightarrow 110+5x=150+3x\Rightarrow 2x=40\Rightarrow x=20(\$)$$

6.- Pedro tenía 90 quetzales y su hermano 50. Ambos gastaron igual suma de dinero y ahora el hermano de Pedro tiene los $\frac{3}{11}$ de lo que tiene Pedro. ¿ Cuánto gastaron cada uno?.

Solución:

$$50-x=\frac{3}{11}(90-x)\Rightarrow 550-11x=270-3x\Rightarrow 8x=550-270=280\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{280}{8}=35(Q)$$

7.- Una persona tiene los $\frac{3}{4}$ de la edad de su hermano. Dentro de un número igual a la edad actual del mayor, la suma de ambas edades será 75 años. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$y=\frac{3}{4}x$$
$$\left[\frac{3}{4}x+x\right]+(x+x)=75\Rightarrow 3x+\frac{3}{4}x=75\Rightarrow \frac{15}{4}x=75\Rightarrow x=20(años);y=15(años)$$

8.- A tenía \$54 y B \$32. Ambos ganaron una misma cantidad de dinero y la suma de lo que tienen ambos ahora excede en \$66 al cuádruplo de lo que ganó cada uno. ¿ Cuánto ganó cada uno?.

Solución:

$$(54+x)+(32+x)=4x+66\Rightarrow 86+2x=4x+66\Rightarrow 2x=20\Rightarrow x=10(\$)$$

9.- A tenía 153 bolívares y B 12. Luego, A le dio a B cierta suma y ahora A tiene $\frac{1}{4}$ de lo que tiene B. ¿ Cuánto le dio A a B?.

Solución:

$$153-x=\frac{1}{4}(12+x)\Rightarrow 612-4x=x+12\Rightarrow 5x=600\Rightarrow x=120(Bs.)$$

Ejercicio 153.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- La longitud de un rectángulo excede al ancho en 3,0 metros. Si cada dimensión se aumenta en 1,0 metro la superficie se aumenta en 22,0 metros cuadrados. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$L=A+3\Rightarrow S_1=(A+3)A$$
$$S_2=(A+4)(A+1)$$
$$S_2-S_1=22\Rightarrow (A+4)(A+1)-(A+3)A=22\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2+5A+4-A^2-3A=22\Rightarrow 2A=18\Rightarrow A=9(m);L=12(m)$$

2.- Una de las dimensiones de una sala rectangular es el doble de la otra. Si cada dimensión se aumenta en 5,0 metros el área se aumentaría en 160 metros cuadrados. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$y=2x\Rightarrow S_1=y\times x=2x^2$$
$$S_2=(y+5)(x+5)=(2x+5)(x+5)=2x^2+15x+25$$
$$S_2-S_1=160\Rightarrow 2x^2+15x+25-2x^2=160\Rightarrow 15x=135\Rightarrow x=9(m);y=18(m)$$

3.- Una dimensión de un rectángulo excede a la otra en 2,0 metros. Si ambas dimensiones se disminuyen en 5,0 metros, el área se disminuye en 115 metros cuadrados. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$y=x+2\Rightarrow S_1=y\times x=(x+2)x=x^2+2x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_2=(y-5)(x-5)=(x+2-5)(x-5)=(x-3)(x-5)=x^2-8x+15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1-S_2=115\Rightarrow x^2+2x-x^2+8x-15=115\Rightarrow 10x=130\Rightarrow x=13(m);y=15(m)$$

4.- La longitud de un rectángulo excede en 24 metros al lado del cuadrado equivalente al rectángulo y su ancho es 12 metros menos que el lado de dicho cuadrado. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$L \times A = x^2 \Rightarrow (x+24)(x-12) = x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 12x - 288 = x^2 \Rightarrow 12x = 288 \Rightarrow x = \frac{288}{12} = 24;$$
$$L = 24 + 24 = 48(m); A = 24 - 12 = 12(m)$$

5.- La longitud de un rectángulo es 7,0 metros mayor y su ancho es 6,0 metros menor que el lado del cuadrado equivalente al rectángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$L \times A = x^2 \Rightarrow (x+7)(x-6) = x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 42 = x^2 \Rightarrow x = 42 \Rightarrow L = 42 + 7 = 49(m); A = 42 - 6 = 36(m)$$

6.- La longitud de un campo rectangular excede a su ancho en 30 metros. Si la longitud se disminuye en 20 metros y el ancho se aumenta en 15 metros, el área se disminuye en 150 metros cuadrados. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$L = A + 30(m) \Rightarrow S_1 = L \times A = (A+30)A = A^2 + 30A$$
$$S_2 = (L-20)(A+15) = (A+30-20)(A+15) = (A+10)(A+15) = A^2 + 25A + 150 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1 - S_2 = 150 \Rightarrow A^2 + 30A - A^2 - 25A - 150 = 150 \Rightarrow 5A = 300 \Rightarrow A = 60(m); L = 90(m)$$

7.- La longitud de una sala excede a su ancho en 10 metros. Si la longitud se disminuye en 2,0 metros y el ancho se aumenta en 1,0 metro, el área no varía. Hallar las dimensiones de la sala.

Solución:

$$y = x + 10 \Rightarrow S = y \times x = (x+10)x = x^2 + 10x \Rightarrow$$
$$S_2 = S_1 = (y-2)(x+1) = (x+8)(x+1) = x^2 + 9x + 8 = x^2 + 10x \Rightarrow$$
$$x = 8 \Rightarrow= 8(m); y = 18(m)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 57C.

Tema: Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 154.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- El numerador de una fracción excede al denominador en 2. Si el denominador se aumenta en 7 el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x+2}{x} \Rightarrow \frac{x+2}{x+7} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+4 = x+7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x+2}{x} \Rightarrow \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

2.- El denominador de una fracción excede al numerador en 1. Si el denominador se aumenta en 15, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1+15} = \frac{x}{x+16} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+16 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{8}{9}$$

3.- El numerador de una fracción es 8 unidades menor que el denominador. Si a los dos términos de la fracción se suma se le suma 1, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$, hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{x+8} \Rightarrow \frac{x+1}{(x+8)+1} = \frac{x+1}{x+9} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x+4 = 3x+27 \Rightarrow x = 23 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{23}{31}$$

4.- El denominador de una fracción excede al duplo del nmerador en 1. Si al numerador se le resta 4, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{2x+1} \Rightarrow \frac{x-4}{2x+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x-12 = 2x+1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2x+1} = \frac{13}{27}$$

5.- El denominador de una fracción excede al duplo del numerador en 6. Si el numerador se aumenta en 15 y el denominador se disminuye en 1, el valor de la fracción es $\frac{4}{3}$. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{2x+6} \Rightarrow \frac{x+15}{2x+5} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x+45 = 8x+20 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2x+6} = \frac{5}{16}$$

6.- El denominador de una fracción excede al numerador en 1. Si al denominador se añade 4, la fracción que resulta es 2 uniades menor que el triple de la fracción primitiva. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{(x+1)+4} = (3)\left(\frac{x}{x+1}\right) - 2 \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{3x}{x+1} - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{3x-2x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow x(x+1) = (x+5)(x-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + x = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$$

7.- El denominador de una fracción es 1 menos que el triplo del numerador. Si el numerador se aumenta en 8 y el denominador en 4, el valor de la frracción es $\frac{11}{12}$. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x}{3x-1} \Rightarrow \frac{x+8}{(3x-1)+4} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{x+8}{3x+3} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{x+8}{x+1} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x + 32 = 11x + 11 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{3x-1} = \frac{3}{9-1} = \frac{3}{8}$$

8.- El numerador de una fracción excede al denominador en 22. Si al numerador se resta 15, la diferencia entre la nueva fracción y la fracción primitiva es 3. Hallar la fracción.

Solución:

$$\frac{x+22}{x} \Rightarrow \frac{x+22}{x} - \frac{x+22-15}{x} = 3 \Rightarrow \frac{x+22}{x} - \frac{x+7}{x} = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x+22-x-7}{x} = 3 \Rightarrow 15 = 3x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x+22}{x} = \frac{5+22}{5} = \frac{27}{5}$$

Ejercicio 155.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede a la cifra de las unidades en 2. Si el número se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 7. Hallar el número.

Solución:

Sea ***x*** la cifra de las unidades. Entonces, $x+2$ es la cifra de las decenas, por lo que el número será: $10(x+2)+x=11x+20.$ Luego:

$$\frac{11x+20}{(x+2)+x}=7\Rightarrow\frac{11x+20}{2x+2}=7\Rightarrow 11x+20=14x+14\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10(x+2)+x\Rightarrow 10(4)+2=42$$

2.- La cifra de las unidades de un número de dos cifras excede en 4 a la cifra de las decenas y si el número se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 4. Hallar el número.

Solución:

Sea x la cifra de las unidades, por lo tanto, $x-4$ es la cifra de las decenas, luego, el número es: $10(x-4)+x=11x-40;$ y el enunciado del problema nos dice que:

$$\frac{11x-40}{(x-4)+x}=4\Rightarrow\frac{11x-40}{2x-4}=4\Rightarrow 11x-40=8x-16\rightarrow 3x=24\Rightarrow x=8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11x-40\Rightarrow 88-40=48$$

3.- La cifra de las unidades de un número de dos cifras es el duplo de la cifra de las unidades y si el número, disminuido en 9, se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 6. Hallar el número.

Solución:

Sea ***x*** la cifra de las unidades. Entonces, ***2x*** es la cifra de las decenas, por lo que el número será: $20x+x=21x.$

Ahora: $\frac{21x-9}{3x}=6\Rightarrow 21x-9=18x\Rightarrow 3x=9\Rightarrow x=3\Rightarrow 21x=63$

4.- La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 1 a las cifras de las unidades. Si el número se multiplica por 3, este producto equivale a 21 veces la suma de sus cifras.

Solución:

Sea x la cifra de las unidades. Entonces la cifra de las decenas es: $x+1$. El número será entonces:

$10(x+1)+x=11x+10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(11x+10)=21(x+1+x)=21(2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 33x+30=42x+21 \Rightarrow 9x=9 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 11x+10=21$

5.- La suma de la cifra de las decenas y de la cifra de las unidades de un número de dos cifras es 7. Si el número aumentado en 8, se divide por el doble de la cifra de las decenas, el cociente es 6. Hallar el número.

Solución:

Sea x la cifra de las unidades, entonces, la cifra de las decenas es $7-x$, y el número será: $10(7-x)+x=70-9x$.

Ahora: $\dfrac{(70-9x)+8}{2(7-x)}=6 \Rightarrow \dfrac{78-9x}{14-2x}=6 \Rightarrow 78-9x=84-12x \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2 \Rightarrow 70-9x=70-18=52$

6.- La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 2 a la cifra de las unidades y el número excede en 27 a 10 veces la cifra de las unidades. Hallar el número.

Solución:

Sea x la cifra de las unidades y por tanto la cifra de las decenas será: $x+2$. Entonces, el número será: $10(x+2)+x=11x+20$. Ahora, el enunciado del problema dice que:

$11x+20=10x+27 \Rightarrow x=7$.

El número es entonces: $11x+20 \Rightarrow 77+20=97$

7.- La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si el número disminuido en 4, se divide por la diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades, el cociente es 20. Hallar el número.

Solución:

La cifra de las unidades es ***x*,** por tanto la cifra de las decenas es 2x. El número será:

$10(2x)+x=21x$. Ahora, el enunciado del problema dice que:

$$\frac{21x-4}{2x-x}=20\Rightarrow\frac{21x-4}{x}=20\Rightarrow 21x-4=20x\Rightarrow x=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 21x\Rightarrow 84$$

Ejercicio 156.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- A puede hacer una obra en 3 días y B en 6 días. ¿ En cuánto tiempo pueden hacer lka obra los dos trabajando juntos?.

Solución:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2+1}{6}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=2\left(dias\right)$$

2.- Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿ En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos llaves juntas?.

Solución:

Los caudales de cada llave serán: $\frac{V}{10}$ y $\frac{V}{20}$, y el caudal de las dos juntas: $\frac{V}{x}$.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3}{20}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{20}{3}\left(\min\right)=6\frac{2}{3}\left(\min\right)$$

3.- A puede hacer una obra en 4 días, B en 6 días y C en 12 días. ¿ En cuánto tiempo pueden hacer la obra los tres juntos?.

Solución:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3+2+1}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{6}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=2\left(dias\right)$$

4.- A puede hacer una obra en $1\frac{1}{2}\left(dias\right)$, B en 6 días y C en $2\frac{2}{5}\left(dias\right)$. ¿En cuánto tiempo harán la obra los tres juntos?.

Solución:

$$A=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(dias\right);B=6\left(dias\right);C=2\frac{2}{5}=\frac{12}{5}\left(dias\right)$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{12}{5}}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8+2+5}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}(dias)$$

5.- Una llave puede llenar un depósito en 5 minutos, otra en 6 minutos y otra en 12 minutos. ¿ En cuánto tiempo llenarán el depósito las tres abiertas al mismo tiempo?.

Solución:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{12+10+5}{60}=\frac{27}{60}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{60}{27}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}(\min)$$

6.- Una llave puede llenar un depósito en 4 minutos, otra llave en 8 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, si estando vacío y abierto el desagüe, se abren las dos llaves?.

Solución:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{20}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{10+5-2}{40}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{13}{40}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{40}{13}=3\frac{1}{13}(\min)$$

Ejercicio 157.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

Nota importante: En la solución de este tipo de problema, se considera que el reloj está dividido en 60 partes iguales, y entre cada hora hay 5 partes iguales. Si se llama ***x*** al desplazamiento de la aguja minutero, necesariamente $\frac{x}{12}$ será el correspondiente desplazamiento de la aguja horario.

1.- ¿A qué hora entre la 1 y las 2, están opuestas las agujas del reloj?.

Solución:

$$x=5+\frac{x}{12}+30\Rightarrow x-\frac{x}{12}=35\Rightarrow\frac{11}{12}x=35\Rightarrow x=35\frac{12}{11}=38{,}1818=38\frac{2}{11}$$

Las agujas serán opuestas a la 1h y $38\frac{2}{11}(\min)$.

2.- ¿A qué hora entre las 10 y las 11, las agujas del reloj, forman ángulo recto ¿

Solución:

Hay dos soluciones.

1).- La primera, antes que el minutero pase sobre el horario, llamando ***x*** al recorrido del minutero:

$$x+15=50+\frac{x}{12}\Rightarrow x-\frac{x}{12}=50-15=35\Rightarrow x=38\frac{2}{11}(\min)\Rightarrow$$

$$10(h)38\frac{2}{11}(\min)$$

2).- Justo después de las 10h. Llamando ***x*** al recorrido del minutero, e3l cual se encuentra justo después de las 12:

$$50+\frac{x}{12}+15=60+x\Rightarrow x-\frac{x}{12}=5\Rightarrow\frac{11}{12}x=5\Rightarrow x=5\frac{5}{11}(\min)$$

La hora será: $10(h)5\frac{5}{11}(\min)$

3.- ¿ A qué hora entre las 8 y las 9 están opuestas las agujas del reloj?

Solución:

$$40+\frac{x}{2}+30=x+60\Rightarrow 10=\frac{11}{12}x\Rightarrow x=10\frac{10}{11}(\min)$$

La hora es: $8(h)10\frac{10}{11}(\min)$

4.- ¿ A qué hora entre las 12 y la 1 están opuestas las agujas del reloj?.

Solución:

Llamando ***x*** al desplazamiento del minutero: $x=\frac{x}{12}+30\Rightarrow\frac{11}{12}x=30\Rightarrow x=32\frac{8}{11}(\min)$

La hora es: $12(h)32\frac{8}{11}(\min.)$

5.- ¿ A qué hora entre las 2 y las 3 forman ángulo recto las agujas del reloj?.

Solución:

Llamando ***x*** al desplazamiento del minutero:

$$x = 10 + \frac{x}{12} + 15 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 25 \Rightarrow x = 27\frac{3}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $2(h)27\frac{3}{11}(\text{min})$

6.- ¿ A qué hora entre las 4 y las 5 coinciden las agujas del reloj?.

Solución:

Llamando ***x*** al desplazamiento del minutero:

$$x = 20 + \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{11}{12}x = 20 \Rightarrow x = 21\frac{9}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $4(h)21\frac{9}{11}(\text{min.})$

7.- ¿ A qué hora entre las 6 y las 7 las agujas forman ángulo recto?

Solución:

Este problema tiene dos soluciones, llamando siempre ***x*** al desplazamiento del minutero.

La primera, antes que el minutero pase sobre las 6.

$$x + 15 = 30 + \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{11}{12}x = 15 \Rightarrow x = 16\frac{4}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $6(h)16\frac{4}{11}(\text{min.})$

La segunda es, cuando el minutero ya ha pasado sobre las 6.

$$x = 30 + \frac{x}{12} + 15 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 45 \Rightarrow x = 49\frac{1}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $6(h)49\frac{1}{11}(\text{min.})$

8.- ¿ A qué hora entre las 10 y las 11 coinciden las agujas del reloj?.

Solución:

Llamando ***x*** al desplazamiento del minutero:

$$x = 50 + \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{11}{12}x = 50 \Rightarrow x = 54\frac{6}{11}(\text{min})$$

La hora es: $10(h)54\frac{6}{11}(\text{min})$

9.- ¿ A qué hora entre las 7 y las 7 y 30, están en ángulo recto las agujas del reloj?.

Solución:

El enunciado del problema dice que la aguja minutero no llega a pasar sobre el 6. Entonces:

$$x + 15 = 35 + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{11}{12}x = 20 \Rightarrow x = 21\frac{9}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $7(h)21\frac{9}{11}(\text{min.})$

10.- ¿ A qué hora entre las 3 y las 4, el minutero dista exactamente 5 divisiones del horario, después de haberlo pasado?.

Solución:

$$x = 15 + \frac{x}{12} + 5 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 20 \Rightarrow x = 21\frac{9}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $3(h)21\frac{9}{11}(\text{min})$

11.- ¿ A qué horas, entre las 8 y las 9, el minutero dista exactamente del horario 10 divisiones?.

Solución:

Este problema tiene dos soluciones.

La primera solución, es cuando la aguja minutero no ha sobrepasado la aguja horario.

$$x + 10 = 40 + \frac{x}{12} \Rightarrow\Rightarrow \frac{11}{12}x = 30 \Rightarrow x = 32\frac{8}{11}(\text{min.})$$

La hora es: $8(h)32\frac{8}{11}(\min.)$

La segunda solución es cuando la aguja minutero ya ha pasado sobre la aguja horario:

$$x = 40 + \frac{x}{12} + 10 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 50 \Rightarrow x = 54\frac{6}{11}(\min.)$$

La hora es: $8(h)54\frac{6}{11}(\min.)$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía # 57D.

Tema: Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado. Misceláneos. (Baldor).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

Ejercicio 158.- Resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado:

1.- La diferencia de dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 unidades a los $\frac{3}{8}$ del menor. Hallar los números.

Solución:

$$y-x=6 \Rightarrow y=x+6 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+6)=\frac{3}{8}x+10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x+24=3x+80 \Rightarrow x=80-24=56; y=62$$

2.- A tenía \$120 y B tenía \$90. Después que A le dio a B cierta suma de dinero, B tiene los $\frac{11}{10}$ de lo que tenía A. ¿Cuánto le dio A a B?.

Solución:

$$90+x=\frac{11}{10}(120-x)\Rightarrow 900+10x=1320-11x\Rightarrow 21x=420\Rightarrow x=\$20.$$

3.- Un número se aumentó en 6 unidades, esta suma se dividió entre 8; al cociente se le sumó 5 y esta nueva suma se dividió entre 2, obteniendo 4 de cociente. Hallar el número.

Solución:

$$\frac{\frac{x+6}{8}+5}{2}=4\Rightarrow\frac{\frac{x+6+40}{8}}{2}=4\Rightarrow\frac{x+46}{16}=4\Rightarrow x+46=64\Rightarrow x=18$$

4.- Se ha repartido una herencia de 48000 soles entre dos personas de modo que la parte de la que recibió menos equivale a los $\frac{5}{7}$ de la parte de la persona favorecida. Hallar la parte de cada uno.

Solución:

$$x+\frac{5}{7}x=48000\Rightarrow\frac{7x+5x}{7}=48000\Rightarrow 12x=336000\Rightarrow x_1=28000(soles);x_2=20000(soles)$$

5.- Dividir 84 en dos partres tales que $\frac{1}{10}$ de la parte mayor equivalga a $\frac{1}{4}$ de la mneor.

Solución:

$$y>x\Rightarrow y+x=84\Rightarrow\frac{1}{10}y=\frac{1}{4}x\Rightarrow y=\frac{10}{4}x=\frac{5}{2}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}x+x=84\Rightarrow 5x+2x=168\Rightarrow 7x=168\Rightarrow x=24(soles):y=60(soles)$$

6.- Dividir 120 en dos partes tales que la menor sea a la mayor como 3 es a 5.

Solución:

$$y>x;\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\Rightarrow 3y=5x\Rightarrow y=\frac{5}{3}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+x=120\Rightarrow\frac{5}{3}x+x=120\Rightarrow 5x+3x=360\Rightarrow 8x=360\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{360}{8}=45;y=\frac{5\times 45}{3}=75$$

7.- Un hombre gasta la mitad de su sueldo mensual en el alquiler de la casa y alimentación de su familia y $\frac{3}{8}$ de ls sueldo en otros gastos. Al cabo de 15 meses ha ahorrado \$300. ¿ Cuál es su sueldo mensual?.

Solución:

$$15\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x\right)=300\Rightarrow\left(8x-4x-3x\right)=\frac{300\times 8}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{300\times 8}{15}=160\left(\$\right)$$

8.- Un hombre gastó $\frac{1}{5}$ de lo que tenía en ropa; $\frac{3}{8}$ en libros; prestó \$102 a un amigo y se quedó sin nada. ¿Cuánto gastó en ropa y cuánto en libros?.

Solución:

Llamaremos ***x*** a la cantidad de dinero que tenía:

$$x-\frac{1}{5}x-\frac{3}{8}x-102=0\Rightarrow x-\frac{1}{5}x-\frac{3}{8}x=102\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{40x-8x-15x}{40}=102\Rightarrow 17x=102\times 40=4080\Rightarrow x=\frac{4080}{17}=240\left(\$\right)\Rightarrow$$

$$Ropa:\frac{1}{5}\left(240\right)=48\left(\$\right);Libros:\frac{3}{8}\left(240\right)=90\left(\$\right)$$

9.- La edad de B es $\frac{2}{5}$ de la edad de A y la de C es $\frac{2}{3}$ de la de B. Si entre los tres tienen 25 años, ¿cuál es la edad de cada uno?.

Solución:

$$A+B+C=25\left(años\right)$$

$$A+\frac{2}{5}A+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)A=25\Rightarrow A+\frac{2}{5}A+\frac{4}{15}A=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15A+6A+4A=25\times 15=375\Rightarrow 25A=375\Rightarrow A=\frac{375}{25}=15\left(años\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\frac{2}{5}\left(15\right)=6\left(años\right);C=\frac{2}{3}\left(6\right)=4\left(años\right)$$

10.- Vendí un automóvil por 8.000 bolívares más la tercera parte de lo que me había costado, y en esta operación gané 2.000 bolívares. ¿Cuánto me había costado el auto?.

Solución:

Llamaremos ***x*** al costo inicial del automóvil, en bolívares.

$$8000+\frac{1}{3}x-x=2000 \Rightarrow 6000=x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x \Rightarrow x=9000(Bs.)$$

11.- Compré cierto número de libros a 2 por \$5 y los vendía a 2 por \$7, ganando en esta operación \$8. ¿Cuántos libros compré?.

Solución:

Llamaremos **x** al número de libros comprados.

$$\left(\frac{x}{2}\right)7-\left(\frac{x}{2}\right)5=8 \Rightarrow 7x-5x=16 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8(libros)$$

12.- Compré cierto número de libros a 4 por \$3 y un número de libros igual a los $\frac{3}{4}$ del número de libros anterior a 10 por \$7. Vendiéndolos todos a 2 por \$3 gané \$54. ¿Cuántos libros compré?.

Solución:

Llamaremos ***x*** al número de libros total comprados inicialmente a 4 por \$3. Entonces, de acuerdo con el enunciado del problema, el número total de libros comprados es $x+\frac{3}{4}x$.

$$\left(x+\frac{3}{4}x\right)\frac{3}{2}-(x)\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}x\right)\frac{7}{10}=54 \Rightarrow \left(\frac{4x+3x}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}x-\frac{21}{40}x=54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{21}{8}x-\frac{3}{4}x-\frac{21}{40}x=54 \Rightarrow 105x-30x-21x=2160 \Rightarrow 54x=2160 \Rightarrow x=40(libros)$$

Total de libros comprados: $x+\frac{3}{4}x=40+\frac{3}{4}(40)=40+30=70(libros)$

13.- Dividir 150 en cuatro partes tales que la segunda sea los $\frac{5}{6}$ de la primera, la tercera los $\frac{3}{5}$ de la segunda, y la cuarta $\frac{1}{3}$ de la tercera.

Solución:

Llamaremos **x** a la primera parte.

$$x+\frac{5}{6}x+\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}x\right)+\frac{1}{3}\left[\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)x\right]=150\Rightarrow x+\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x=150\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{6x+5x+3x+1}{6}=150\Rightarrow\frac{15x}{6}=150\Rightarrow\frac{5}{2}x=150\Rightarrow 5x=300\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{300}{5}=60.$$

Entonces, las partes serán: $60;50;30;10.\Rightarrow 60+50+30+10=150.$

14.- ¿ A qué hora entre las 9 y las 10 coinciden las agujas del reloj?.

Solución:

Llamaremos ***x*** al recorrido del minutero.

$$x=9\times5+\frac{x}{12}=45+\frac{x}{12}\Rightarrow x-\frac{x}{12}=\frac{11}{12}x=45\Rightarrow x=49\frac{1}{11}(\min.)$$

Entonces, las agujas coinciden a las $9(h)49\frac{1}{11}(\min.)$.

15.- A es 10 años mayor que B y hace 15 años la edad de B era los $\frac{3}{4}$ de la edad de A. Hallar las dos edades actuales.

Solución:

$$A=B+10$$
$$B-15=\frac{3}{4}(A-15)=\frac{3}{4}(B+10-15)\Rightarrow B-15=\frac{3}{4}B-\frac{3}{4}(5)\Rightarrow 4B-60=3B-15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow B=45(años);A=55(años)$$

16.- A y B trabajando juntos pueden hacer una obra en 6 días. B solo puede hacerla en 10 días. ¿ En cuántos días puede hacerla A?.

Solución:

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{A}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{A}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}\Rightarrow$$
$$A=15\left(dias\right)$$

17.- Dividir 650 en dos partes tales que si la mayor se divide entre 5 y la menor se disminuye en 50, los resultados son iguales.

Solución:

$$y>x\Rightarrow\frac{y}{5}=x-50\Rightarrow y=5x-250\Rightarrow$$
$$y+x=650\Rightarrow\left(5x-250\right)+x=650\Rightarrow 6x=900\Rightarrow x=150; y=500$$

18.- La edad actual de A es $\frac{1}{4}$ de la de B. Hace 10 años era $\frac{1}{10}$. Hallar las edades actuales.

Solución:

$$A=\frac{1}{4}B\Rightarrow B=4A$$
$$A-10=\frac{1}{10}\left(B-10\right)=\frac{1}{10}\left(4A-10\right)\Rightarrow 10A-100=4A-10\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6A=90\Rightarrow A=15\left(años\right); B=60\left(años\right)$$

19.- Hallar dos números consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados exceda en 43 al $\frac{1}{11}$ del número menor.

Solución:

$$\left(x+1\right)^2-x^2=\frac{1}{11}x+43\Rightarrow x^2+2x+1-x^2=\frac{1}{11}x+43\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-\frac{1}{11}x=42\Rightarrow\left(22-1\right)x=42\times 11\Rightarrow 21x=462\Rightarrow x=\frac{462}{21}=22$$

Los números son: 22 y 23.

20.- Un capataz contrata un obrero ofreciéndole un sueldo anual de 3000 sucres y una sortija. Al cabo de 7 meses el obrero es despedido y recibe 1500 sucres y la sortija. ¿Cuál era el valor de lka sortija?

Solución:

Se llamará $\boldsymbol{x}$ al valor de la sortija. Entonces:

$$\frac{7}{12}\left(3000+x\right)=1500+x \Rightarrow 21000+7x=18000+12x \Rightarrow 5x=3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3000}{5}=600\left(sucres\right)$$

21.- Una suma de \$120 se reparte por partes iguales entre cierto número de personas. Si el número de personas hubiera sido $\frac{1}{5}$ más de lo que había, cada persona hubiera recibido \$2 menos. ¿Entre cuántas personas se recibió el dinero?

Solución:

En la situación original hay **x** número de personas y si los \$120 se reparten entre ese número de personas, cada uno recibiría $\frac{120}{x}(\$)$. Si se agrega ahora $\frac{1}{5}x$ personas, entonces, el número de personas sería $x+\frac{1}{5}x=\frac{6}{5}x$; luego, en esta nueva situación cada persona recibiría $\frac{120}{\frac{6}{5}x}=\frac{600}{6x}=\frac{100}{x}$. Ahora, el enunciado del problema dice que:

$$\frac{120}{x}-\frac{100}{x}=2 \Rightarrow 60-50=x=10\left(personas\right).$$

22.- Un hombre compró cierto número de libros por \$400. Si hubiera comprado $\frac{1}{4}$ más del número de libros que compró por el mismo dinero, cada libro le habría costado \$2 menos. ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada uno?

Solución:

Llamaremos **x** al número de libros comprado en la primera situación. Si el número de libros aumenta en $\frac{1}{4}$, se puede expresar como $x+\frac{1}{4}x=\frac{5}{4}x$. Ahora, el eneunciado del proble nos dice que: $\frac{400}{x}-\frac{400}{\frac{5}{4}x}=2 \Rightarrow \frac{400}{x}-\frac{320}{x}=2 \Rightarrow 200-160=x=40\left(libros\right)$

El hombre compró 40 libros a \$10, cada uno.

23.- Se ha repartido cierta suma entre A, B y C. A recibió \$30 menos que la mitad de la suma; B \$ 20 más que los $\frac{3}{7}$ de la suma y y C el resto, que eran \$30. ¿Cuánto recibieron A y B?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ a la suma bujscada. Entonces, podemos escribir siguiendo las instrucciones del enunciado del problema:

$$x-\left(\frac{1}{2}x-30\right)-\left(\frac{3}{7}x+20\right)=30 \Rightarrow x-\left(\frac{x-60}{2}\right)-\left(\frac{3x+140}{7}\right)=30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x-7(x-60)-2(3x+140)=420 \Rightarrow 14x-7x+420-6x-280=420 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=280 \Rightarrow A=\frac{1}{2}x-30=\frac{280}{2}-30=140-30=110(\$);B=\frac{3}{7}\times 280+20=140(\$)$$

24.- Compré cierto número de libros a 5 libros por \$6. Me quedé con $\frac{1}{3}$ de los libros y vendiendo el resto a 4 libros por \$9 gané \$9. ¿Cuántos libros comprántos libros compré?

Solución:

Llamaremos x al número de libros comprados originalmente:

$$\frac{2}{3}x\left(\frac{9}{4}\right)-x\left(\frac{6}{5}\right)=9 \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{6}{5}x=9 \Rightarrow (15-12)x=90 \Rightarrow 3x=90 \Rightarrow x=30(libros).$$

25.- Un hombre dejó la mitad de su fortuna a sus hijos; $\frac{1}{4}$ a sus hermanos; $\frac{1}{6}$ a un amigo y el resto, que eran 2500 colones, a un asilo. ¿Cuál era su fortuna?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ al total de la fortuna dejada por el hombre:

$$x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x=2500 \Rightarrow \frac{12x}{12}-\frac{6x}{12}-\frac{3x}{12}-\frac{2x}{12}=2500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12}=2500 \Rightarrow x=30.000(colones).$$

26.- Un padre de familia gasta los $\frac{3}{5}$ de su sueldo anual en atenciones de su casa; $\frac{1}{8}$ en ropa, $\frac{1}{20}$ en paseos y ahorra 810 balboas al año. ¿Cuál es su sueldo anual?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ a su sueldo anual.

$$x-\frac{3}{5}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{20}x=810\Rightarrow\frac{40x-24x-5x-2x}{40}=810\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x=810\times 40=32.400\Rightarrow x=3600\left(balboas\right).$$

27.- Un hombre gastó el año antepasado los $\frac{3}{8}$ de sus ahorros; el año pasado $\frac{5}{12}$ de sus ahorros iniciales; este año $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba y aún tiene \$400. ¿Cuánto eran sus ahorros iniciales?

Solución:

Llamaremos x al monto de sus ahorros iniciales.

$$x-\frac{3}{8}x-\frac{5}{12}x-\frac{3}{5}\left[x-\frac{3}{8}x-\frac{5}{12}x\right]=400\Rightarrow\frac{24x-9x-10x}{24}-\frac{3}{5}\left(\frac{5}{24}x\right)=400\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{5}{24}x-\frac{1}{8}x=400\Rightarrow\left(\frac{5-3}{24}\right)x=400\Rightarrow\frac{1}{12}x=4800\left(\$\right)$$

28.- Dividir 350 en dos partes, tales que la diferencia entre la parte menor y los $\frac{3}{5}$ de la mayor equivalga a la diferencia entre la parte mayor y los $\frac{17}{15}$ de la menor.

Solución:

$y>x\Rightarrow y+x=350.$

El enunciado dice:

$$x-\frac{3}{5}y=y-\frac{17}{15}x\Rightarrow x-\frac{3}{5}\left(350-x\right)=\left(350-x\right)-\frac{17}{15}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{5x-1050+3x}{5}=\frac{5250-15x-17x}{15}\Rightarrow 15x-3150+9x=5250-32x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 56x=5250+3150=8400\Rightarrow x=150:y=200$$

29.- Se ha repartido cierta suma de dinero entre A, B y C. A recibió \$15, B recibió tanto como A más los $\frac{2}{3}$ de lo que recibió C y C recibió tanto A y B juntos. ¿Cuĺl fue la suma repartida?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ al monto que recibió C y $\boldsymbol{S}$ a la suma total que fue repartida entre los tres.

El enunciado del problema nos dice que:

$$15+\left(15+\frac{2}{3}x\right)=x\Rightarrow 30=x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}x\Rightarrow x=90(\$)=C$$

$$S=A+B+C=15+\left(15+\frac{2}{3}\times 90\right)+90=30+60+90=180(\$)$$

30.- Tengo 9,60 en pesos, y en monedas de 20 centavos y de 10 centavos respectivamente. El número de piezas de 20 centavos es los $\frac{3}{4}$ del número de pesos y el número de piezas de 10 centavos es es los $\frac{2}{3}$ del número de pesos.

Solución:

Para resolver este problema se hará un balance con los valores del dinero, para ello se llamará $\boldsymbol{x}$ al número de billetes de un peso:

$$9,60(pesos)=x(pesos)+\left(\frac{3}{4}x\right)(0,2)(pesos)+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)(0,1)(pesos)\Rightarrow$$

$$9,60=x+\frac{3}{2}x(0,1)+\frac{1}{2}x(0,1)=x+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)(0,1)x=x+0,2x=1,2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9,60=1,2x\Rightarrow x=\frac{9,60}{1,2}=8(pesos).$$

Entonces, la solución es: **8 billetes de un peso + 6 monedas de 0,20 + 4 monedas de 0,10.**

31.- Un comerciante perdió el primer año $\frac{1}{5}$ de su capital; el segundo año ganó una cantidad igual a los $\frac{3}{10}$ de lo que le quedaba; el tercer año ganó los $\frac{3}{5}$ de lo que tenía al terminar el segundo año y entonces tiene 13312 quetzales. ¿Cuál era su capital primitivo?

Solución:

Llamaremos x al monto del capital primitivo.

Al terminar el primer año le quedaron: $x-\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x.$

Al terminar el segundo año, tenía: $\frac{4}{5}x+\frac{3}{10}\left(\frac{4}{5}x\right)=\frac{4}{5}x+\frac{6}{25}x=\frac{20+6}{25}x=\frac{26}{25}x$

Al terminar el tercer año tiene:

$$\frac{26}{25}x+\frac{3}{5}\left(\frac{26}{25}\right)x=13.312$$

$$\frac{26\times5+26\times3}{125}x=13312\Rightarrow x=13312\times\frac{125}{26\times8}=8.000\left(Quetzales\right)$$

32.- A y B tienen la misma edad. Si A tuviera 10 años menos y B 5 años más, la edad de A sería los $\frac{2}{3}$ de la de B. Hallar la edad de A.

Solución:

$$A=B$$

$$A-10=\frac{2}{3}\left(A+5\right)\Rightarrow 3A-30=2A+10\Rightarrow A=40\left(años\right)$$

33.- Un comandante dis pone sus tropas formando un cuadrad y ve que le quedan afuera 36 hombres. Entonces pone un hombre más en cada lado del cuadrado y ve que la faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres había en el lado del primer cuadrado y cuántos hombres hay en la tropa?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ el número de soldados en un lado del primer cuadrado; entonces el número total de soldados bajo las órdenes del comandante son x^2+36. La clave para resolver el problema es darse cuenta de que el número total de soldados sigue siendo el mismo en ambos casos.

En la primera situación tenemos x^2+36

En la segunda situación tendremos $\left(x+1\right)^2-75$

Luego, como el número total de soldados es el mismo, en ambos casos:

$$\left(x+1\right)^2-75=x^2+36\Rightarrow x^2+2x+1-75=x^2+36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-74=36\Rightarrow 2x+110\Rightarrow x=55\left(soldados\right)$$

El número total de soldados es $x^2+36=\left(55\right)^2+36=3061\left(soldados\right)$

34.- Gasté los $\frac{5}{8}$ de lo que tenía y \$20 más y me quedé con la cuarta parte de lo que tenía y \$16 más. ¿Cuánto tenía?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ el monto de dinero que tenía inicialmente.

$$x-\frac{5}{8}x-20=\frac{1}{4}x+16\Rightarrow\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}x=16+20=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{3-2}{8}\right)x=36\Rightarrow\frac{x}{8}=36\Rightarrow x=288(\$)$$

35.- A empieza a jugar con cierta suma. Primero ganó una cantidad igual a lo que tenía al empezara jugar; después perdió 60 bolívares; más tarde perdió $\frac{3}{10}$ de lo que le quedaba y perdiendo nuevamente una cantidad igual a los $\frac{7}{8}$ del dinero con que empezó a jugar, se quedó sin nada. ¿Con cuánto empezó a jugar?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ al monto de dinero con que empezó a jugar. Siguiendo las instrucciones del enunciado, se puede escribir que:

$$x+x-60-\frac{3}{10}(2x-60)-\frac{7}{8}x=0\Rightarrow 2x-\frac{3}{5}x+18-\frac{7}{8}x=60\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-\frac{3}{5}x-\frac{7}{8}x=42\Rightarrow\frac{80x-24x-35x}{40}=42\Rightarrow\frac{21x}{40}=42\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{42\times 40}{21}=80(Bs.)$$

36.- Un número de dos cifras excede en 18 a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en 5 a las cifras de las unidades, ¿cuál es la cifra?

Solución:
$$N=yx\Rightarrow 10y+x\Rightarrow 10(x+5)+x=6(y+x)+18\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x+50+x=6(x+5+x)+18\Rightarrow 11x+50=12x+30+18\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11x+50=12x+48\Rightarrow x=2;y=7\Rightarrow N=72$$

37.- La suma de las cifras de un número menor que 100 es 9. Si al número se le resta 27 las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

$N = yx < 100 \Rightarrow y + x = 9 \Rightarrow y = 9 - x.$
$10y + x - 27 = 10x + y \Rightarrow 10(9 - x) + x - 27 = 10x + 9 - x \Rightarrow$
$\Rightarrow 90 - 27 - 9x = 9x + 9 \Rightarrow 54 = 18x \Rightarrow x = 3; y = 6 \Rightarrow N = 63$

38.- En un puesto de frutas había cierto número de mangos. Un cliente compra $\frac{1}{3}$ de todos los mangos que había más 4 mangos; otro cliente compró $\frac{1}{3}$ de los que quedaban y 6 más; un tercer cliente compró la mitad de los que quedaban y 9 más, y se acabaron los mangos. ¿Cuántos mangos había en el puesto?

Solución:

Llamaremos x al número original de mangos en el puesto.

El primer cliente compró $\frac{1}{3}x + 4;$ entonces, quedaron: $x - \frac{x}{3} - 4 = \frac{2x - 12}{3}$.

El segundo cliente compró $\frac{1}{3}\left(\frac{2x - 12}{3}\right) + 6;$ entonces, quedan:

$$\frac{2x - 12}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x - 12}{3}\right) - 6 \Rightarrow \frac{2x - 12}{3} - \frac{1}{9}(2x - 12) - 6 =$$
$$= \frac{6x - 36 - 2x + 12 - 54}{9} = \frac{4x - 78}{9}$$

El tercer cliente compró: $\frac{1}{2}\left(\frac{4x - 78}{9}\right) + 9 = \left(\frac{2x - 39}{9}\right) + 9;$ entonces, quedan:

$$\frac{4x - 78}{9} - \frac{(2x - 39)}{9} - 9 = 0 \Rightarrow 4x - 78 - 2x + 39 = 81 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 81 + 39 = 120 \Rightarrow x = 60(mangos)$$

39.- A tenía \$80 y B tenía \$ 50. Ambos ganaron igual suma de dinero y ahora B tiene los $\frac{7}{10}$ de lo que tiene A. ¿Cuánto ganó cada uno?

Solución:

Llamaremos ***x*** a la suma de dinero ganada igualmente por ambos.

$$50 + x = \frac{7}{10}(80 + x) \Rightarrow 500 + 10x = 560 + 7x \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20(\$)$$

40.- Compré una plumafuente y un lapicero, pagando por éste los $\frac{3}{5}$ de lo que pagué por la plumafuente. Si la plumafuente me hubiera costado 20 ctvs. menos y el lapicero 30 ctvs. más el precio del lapicero hubiera sido los $\frac{5}{6}$ del precio de la plumafuente. ¿Cuánto costó la plumafuente y cuánto el lapicero?

Solución:

Llamaremos $\boldsymbol{x}$ al costo original de la plumafuente. Entonces, el costo original del lapicero será $\frac{3}{5}x$.

El enunciado del problema nos indica que:

$$\frac{3}{5}x+0,30=\frac{5}{6}\left(x-0,20\right)\Rightarrow\frac{3x+1,5}{5}=\frac{5x-1,0}{6}\Rightarrow 18x+9=25x-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x=14\Rightarrow x=2\left(\$\right);\frac{3}{5}x=\frac{6}{5}=1,2\left(\$\right)$$

41.- El lunes gasté la mitad de lo que tenía y \$2 más; el martes la mitad de lo que me quedaba y \$2 más; el miércoles la mitad de lo que me quedaba y \$2 más y me quedé sin nada. ¿Cuánto tenía el lunes antes de gastar nada?

Solución:

Llamaremos x al monto de dinero que tenía el lunes.

1).- El lunes gasté $\frac{x}{2}+2;$ entonces, me quedó: $x-\frac{x}{2}-2=\frac{x}{2}-2$

2).- El martes gasté: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-2\right)+2=\frac{x}{4}-1+2=\frac{x}{4}+1;$ entonces, me quedaron: $\frac{x}{2}-2-\left(\frac{x}{4}+1\right)=\frac{x}{4}-3.$

3).- El miércoles gasté $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-3\right)+2=\frac{x}{8}-\frac{3}{2}+2=\frac{x}{8}+\frac{4-3}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{2};$ entonces, finalmente me quedaron: $\frac{x}{4}-3-\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{4}-\frac{x}{8}=3+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{8}=3+\frac{1}{2}\Rightarrow x=24+4=28\left(\$\right)$

42.- Un hombre ganó el primer año de sus negocios una cantidad igual a la mitad del capital con que empezó sus negocios y gastó \$6.000; el segundo año ganó una cantidad igual a la mitad de lo que tenía y separó \$ 6.000 para gastos; el tercer año ganó una cantidad igual a la mitad de lo que tenía y separó $ 6.000 para gastos. Si su capital es entonces de $32.250, ¿cuál era su capital primitivo?.

Solución:

Llamaremos ***x*** a su capital primitivo.

1).- Ganó: $\frac{x}{2}-6.000$. Ahora, su nuevo capital es: $x+\frac{x}{2}-6.000=\frac{3x}{2}-6.000$.

2).- Ganó: $\frac{1}{2}\left[\frac{3x}{2}-6.000\right]-6.000=\frac{3x}{4}-3.000-6.000=\frac{3x}{4}-9000$. Ahora tiene un capital de: $\frac{3x}{2}-6.000+\frac{3x}{4}-9.000=\frac{9x}{4}-15.000$.

3).- Ganó: $\frac{1}{2}\left[\frac{9x}{4}-15.000\right]-6.000=\frac{9x}{8}-\frac{15000}{2}-6000=$. Ahora tiene un capital igual a:

$$\frac{9x}{4}-15.000+\frac{9x}{8}-\frac{15.000}{2}-6000=32.250\Rightarrow$$
$$\frac{18x+9x}{8}-\frac{(120.000+60.000+48.000)}{8}=32.250\Rightarrow$$
$$27x-228.000=258.000\Rightarrow 27x=486.000\Rightarrow x=18.000(\$)$$

43.-