GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 1 - Angulos formados cuando dos rectas paralelas son cortados por una secante.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

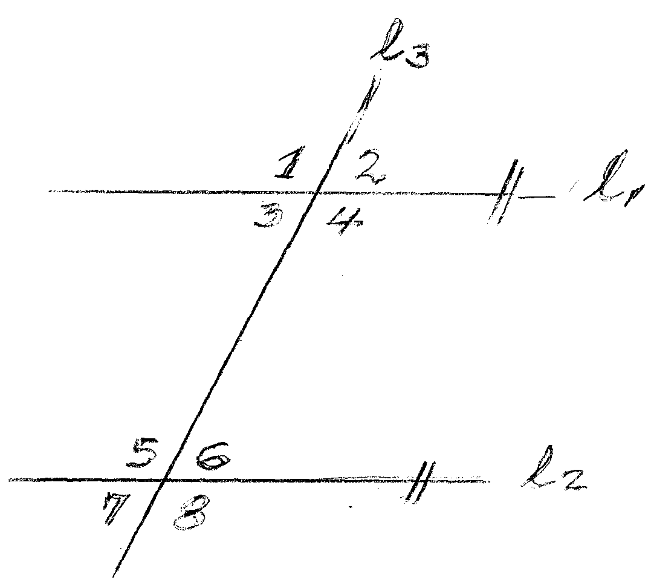
Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO: Cuando dos rectas paralelas, $l_1 \parallel l_2$, son cortadas por una recta secante l_3 se forman los siguientes pares de ángulos:



COLEGIO LOS ARCOS Guía de trabajo #1- Geometría- ángulos formados cuando dos rectas paralelas son cortados por una secante 9no grado

1.- Angulos alterno- internos son iguales:

$$\angle 3 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 5$$

2.- Angulos alterno- externos son iguales:

$$\angle 1 = \angle 8$$
$$\angle 2 = \angle 7$$

3.- Angulos correspondientes son iguales:

$$\angle 1 = \angle 5$$
$$\angle 3 = \angle 7$$
$$\angle 2 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 8$$

4.- Angulos consecutivos internos (*conjugados)*, son suplementarios:

$$\angle 4 + \angle 6 = 180°$$
$$\angle 3 + \angle 5 = 180°$$

5.- Angulos opuestos por el vértice son iguales:

$$\angle 1 = \angle 4$$
$$\angle 2 = \angle 3$$
$$\angle 5 = \angle 8$$
$$\angle 6 = \angle 7$$

PROBLEMAS:

1.- Si $\angle 1 = 120°$, calcular el resto de los ángulos.

2.- Si $\angle 7 = \dfrac{\angle 8}{2}$ hallar el valor de todos los ángulos.

3.- Si $\angle 1 = 5x$ y $\angle 6 = 13x$ hallar el valor de todos los ángulos.

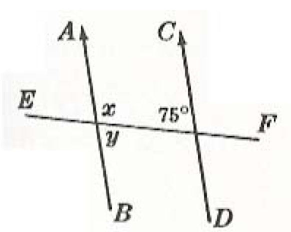
4.- Si $\angle 2 = (5x + 90)^\circ$ y también $\angle 6 = (14x + 9)^\circ$, hallar el valor de todos los ángulos.

5.- Si $\angle 1 = 90°$ y $\angle 8 = (7x - 1)^\circ$

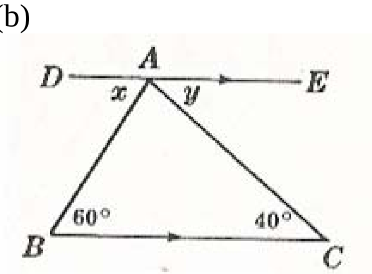
6.- Si $\angle 2 = (7x + 3)^\circ$ y $\angle 5 = (9x - 5)^\circ$ hallar el valor de todos los ángulos.

7.- Encontrar el valor de los ángulo s $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en las figuras siguientes:

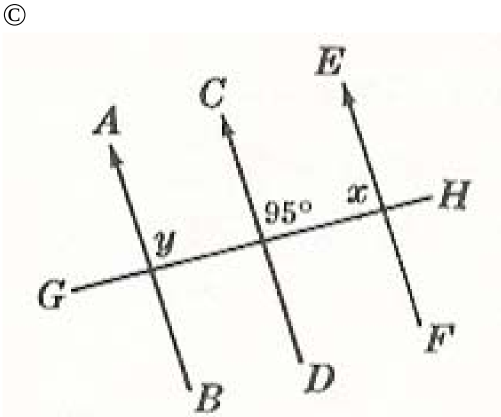
(a)



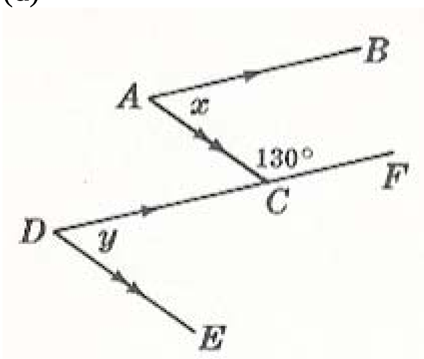
(b)



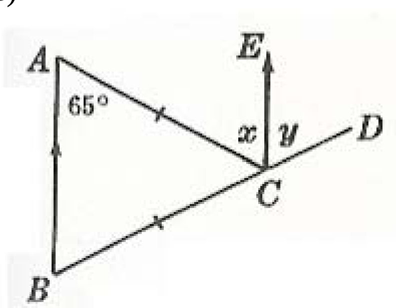
©



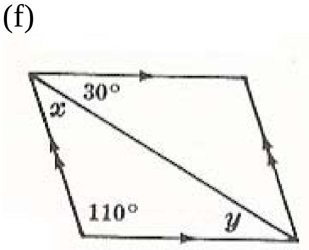
(d)



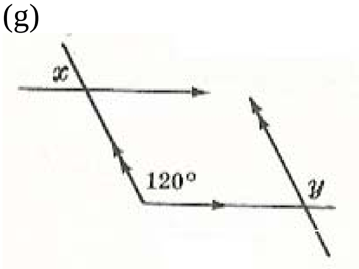
(e)



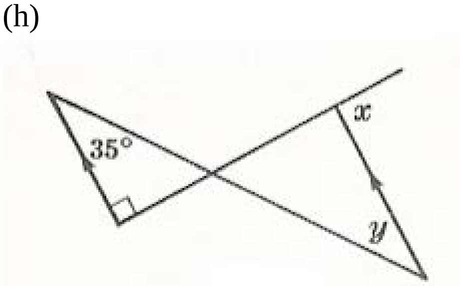
(f)



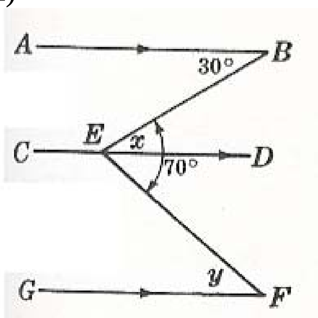
(g)



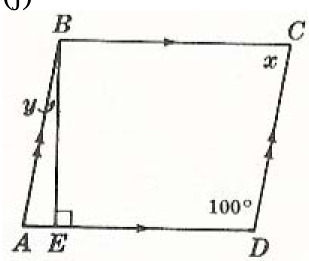
(h)



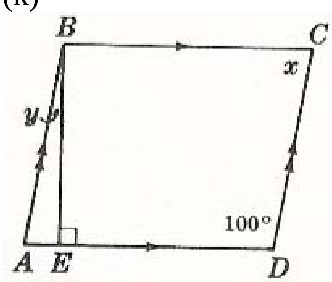
(i)



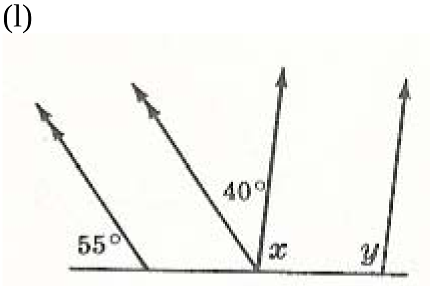
(j)



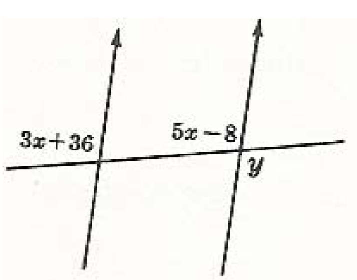
(k)



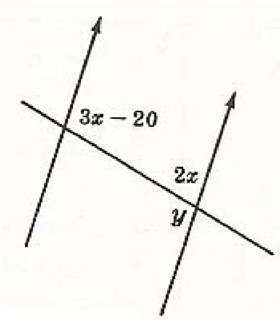
(l)



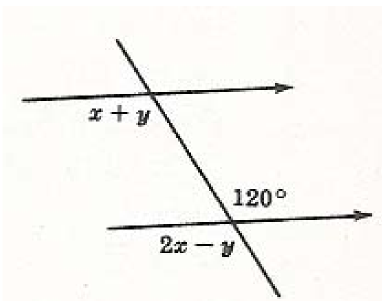
(m)



(n)



(o)



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 1A - Angulos formados cuando dos rectas paralelas son cortados por una secante.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

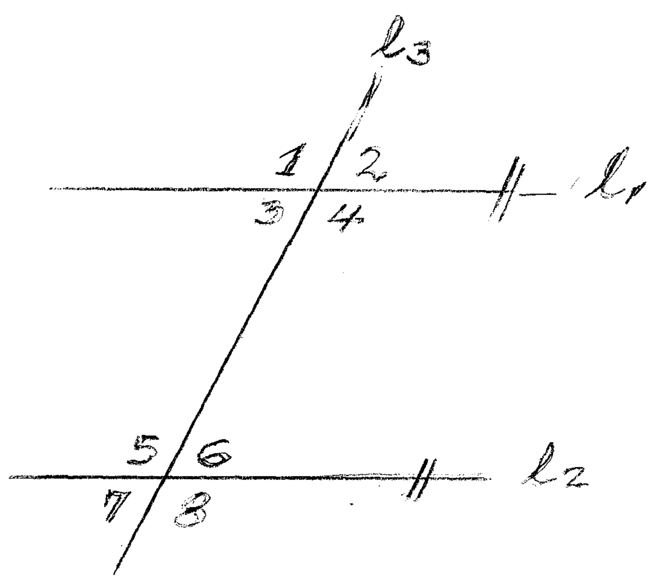
Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO: Cuando dos rectas paralelas, $l_1 \parallel l_2$, son cortadas por una recta secante l_3 se forman los siguientes pares de ángulos:



1.- Angulos alterno- internos son iguales:
$$\angle 3 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 5$$

2.- Angulos alterno- externos son iguales:
$$\angle 1 = \angle 8$$
$$\angle 2 = \angle 7$$

3.- Angulos correspondientes son iguales:
$$\angle 1 = \angle 5$$
$$\angle 3 = \angle 7$$
$$\angle 2 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 8$$

4.- Angulos consecutivos internos (*conjugados)*, son suplementarios:

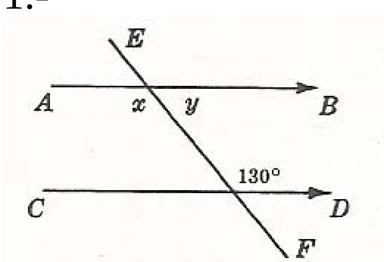
$$\angle 4 + \angle 6 = 180°$$
$$\angle 3 + \angle 5 = 180°$$

5.- Angulos opuestos por el vértice son iguales:

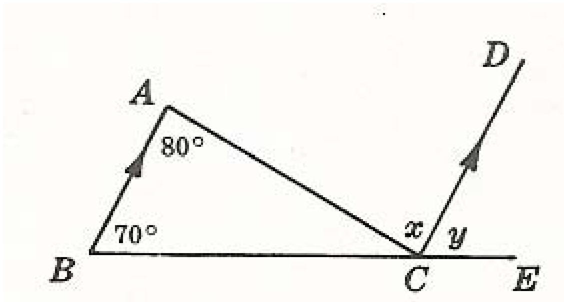
$$\angle 1 = \angle 4$$
$$\angle 2 = \angle 3$$
$$\angle 5 = \angle 8$$
$$\angle 6 = \angle 7$$

PROBLEMAS: **En cada figura encontrar los valores de *x* e *y*.**

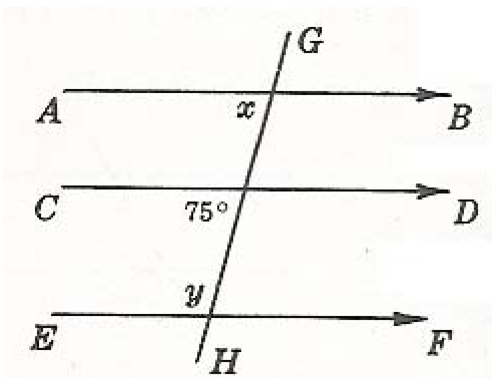
1.-



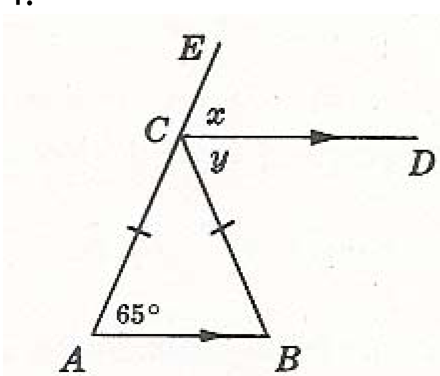
2.-



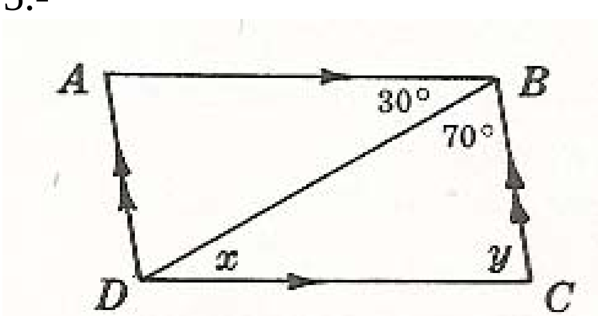
3.-



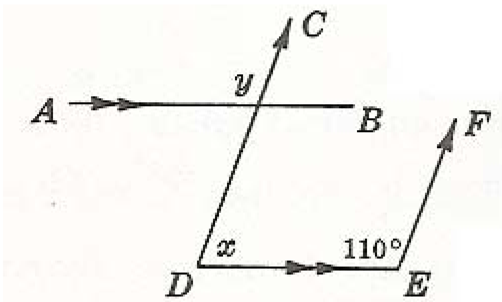
4.-



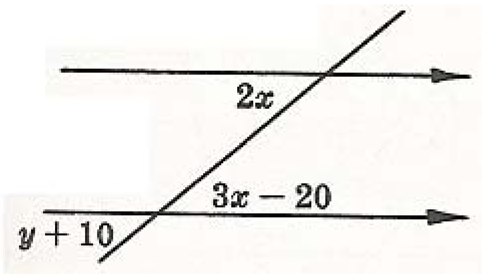
5.-



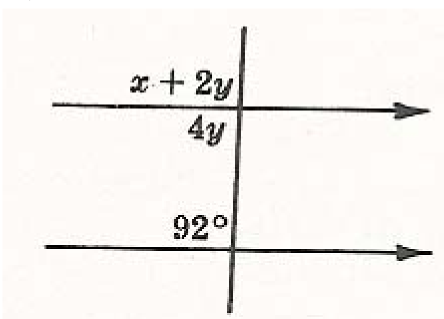
6.-



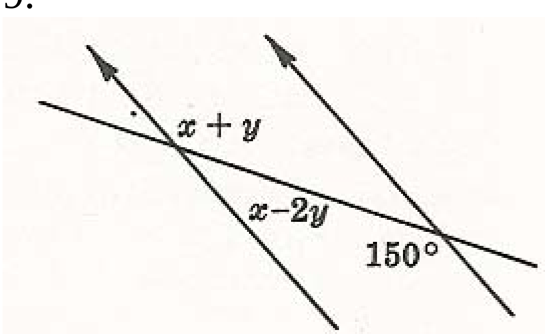
7.-



8.-



9.-



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.
Tema: Geometría 2- Explorando el triángulo.
Fecha:______________
Profesor: Fernando Viso

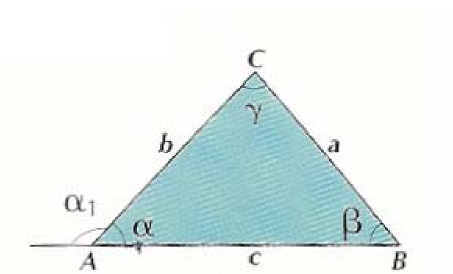
Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco teórico:

El triángulo es un polígono de solo tres lados, el cual se denota según sus vértices, por ejemplo, un triángulo de vértices A, B y C, el cual también se puede identificar como ΔABC. Ver gráfica abajo:



Triángulo ABC

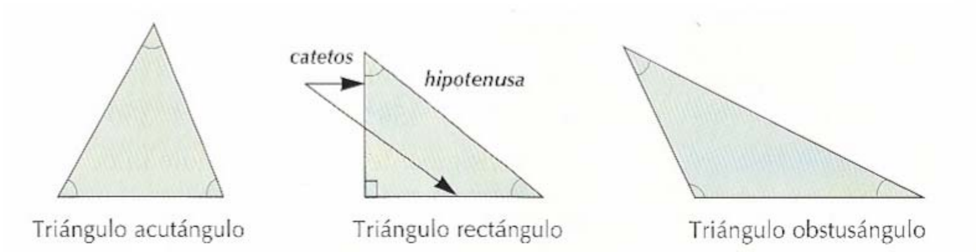
Como se puede ver, en el interior de un triángulo existen tres ángulos interiores los cuales se pueden identificar de diversas maneras, bien como $\angle A; \angle B; \angle C$, o por las letras griegas $\alpha;\beta;\gamma$. La suma de los valores de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre igual a 180°. Los ángulos exteriores de un triángulo son aquellos que son adyacentes a los ángulos interiores. Cada ángulo interior y su adyacente exterior suman 180°, por lo tanto son suplementarios.

Se considera que un lado de un triángulo es ***opuesto*** a un ángulo determinado si el lado no forma al ángulo.

Los triángulos se pueden clasificar según las medidas de sus lados o de sus ángulos interiores:

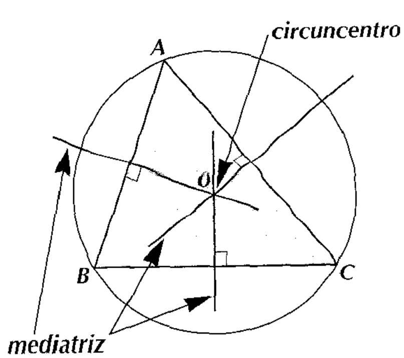
Según sus lados:

Según sus ángulos interiores:

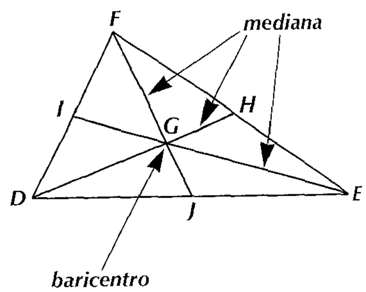


Rectas notables del triángulo:

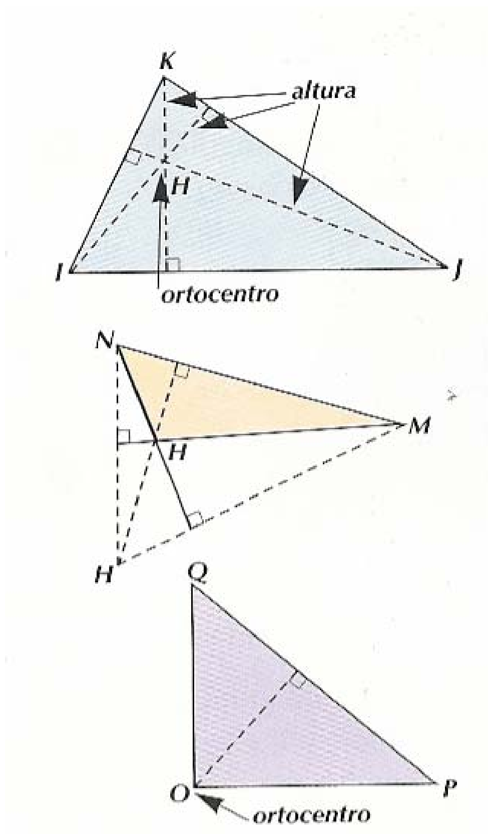
Mediatrices de un triángulo: Son las mediatrices de cada uno de sus lados, es decir, las líneas rectas perpendiculares a los lados que pasan por los puntos medios. Estas rectas se cortan en un punto que se denomina ***circuncentro***, el cual es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo, o sea, la circunferencia circunscrita al triángulo.



Medianas de un triángulo: Son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus lados opuestos. También se llaman medianas a sus respectivas longitudes. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto interior al triángulo llamado ***baricentro*** o ***centro de gravedad*** del triángulo. La distancia desde un vértice al baricentro es el doble de la distancia del baricentro hasta el punto medio del lado opuesto.

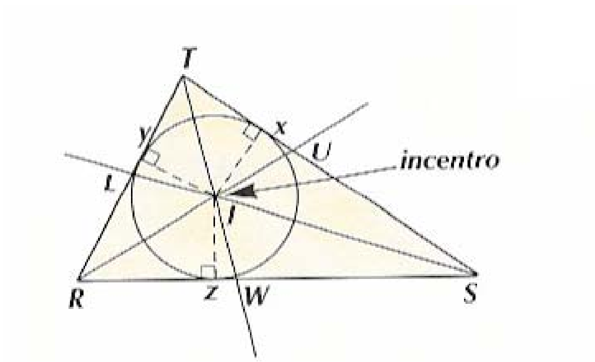


Altura de un triángulo: Es el segmento que tiene un extremo en un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. Las alturas de un triángulo se cortan en un punto que se llama ***ortocentro***



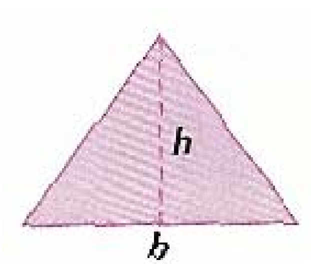
.

Bisectrices de un triángulo: Son las bisectrices de cada uno de sus ángulos interiores.. Estas bisectrices se cortan en un punto que se llama ***incentro*** y es el centro de la circunferencia que es tangente a sus tres lados. Esta circunferencia está ***inscrita*** en el triángulo.

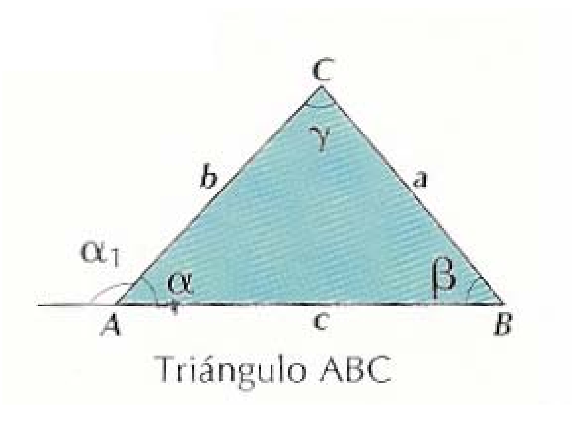


Area y perímetro de un triángulo:

Area de un triángulo: El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura correspondiente, es decir: $A = \frac{b \cdot h}{2}$



Perímetro de un triángulo: Es la sumatoria de las longitudes de cada uno de sus lados, es decir: $P = a + b + c$



Triángulo ABC

PROBLEMAS:

1.- Si la distancia del baricentro de un triángulo al punto medio de un lado es de 6,0 cm. Cuanto mide esa mediana?

2.- Si la distancia del baricentro de un triángulo a uno de sus vértices es 8,0 cm. Cuanto mide esa mediana?.

3.- Si una de las medianas de un triángulo mide 15,0 . Cual es la distancia del vértice al baricentro?

4.- En el ΔABC, se tiene que ***G*** es el baricentro. Si $\overline{AG} = 2,0(cm); \overline{CG} = 1,0(cm)$. Cuanto miden: $\overline{GM}, \overline{GN}, \overline{AN}, \overline{CM}$?

5.- Si dos ángulos interiores de un triángulo miden 30° y 40°., cuanto mide el tercer ángulo?

6.- Si dos ángulos interiores de un triángulo miden 20° y 30°, que clase de triángulo es?

7.- Si dos ángulos interiores de un triángulo miden 35° y 45°, cuanto mide el ángulo exterior correspondiente al tercer ángulo?

8.- Si el ángulo vertical de un triángulo isósceles mide 40°, cuanto miden los otros dos ángulos?

9.- Uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles mide 25°, cuanto mide cada uno de los otros dos ángulos?

10.- Si la suma de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual a 340°, que clase de triángulo es?

11.- Si dos ángulos exteriores de un triángulo miden 120° y 130°, cuanto mide cada uno de los ángulos interiores y cuanto mide el tercer ángulo exterior?

12.- Si dos ángulos interiores de un triángulo miden 35° y 120°, ¿cuánto miden sus ángulos exteriores?

13.- Cuanto mide cada uno de los lados de un triángulo equilátero si su perímetro mide 36,0 metros.

14.- Si el perímetro de un triángulo isósceles es 42,0 metros y uno de sus lados iguales mide 18,0 metros, ¿cuánto mide la base?

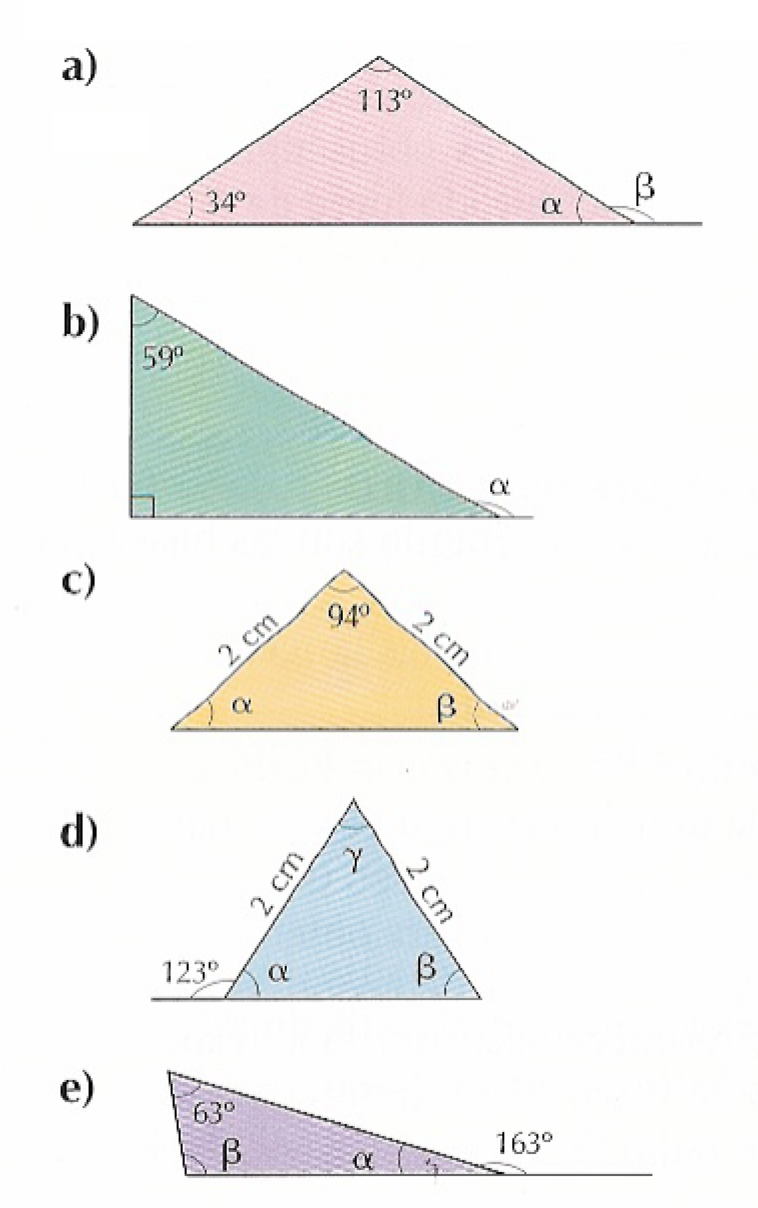
15.- Determinar el valor en grados de cada uno de los ángulos interiores de cada triángulo, si sus medidas son:

$a)\left(2x;4x;6x\right)$

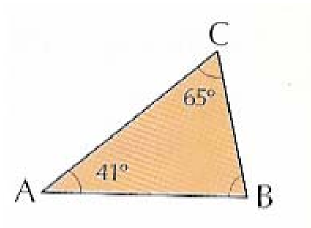
$b)\left(\dfrac{5}{2}x;2x;\dfrac{3}{2}x\right)$

$c)\left(3x-2°;x;2x+8°\right)$

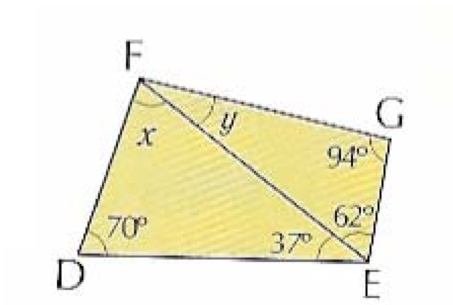
16.- Hallar los valores de los ángulos $\alpha;\beta;\gamma$ en cada uno de los siguientes triángulos:



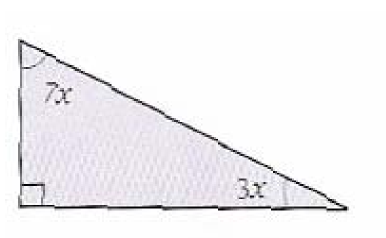
17.- Según los ángulos opuestos a cada lado, cuál es el lado de mayor medida? Y el de menor medida?:



18.- Según la medida de los ángulos, cuál es el segmento de mayor medida? Y cuál el de menor medida?

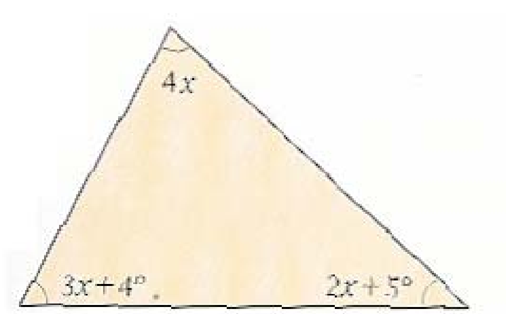


19.- Calcular las medidas de los ángulos interiores del siguiente triángulo:

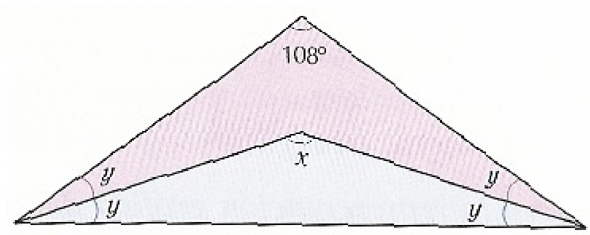


:

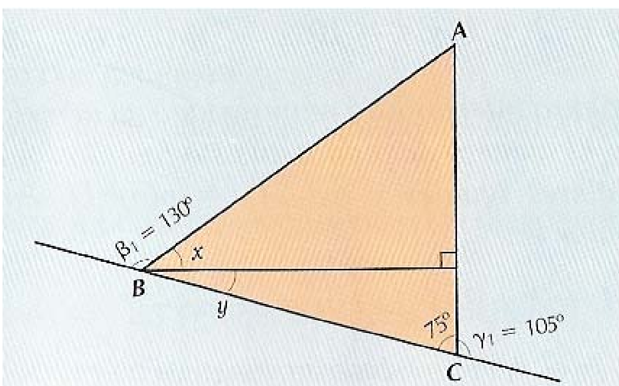
20.- Calcular las medidas, en grados, de los ángulos interiores y exteriores del siguiente triángulo:



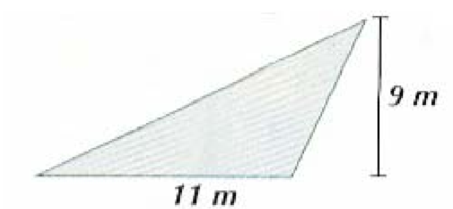
21.- ¿Cuánto vale el ángulo $\boldsymbol{x}$ en la siguiente figura?



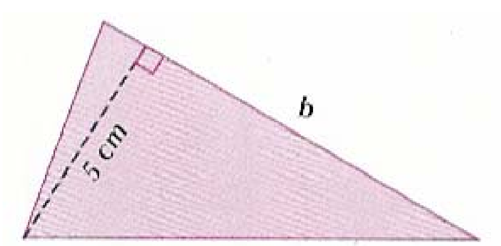
22.- Calcular las medidas de los ángulos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en la figura siguiente:



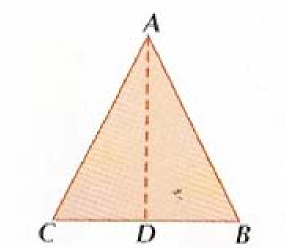
23.- Hallar el área del triángulo de la figura siguiente:



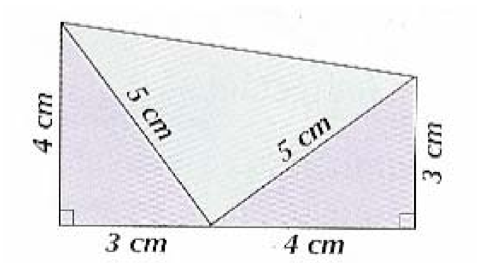
24.- Si el área de la figura siguiente es igual a 55,0 cm^2, calcular el lado ***b.***



25.- El ΔABC es isósceles; si $\overline{AD} = 6,0(cm)$ y $\overline{CD} = 3,0(cm)$, calcular el área.



26.- El trapecio de la figura siguiente se ha construido con dos triángulos rectángulos y un triángulo isósceles que también es rectángulo. Hallar el área del trapecio sumando las áreas de los triángulos que lo componen.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 2A - Angulos en triángulo I

Fecha:______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

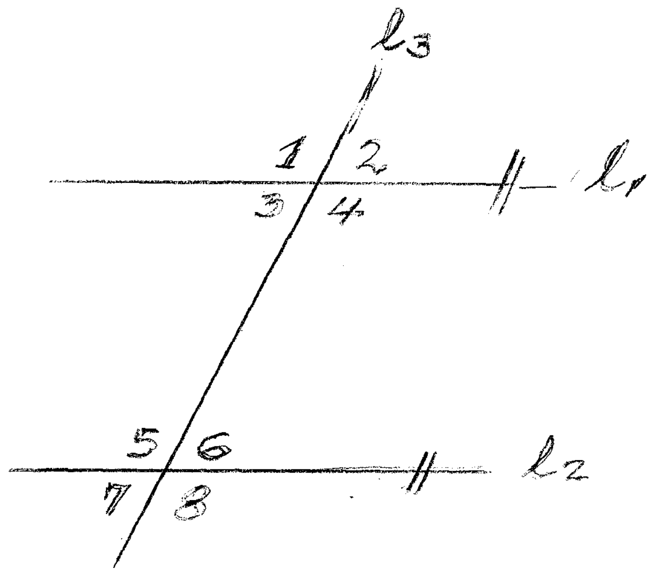
MARCO TEORICO:

1.- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre igual a 180º.

2.- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es siempre igual a 360º.

3.- Todo ángulo interior de un triángulo tiene su correspondiente ángulo exterior y ambos suman 180º. Por lo tanto, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él.

4.- Cuando dos rectas paralelas, $l_1 \parallel l_2$, son cortadas por una recta secante l_3 se forman los siguientes pares de ángulos:



1.- Angulos alterno- internos son iguales:

$$\angle 3 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 5$$

2.- Angulos alterno- externos son iguales:

$$\angle 1 = \angle 8$$
$$\angle 2 = \angle 7$$

3.- Angulos correspondientes son iguales:

$$\angle 1 = \angle 5$$
$$\angle 3 = \angle 7$$
$$\angle 2 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 8$$

4.- Angulos consecutivos internos (*conjugados)*, son suplementarios:

$$\angle 4 + \angle 6 = 180°$$
$$\angle 3 + \angle 5 = 180°$$

5.- Angulos opuestos por el vértice son iguales:

$\angle 1 = \angle 4$

$\angle 2 = \angle 3$

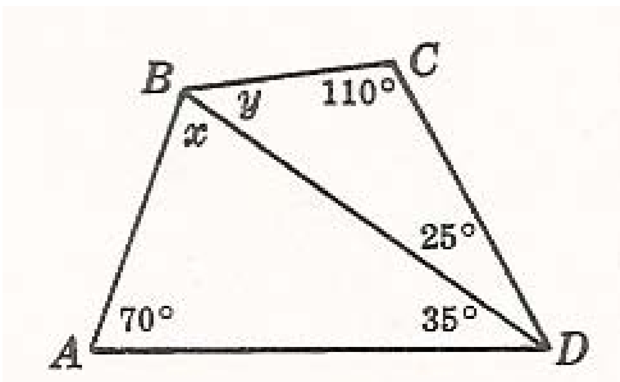
$\angle 5 = \angle 8$

$\angle 6 = \angle 7$

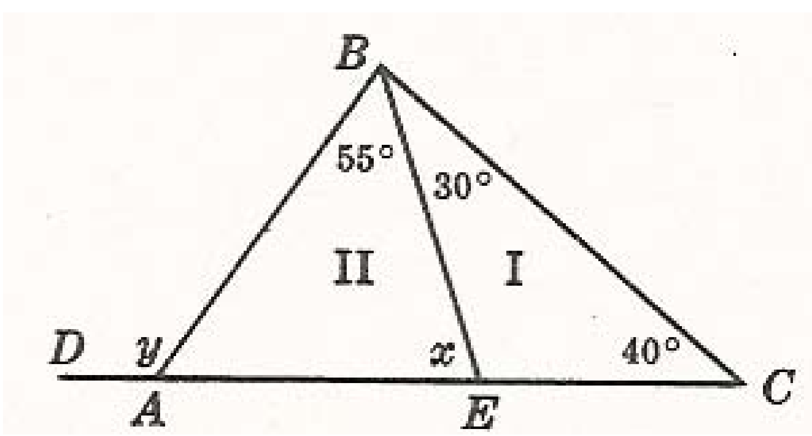
PROBLEMAS:

Encontrar los valores de x e y en cada caso.

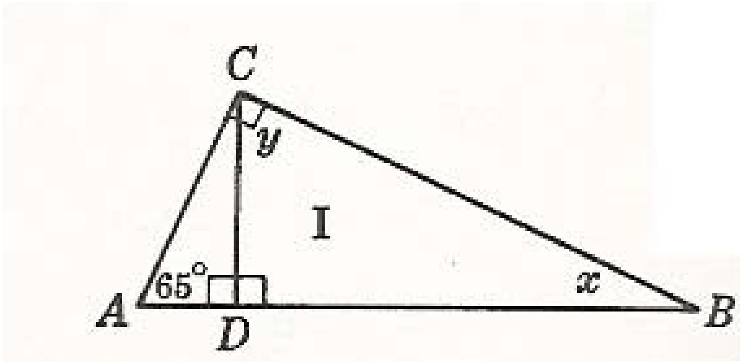
1.-



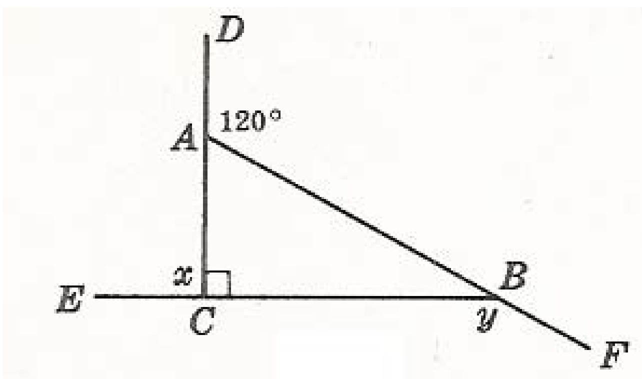
2.-



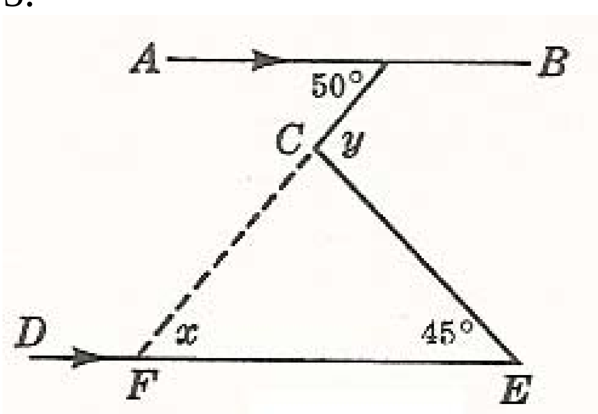
3.-



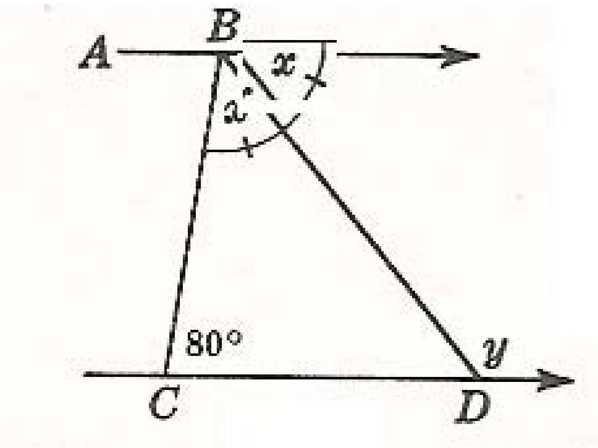
4.-



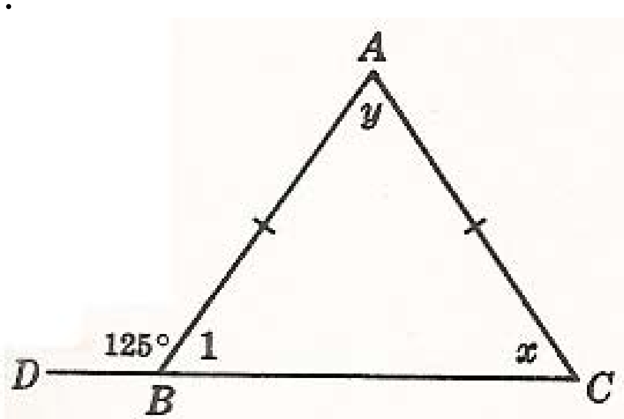
5.-



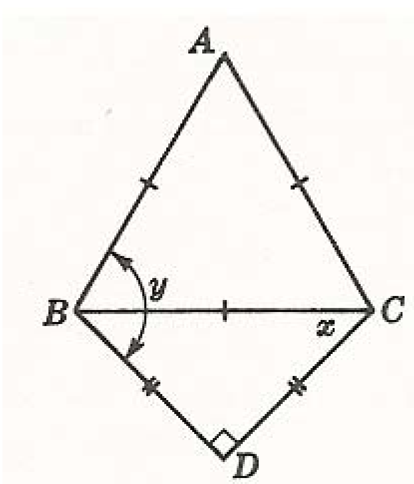
6.-



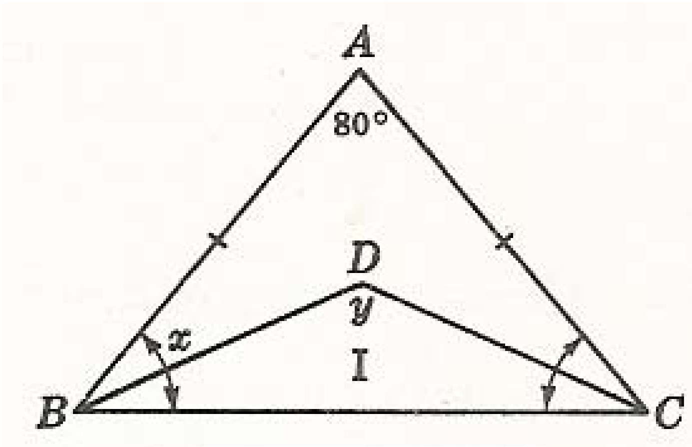
7.-



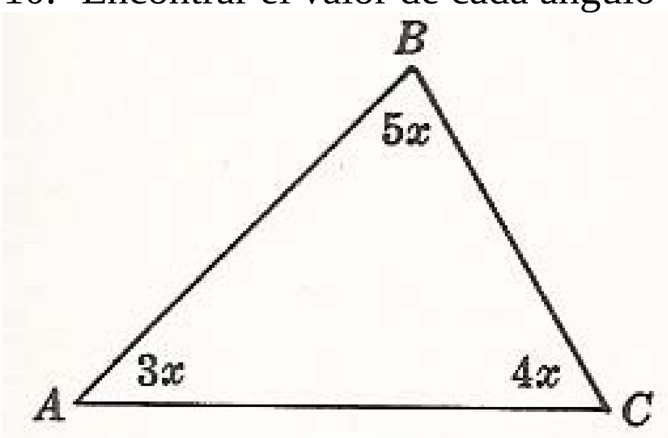
8.-



9.-



10.- Encontrar el valor de cada ángulo en la figura siguiente:



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 2B - Angulos en triángulo II.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

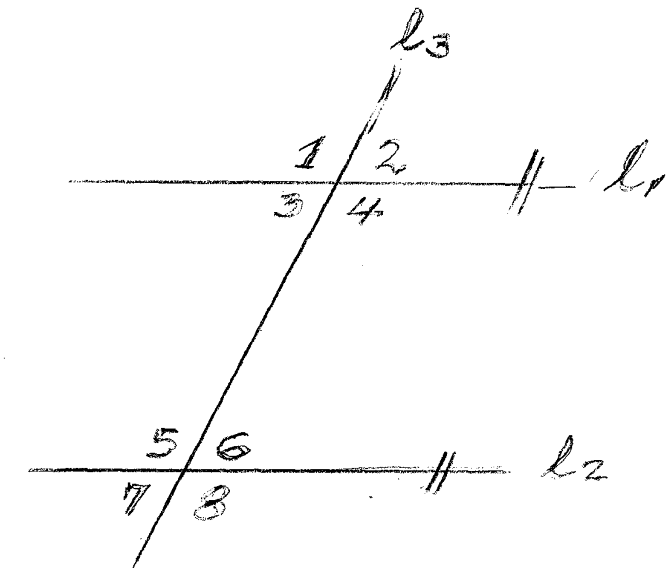
MARCO TEORICO:

1.- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre igual a 180º.

2.- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es siempre igual a 360º.

3.- Todo ángulo interior de un triángulo tiene su correspondiente ángulo exterior y ambos suman 180º. Por lo tanto, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él.

4.- Cuando dos rectas paralelas, $l_1 \parallel l_2$, son cortadas por una recta secante l_3 se forman los siguientes pares de ángulos:



1.- Angulos alterno- internos son iguales:

$$\angle 3 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 5$$

2.- Angulos alterno- externos son iguales:

$$\angle 1 = \angle 8$$
$$\angle 2 = \angle 7$$

3.- Angulos correspondientes son iguales:

$$\angle 1 = \angle 5$$
$$\angle 3 = \angle 7$$
$$\angle 2 = \angle 6$$
$$\angle 4 = \angle 8$$

4.- Angulos consecutivos internos (*conjugados*), son suplementarios:

$$\angle 4 + \angle 6 = 180°$$
$$\angle 3 + \angle 5 = 180°$$

5.- Angulos opuestos por el vértice son iguales:

$\angle 1 = \angle 4$

$\angle 2 = \angle 3$

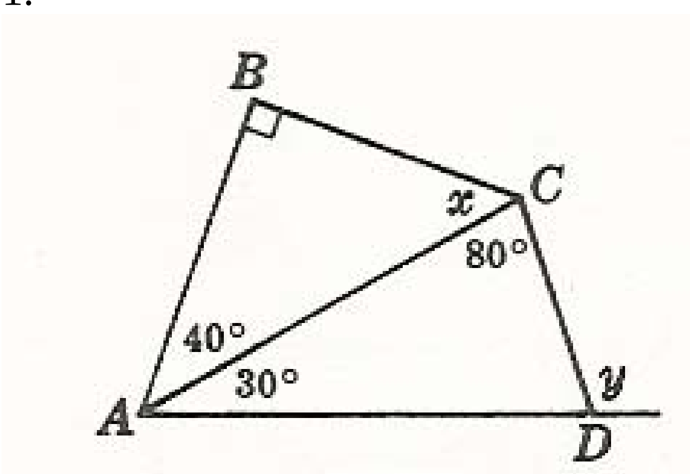
$\angle 5 = \angle 8$

$\angle 6 = \angle 7$

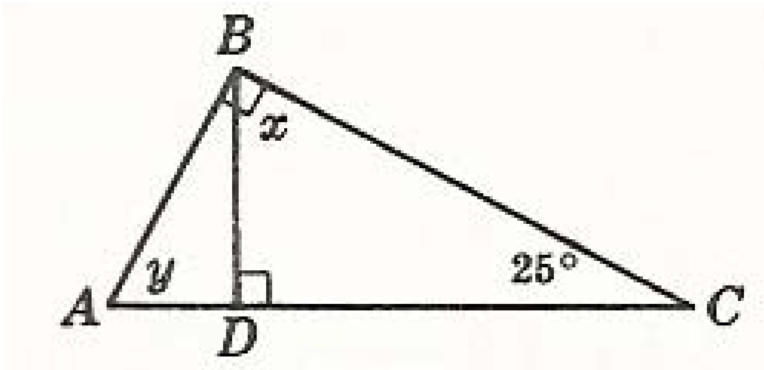
PROBLEMAS:

Encontrar en cada caso los valores de x e y.

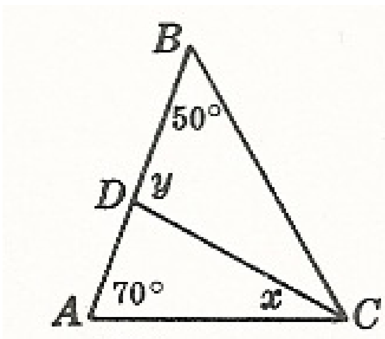
1.-



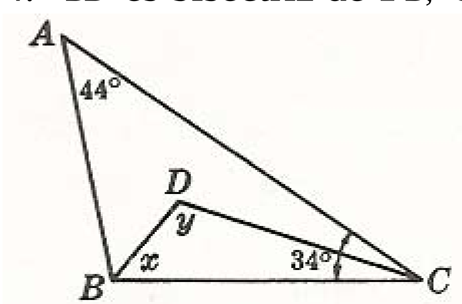
2.-



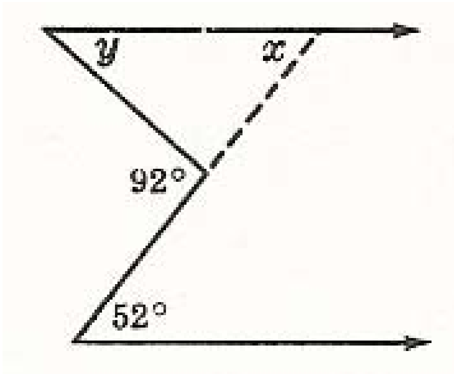
3.- $\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle C$:



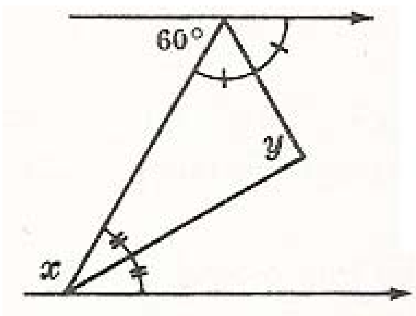
4.- $\overline{BD}$ es bisectriz de $\angle B$; $\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle C$:



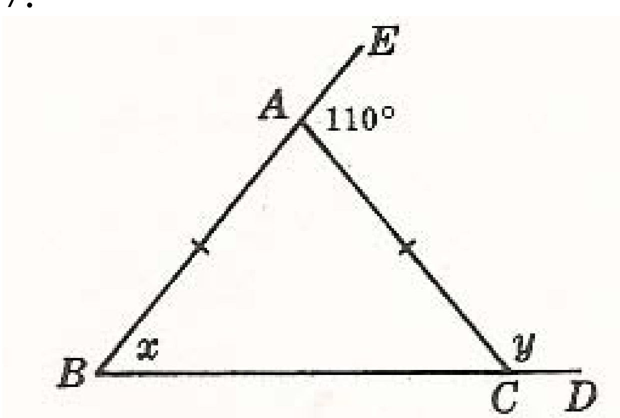
5.-



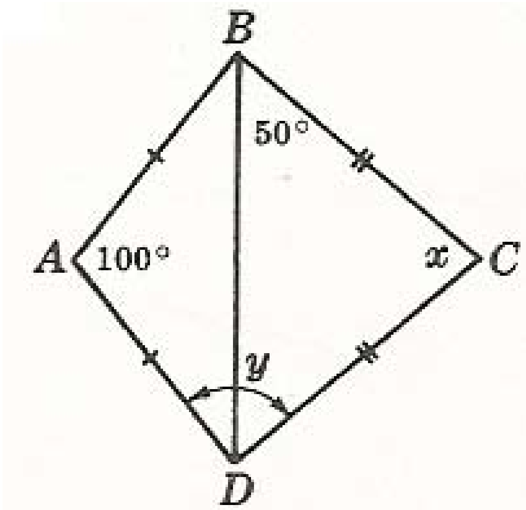
6.-



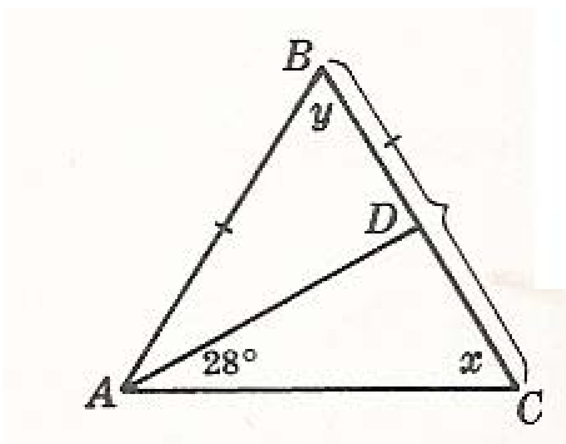
7.-



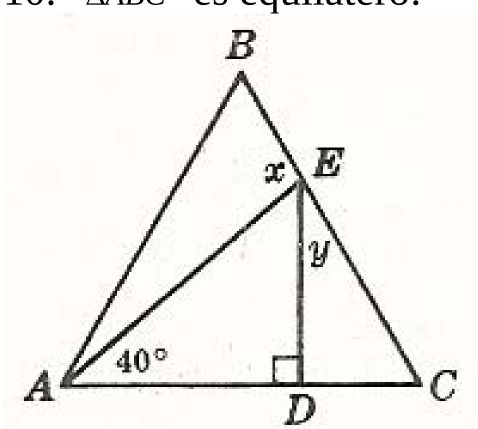
8.-



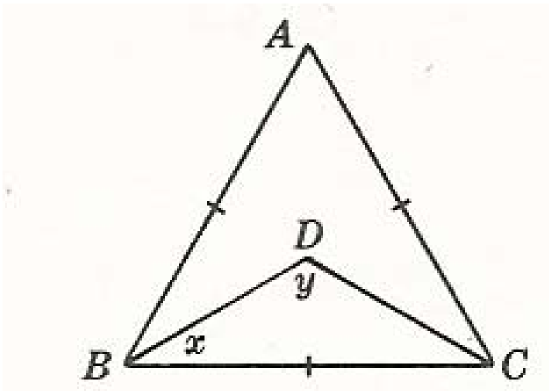
9.- $\overline{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle A$:



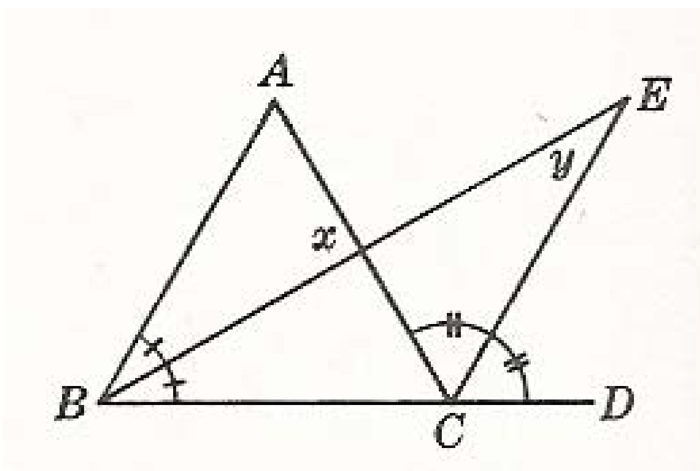
10.- ΔABC es equilátero:



11.- ΔABC es equilátero; $\overline{BD}$ es bisectriz de $\measuredangle B$; $\overline{CD}$ es bisectriz de $\measuredangle C$:



12.- ΔABC es equilátero:



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 3- Explorando el polígono.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

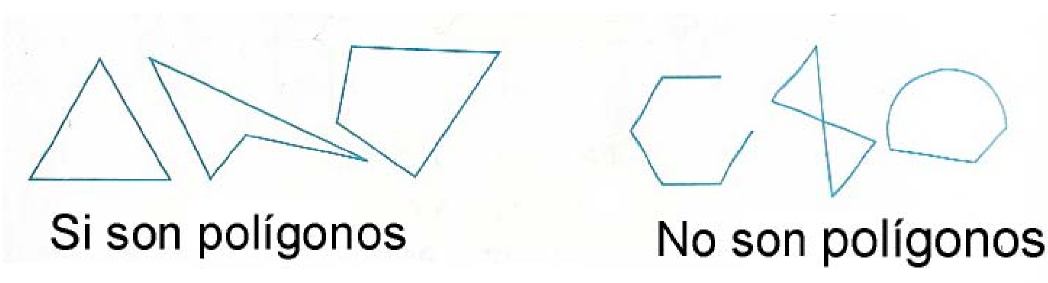
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco teórico:

La palabra ***polígono*** es una palabra griega que significa “ *muchos ángulos*” Las figuras mostradas abajo a la izquierda son polígonos, en cambio las mostradas abajo a la derecha no lo son:

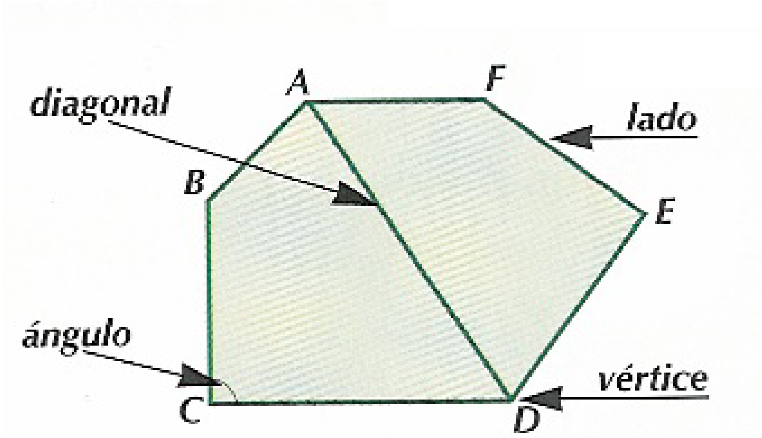


Definición de polígono: Un polígono es una figura geométrica cerrada formada por un número finito de segmentos (*lados*) coplanares de manera tal que cumplen con las siguientes condiciones:

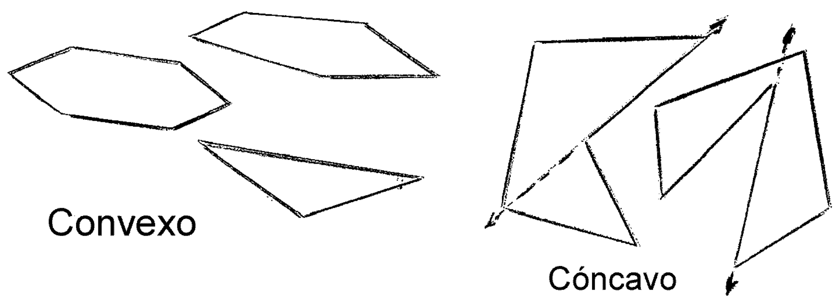
1.- Los lados que tienen un punto extremo común no son colineales.

2.- Cada lado interfecta exactamente otros dos lados; pero, solo en sus puntos extremos.

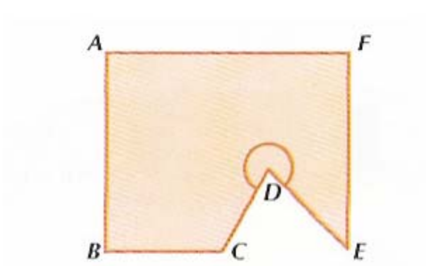
Elementos de un polígono: Ver gráfica siguiente:



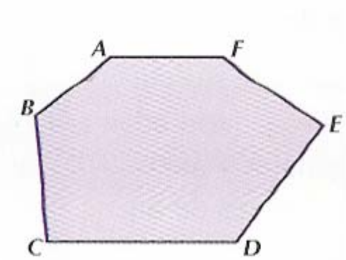
Un polígono ***convexo*** es un polígono tal que ninguna línea conteniendo un lado del polígono contiene a su vez un punto interior al mismo; de lo contrario, se denomina ***cóncavo.***



Nótese que si una línea de cada polígono ***cóncavo*** se prolonga, este lado del polígono contiene un punto interior del mismo; por lo tanto, no satisface la condición de definición de polígono ***convexo*** porque una línea contiene un punto interior del polígono siendo, entonces, ***cóncavo.*** También, se puede decir que un polígono es ***convexo*** si cada uno de sus ángulos interiores es menor que 180°. Por otro lado, un polígono es ***cóncavo*** si uno de sus ángulos interiores es mayor que 180°. Ver gráfica siguiente:



POLÍGONO CÓNCAVO
-(EL ÁNGULO INTERIOR ∢CDE > 180º)



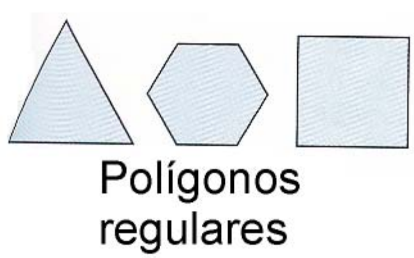
POLÍGONO CONVEXO

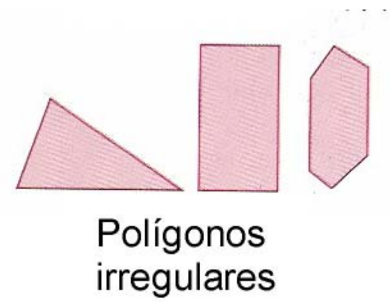
Los polígonos pueden clasificarse por el número de lados que contienen, como se puede ver en. la tabla que sigue a continuación:

Número de lados	***Polígono***
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentedecágono

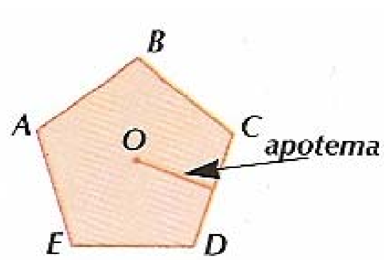
Definición de polígono regular: Es un polígono convexo con todos los lados congruentes y todos los ángulos congruentes. Un polígono es ***equilátero*** si todos los lados son iguales. Un polígono es ***equiangular*** si todos los ángulos son iguales. Entonces, un polígono regular es equilátero y equiangular.

Un polígono es ***irregular*** si tiene al menos uno de sus lados y uno de sus ángulos diferentes a los demás.

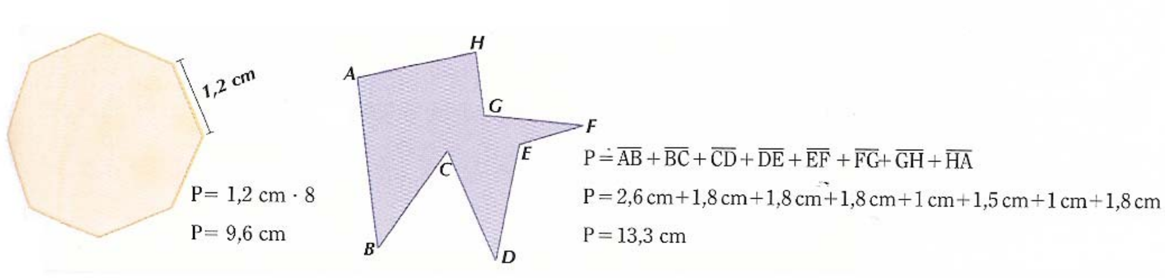




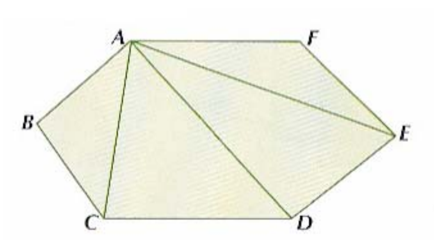
Apotema de un polígono regular: Es el segmento de recta que une el centro del polígono regular con el punto medio de uno de sus lados, formando un ángulo de 90°.



Perímetro de un polígono: El perímetro de un polígono regular es el producto de la longitud de un lado por el número de lados que tenga el polígono, es decir: $P = l \cdot n$,mientras que si el polígono es irregular es la suma de las longitudes de los lados.



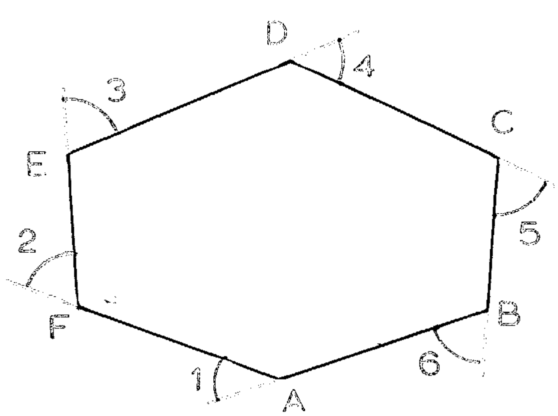
Diagonales de un polígono: Es el segmento determinado por dos vértices no consecutivos. Ver la gráfica siguiente.



En el hexágono ***ABCDEF*** hay tres diagonales que parten del vértice ***A***, De igual manera, pasa con cada vértice del polígono mencionado; o sea, que desde cada vértice parten un número de diagonales tales igual al número de vértices menos 3; sin embargo, se debe observar que la diagonal $\overline{AC}$ es la misma que la diagonal $\overline{CA}$ por lo que podríamos cometer el error de contar cada diagonal dos veces. Entonces, aplicaremos la siguiente ecuación para contar el número de diagonales de un polígono conociendo su número de lados $\boldsymbol{n}$:

Número de diagonales $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

Angulos interiores o internos y exteriores o externos de un polígono: Angulos interiores son aquellos formados por cada dos lados consecutivos. Angulos exteriores son los ángulos adyacentes a cada uno de los ángulos interiores.. Ver gráfica siguiente:



En la gráfica anterior, los ángulos interiores son:

$$\angle ABC; \angle BCD; \angle CDE; \angle DEF; \angle EFA; \angle FAB$$

En la misma gráfica, los ángulos exteriores son:

$$\angle 1; \angle 2; \angle 3; \angle 4; \angle 5; \angle 6$$

Suma de los ángulos interiores de un polígono: convexo de n lados: La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de ***n*** lados corresponde a la ecuación:

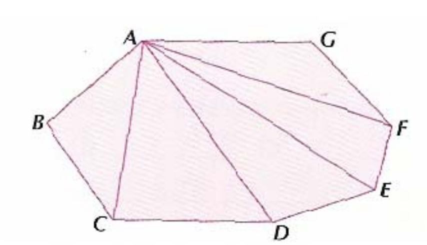
$$S = 180° \cdot (n - 2)$$

Suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados: La suma de los ángulos exteriores de este tipo de polígono es siempre igual a **360°**, independientemente del número de lados que pueda tener el polígono.

Area de un polígono regular: Es la mitad del producto del perímetro ***(P)*** por la apotema ***(a)*** correspondiente, o sea:

$$A = \frac{1}{2}(P \cdot a)$$

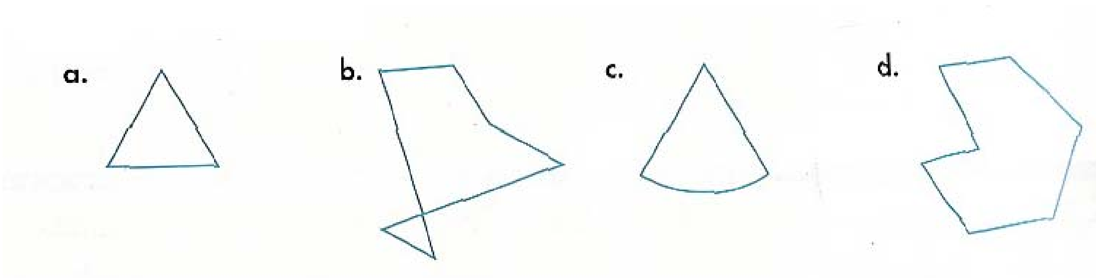
Triangulación de un polígono: Un polígono se puede triangular mediante el trazado de sus diagonales desde un vértice.



El número de triángulos que se pueden obtener al trazar las diagonales desde un vértice de un polígono de ***n*** lados es igual a $\#\Delta = (n - 2)$.

PROBLEMAS:

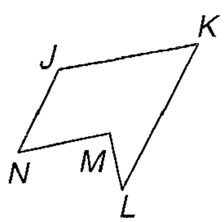
1.- Determine si cada una de las figuras mostradas abajo es un polígono y si no lo es, explique porque.



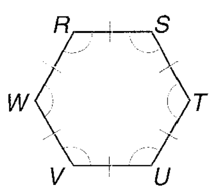
2.- Clasifique cada polígono por:

- Por el número de lados.
- Es convexo o cóncavo?
- Es regular o irregular?

(a)



(b)



3.- En el polígono ***ABCDEF***, calcular el perímetro si se dan los siguientes datos:

$$\overline{AB} = 6,0(cm); \overline{BC} = 7,0(cm); \overline{CD} = 10,0(cm);$$
$$\overline{DE} = 7,0(cm); \overline{EF} = 4,0(cm); \overline{AF} = 6,0(cm)$$

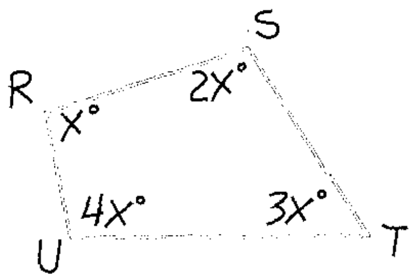
4.- Si el perímetro del polígono GHIJKL es 154,0 mm y además se conocen los siguientes datos: $\overline{GH} = 20,0(mm); \overline{FH} = 12,0(mm); \overline{IJ} = 18,0(mm);$ $\overline{JK} = 12,0(mm); \overline{KL} = 10,0(mm)$

Cuanto mide el lado $\overline{LG}$?.

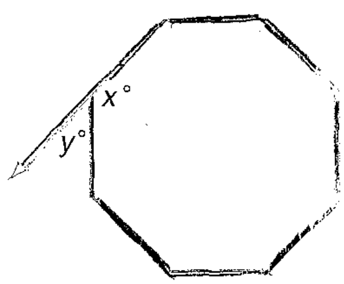
5.- Cuál es el perímetro de un octágono regular si uno de sus lados mide 5,0 cm.?

6.- Encontrar la medida de un ángulo interior cualquiera y de su correspondiente ángulo exterior, en un pentágono regular.

7.- Encontrar la medida de cada uno de sus ángulos interiores y de sus correspondientes ángulos exteriores en el cuadrilátero ***RSTU*** mostrado en la gráfica siguiente:



8.- Utilizando la suma de los ángulos exteriores, encuentre la medida de cada ángulo interior y de cada ángulo exterior del octágono regular mostrado en la gráfica siguiente:



9.- Encontrar la suma de las medidas de los ángulos interiores y de sus correspondientes exteriores, en cada polígono regular, dados sus números de lados:

(a) 11.
(b) 26
(c) 90
(d) 46

10.- Si la medida de un ángulo exterior de un polígono regular es dada, encontrar el número de lados del polígono en cada caso:

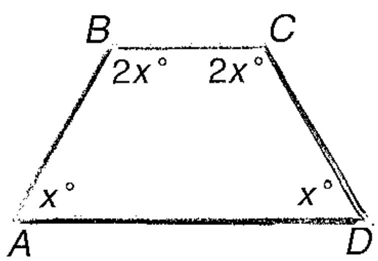
(a) 72°.
(b) 45°
© 18°
(e) 20°.

11.- Si la medida de un ángulo interior de un polígono regular es dada, encontrar el número de lados del polígono en cada caso.

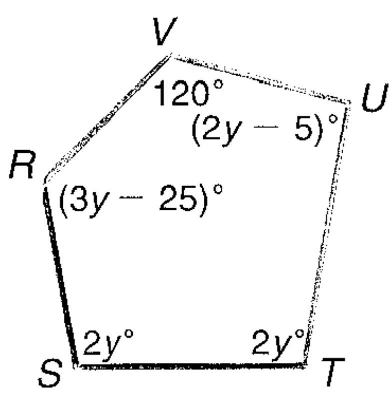
(a) 135°
(b) 144°
(c) 176,4°
(d) 157,5°

12.-

(a)



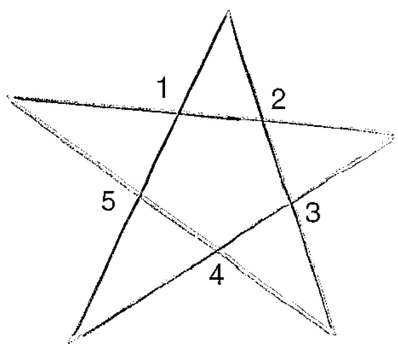
(b)



13.- Si un ángulo exterior de un polígono regular mide 36°, encontrar la suma de las medidas de los ángulos interiores de ese polígono.

14.- Dada la gráfica de abajo, en forma de estrella, encontrar lo siguiente:

(a) La suma de las medidas de los ángulos numerados en el exterior de la estrella.
(b) La suma de los ángulos en cada punta de la estrella.



15.- Dado un polígono convexo de 20 lados, encontrar el número de diagonales, no repetidas, dentro del polígono mencionado.

16.- Cuál es el polígono convexo en el que se pueden trazar seis (6) diagonales desde un vértice?

17.- Encontrar el área de un octágono regular que tiene un perímetro de 72,0 centímetros y una apotema de 10,9 centímetros.

18.- Encontrar el área de cada polígono descrito como sigue:

(a) Un cuadrado con una apotema de 12,0 centímetros de longitud.
(b) Un cuadrado con un perímetro de $84\sqrt{2}$ centímetros.

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 4 - Segmentos proporcionales.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Propiedades de las proporciones: En cada proporción la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente.

Esto quiere decir que si $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ también se cumple que $\frac{a \pm a'}{b \pm b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$

En toda proporción la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente o consecuente como la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente o consecuente. Es decir, si

$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$:

$$\frac{a \pm b}{a}=\frac{a' \pm b'}{a'}$$

También $\frac{a \pm b}{b}=\frac{a' \pm b'}{b'}$

En una proporción el, producto de los medios es igual al producto de los extremos:

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ también es $ad=bc$

Cuarta proporcional: Se llama cuarta proporcional de tres valores ***a, b*** y ***c*** a un valor ***x***, que cumple la condición:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

Tercera proporcional: Se llama tercera proporcional a dos cantidades ***a*** y ***b*** a una valor ***x*** tal que cumple la condición:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$$

Media proporcional: Se llama media proporcional a dos cantidades ***a*** y ***b***, a un valor ***x*** tal que cumpla con la condición:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

Serie de razones iguales Dada una serie de razones iguales como sigue:

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=..............$ se cumple que la suma de todos los antecedentes es a la suma de todos los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su correspondiente consecuente:

$$\frac{a+b+c+d+......}{a'+b'+c'+d'+.....}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=.........$$

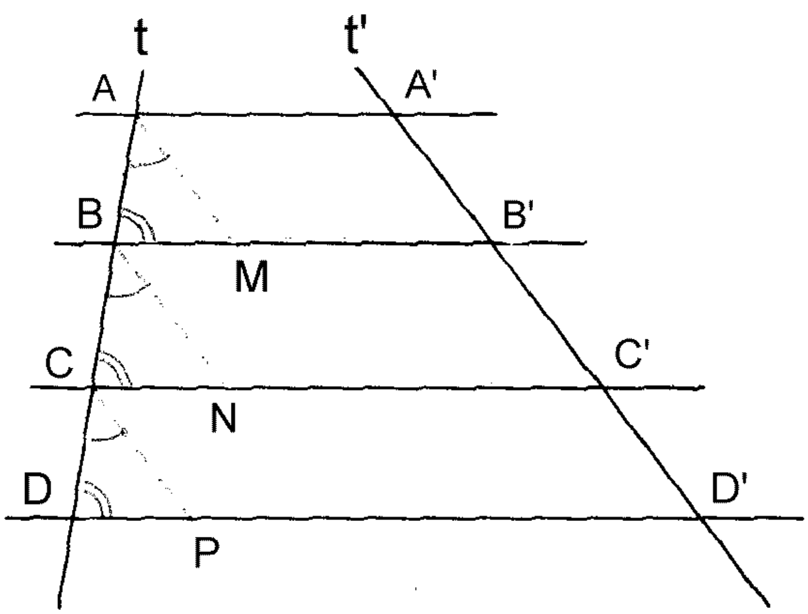
Razón de dos segmentos: Es el cociente de sus medidas con la misma unidad, Por ejemplo, sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ mostrados en la figura de abajo, y sea ***u*** la unidad de medida. Si $\overline{AB}=5(u)$, el número 5 es la medida de $\overline{AB}$ con la unidad ***u***.

Si $\overline{CD} = 7(u)$, el número 7 es la medida de $\overline{CD}$ con la unidad $\boldsymbol{u}$.

La razón de $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ es $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{5}{7}$ y la razón de $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$ es $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{7}{5}$. ***La razón de dos segmentos es independiente de la unidad que se adopte para medirlos, con tal que se use la misma unidad para ambos.***

Segmentos proporcionales: Si a los segmentos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, corresponden los segmentos ***a'*** y ***b'***, de manera tal que: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ se dice que son proporcionales.

Teorema: Si varias rectas paralelas determinan segmentos iguales en una de dos transversales, determinarán también segmentos iguales en la otra transversal.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$, ***t*** y ***t'*** son transversales, y $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

Tesis: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

Construcción auxiliar: Tracemos $\overleftrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CP}$ paralelas a ***t'*** Se forman los triángulos $\Delta ABM, \Delta BCN$ y ΔCDP, que son iguales por tener $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ por hipótesis y los ángulos marcados del mismo modo por correspondientes.

Demostración: En los $\Delta ABM, \Delta BCN$ y ΔCDP se cumple que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP}$, (1), por ser lados homólogos de triángulos iguales. También se cumple que, por ser lados opuestos de un paralelogramo, resulta que:

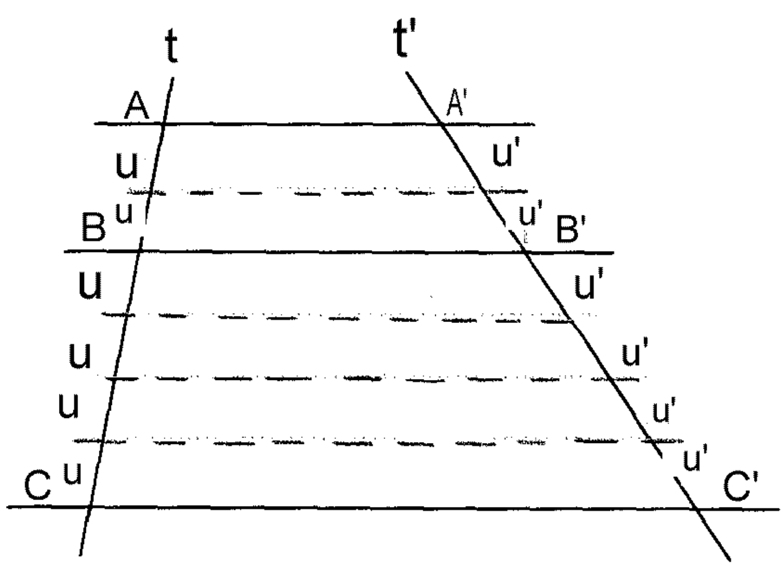
$\overline{AM} = \overline{A'B'}$ (2)

$\overline{BN} = \overline{B'C'}$ (3)

$\overline{CP} = \overline{C'D'}$ (4)

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), tenemos: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

Teorema de Tales: Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$; ***t*** y ***t'*** son transversales; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos correspondientes de ***t*** y $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son segmentos correspondientes de ***t'***.

Tesis: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

Construcción auxiliar: Llevemos una unidad cualquiera **"*u*"** sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Supongamos que $\overline{AB}$ la contiene m veces y $\overline{BC}$ la contiene n veces; entonces,

$$\overline{AB} = mu$$
$$\overline{BC} = nu$$

Trazando paralelas por los puntos de unión de las unidades "*u*", los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ quedan divididas en los segmentos *u'* (iguales al teorema anterior) de manera que:

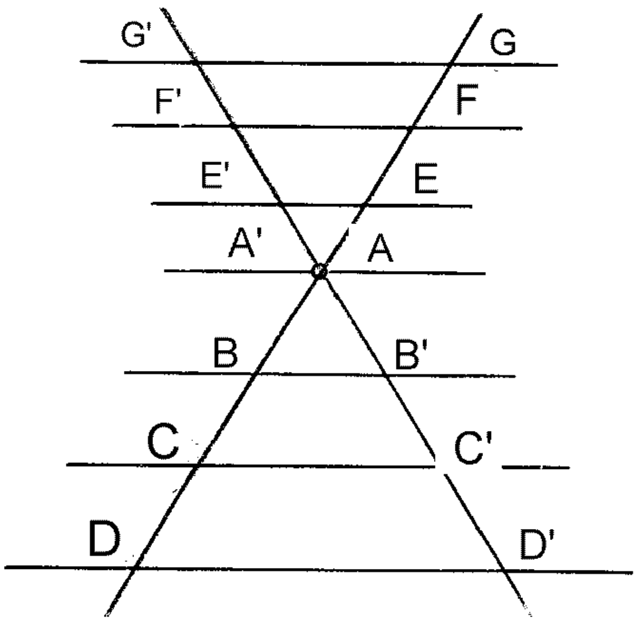
$$\overline{A'B'} = mu'$$
$$\overline{B'C'} = nu'$$

Demostración: Como $\overline{AB} = mu$ y $\overline{BC} = nu$, podemos obtener la razón de los dos segmentos, como: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$. Entonces, podemos concluir que la razón de dos segmentos es el cociente de sus medidas con las mismas unidades.

Análogamente, se puede decir que: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$, comparando, se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

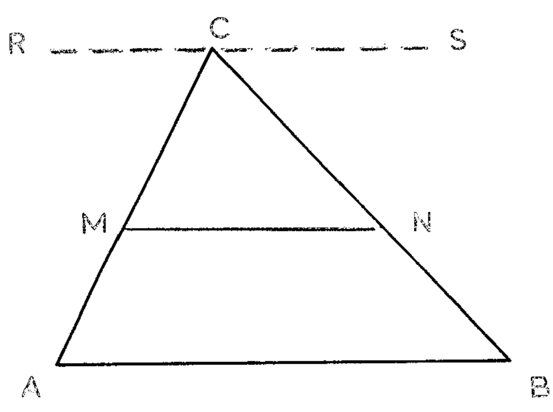
Observaciones a raíz del teorema anterior: El teorema que se acaba de demostrar, es absolutamente general, se verifica para cualquier número de paralelas y para cualquier posición de las transversales. Ver la figura siguiente:



Entonces, si $\overleftrightarrow{GG'} \parallel \overleftrightarrow{FF'} \parallel \overleftrightarrow{EE'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$ se cumple que:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{G'F'}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Teorema: Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.



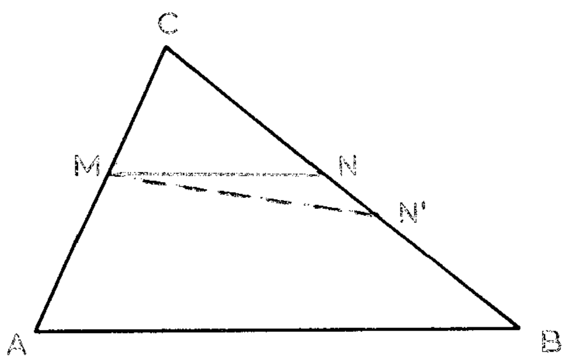
Hipótesis: En el ΔABC se encuentra que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Tesis: $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Construcción auxiliar: Por ***C*** tracemos $\overleftrightarrow{RS}\parallel\overleftrightarrow{MN}\parallel\overleftrightarrow{AB}$ y como $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son transversales, tenemos:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$$ como aplicación del teorema de *Tales.*

Recíproco del teorema anterior: Si una recta al cortar a dos lados de un triángulo los divide en segmentos proporcionales, dicha recta es paralela al tercer lado.



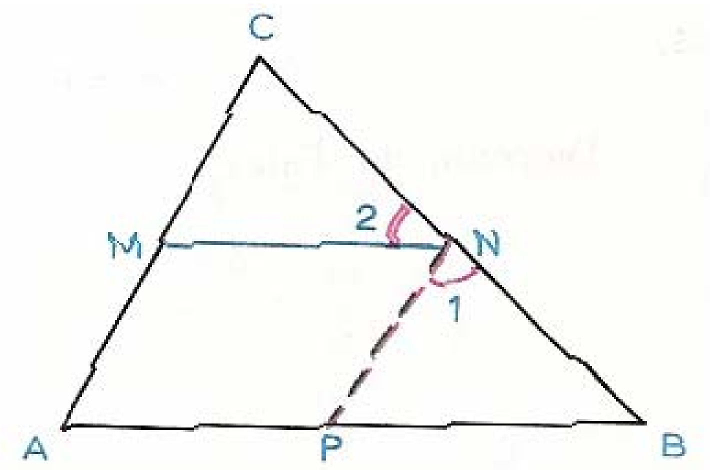
Hipótesis: En el ΔABC mostrado en la figura siguiente se cumple que $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Tesis: $\overleftrightarrow{MN}\parallel\overleftrightarrow{AB}$

Demostración: Si no fuera $\overleftrightarrow{MN}\parallel\overleftrightarrow{AB}$ por ***M*** podríamos trazar $\overleftrightarrow{MN'}\parallel\overleftrightarrow{AB}$ y entonces tendríamos:

$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$ (1) Por la propiedad de la paralela a un lado de un triángulo; pero, también, por hipótesis se tiene que: $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ (2). Comparando ahora (1) y (2), y aplicando el carácter transitorio, tenemos: $\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$. Esto es un absurdo, ya que los puntos ***N*** y ***N'*** no pueden dividir a $\overline{CB}$ en la misma razón. Entonces ***N*** y ***N'*** coinciden, son el mismo punto, entonces, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Corolario: El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.



Hipótesis: En el ΔABC de la figura de arriba, ***M*** y ***N*** son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}; \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

Construcción auxiliar: Por N trazamos $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, formándose el ΔBNP.

Demostración: Por hipótesis sabemos que M y N son puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, o sea:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \therefore \overline{CM} = \overline{MA} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = 1 \therefore \overline{CN} = \overline{NB} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), tenemos, por el carácter transitivo de las igualdades:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ Y ya hemos visto anteriormente que cuando una recta corta dos lados de un triángulo y los divide en segmentos proporcionales, la recta es paralela al tercer lado.

Luego, en los ΔCMN y ΔNPB se tiene que:

$\angle C = \angle 1 (correspondientes)$
$\angle B = \angle 2 (correspondientes)$

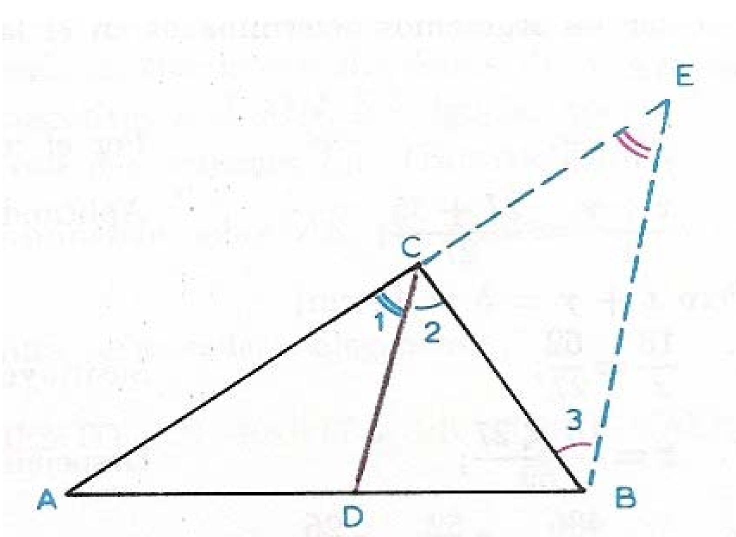
Y por ser ***N*** punto medio sabemos que $\overline{CN} = \overline{NB}$. Entonces al tener un lado igual y sus ángulos adyacentes también iguales, los dos triángulos deberán ser necesariamente iguales, como sigue: $\Delta CMN = \Delta NPB$; por tanto, $\overline{MN} = \overline{PB}$, por ser lados homólogos, correspondientes, de triángulos iguales. Por otra parte, $\overline{MN} = \overline{AP}$, por ser lados opuestos de un paralelogramo y ya sabemos de arriba que $\overline{MN} = \overline{PB}$.

Sumando estas dos últimas igualdades, tenemos que:

$2 \cdot \overline{MN} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$, por lo que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Ejemplo #1: Demostrar que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Solución: Sea $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$, del ΔABC. Por ***B*** tracemos $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y prolonguemos el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a $\overline{BE}$ en ***E***, formándose el ΔBCE.



En el ΔABE, por ser $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$, tenemos que se cumple que:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (1) y, además, los ángulos correspondientes de ese par de paralelas cortadas por una transversal, $\overleftrightarrow{AE}$, dan como resultado que $\angle E = \angle 1$. También, como resultado de la bisectriz $\overline{CD}$, se tiene que: $\angle 1 = \angle 2$.

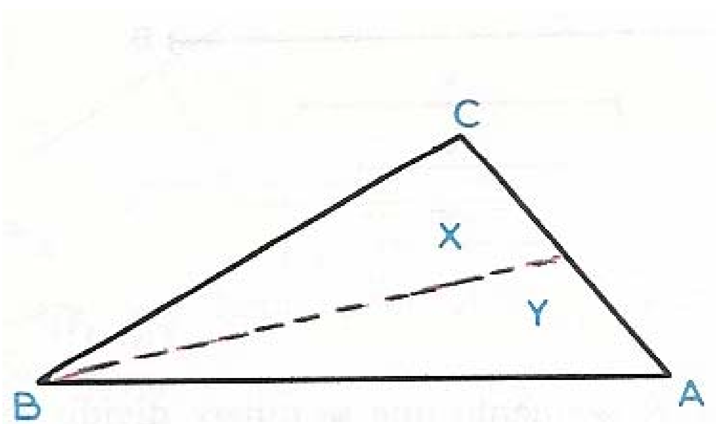
Comparando las dos últimas igualdades de ángulos, resulta que:

$\angle E = \angle 2$ y por ser alterno-internos entre paralelas $\angle 2 = \angle 3$, entonces, por la propiedad de transitoriedad, se puede concluir que: $\angle E = \angle 3$, lo que nos hace concluir que el ΔBCE es isósceles y por tanto $\overline{CB} = \overline{CE}$

Sustituyendo el último valor encontrado en (1), resulta:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ como se quería demostrar.

Ejemplo #2: Dados los tres lados de un triángulo, calcular los segmentos determinados en uno de sus lados por la bisectriz del lado opuesto. Sea el ΔABC cuyos lados miden: $a = 27(cm); b = 18(cm); c = 35(cm)$. Calcular los segmentos determinados en el lado ***b*** por la bisectriz del ángulo opuesto.



Solución:

Por el teorema anterior podemos escribir:

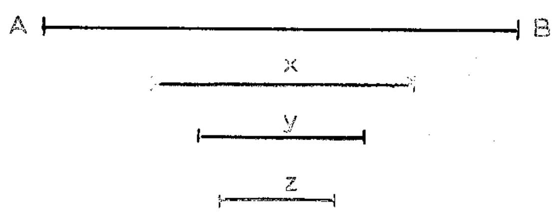
$$\frac{x}{y}=\frac{27}{35} \quad \therefore$$

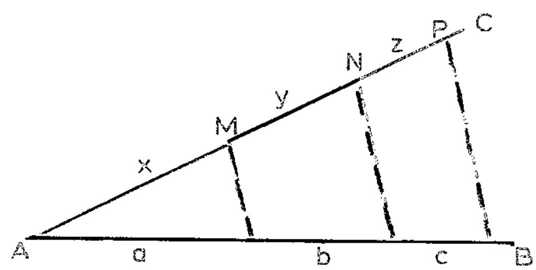
$$\frac{x+y}{y}=\frac{27+35}{35} \therefore \frac{18}{y}=\frac{62}{35}$$

$$y=\frac{18\cdot 35}{62}=\frac{630}{62}=10{,}161(cm)$$

Entonces $x=18-10{,}161=7{,}839(cm)$

Ejemplo #3: Dividir un segmento dado en partes proporcionales a otros segmentos, utilizando un método gráfico.





Solución: Sea $\overline{AB}$ el segmento que se quiere dividir en partes proporcionales a los segmentos ***x***, ***y*** y ***z***. A partir de un extremo del segmento $\overline{AB}$, por ejemplo ***A,*** se traza la semirrecta $\overline{AC}$ que forma un ángulo con $\overline{AB}$. Sobre $\overline{AC}$ y a partir de ***A***, se llevan los segmentos consecutivos $\overline{AM}, \overline{MN}, \overline{NP}$, iguales a ***x, y, z***. Unimos el extremo ***P*** de ***z*** con ***B*** y tenemos $\overline{PB}$. Trazando paralelas a $\overleftrightarrow{PB}$ por los puntos ***M*** y ***N*** determinamos, sobre $\overline{AB}$, los segmentos ***a, b, c*** que son los segmentos buscados. Si tratara de de más segmentos se procede análogamente.

PROBLEMAS:

1.- Hallar los dos segmentos sabiendo que su suma es (S) y su razón (r).:

(a) $S=6; r=\frac{1}{2}$

(b) $S = 36; r = \frac{1}{3}$

2.- Hallar los dos segmentos sabiendo su diferencia (**D**) y su razón (**r**) .

(a) $D = 12; r = \frac{5}{2}$

(b) $D = 7; r = 2$

3.- Hallar la cuarta proporcional a los números ***a, b*** y ***c:***

(a) $a = 2; b = 4; c = 8$

(b) $a = 6; b = 12; c = 3$

4.- Hallar la tercera proporcional a los números ***a*** y ***b***:

(a) $a = 4; b = 16$

(b) $a = 5; b = 8$

5.- Calcular los lados de un triángulo conociendo su perímetro ***(P)*** y que los lados son proporcionales a los números dados:

(a) $P = 8; lados - proporcionales - a : 4, 6, 8$

(b) $P = 90; lados - proporcionales - a : 1, 3, 5$

6.- En cada uno de los triángulos siguientes de lados ***a, b*** y ***c***, calcular segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado menor:

(a) $a = 6; b = 10; c = 14$

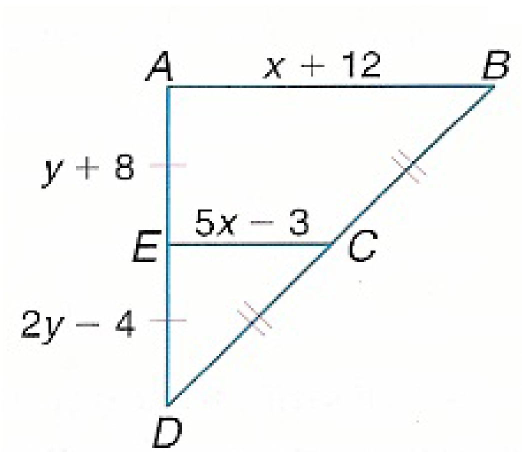
(b) $a = 8; b = 16; c = 18$

7.- Los lados de un triángulo miden $a = 24; b = 10; c = 18$. Calcular los segmentos determinados por cada bisectriz sobre el lado opuesto:

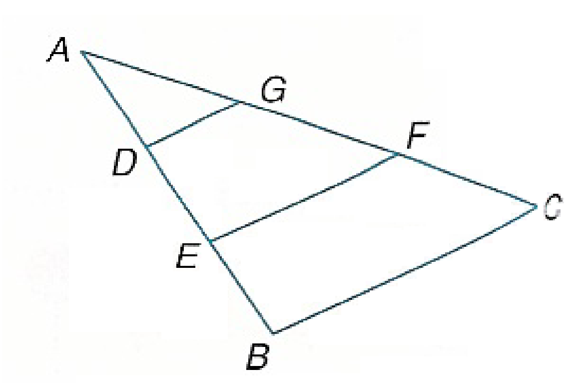
8.- Dividir gráficamente, en partes proporcionales a *2, 3* y *5:*

(a) Un segmento de ***10,0 (cm).***
(b) Un segmento de ***7,5 (cm***).

9.- Encontrar los valores de ***x*** e ***y.***



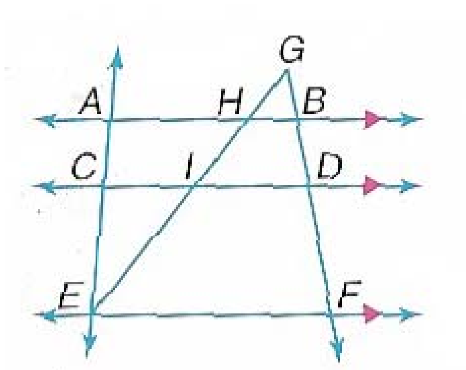
10.- En la figura siguiente, determinar si cada conclusión es válida y si es así, dar una razón:



(a) Si $\overline{DG} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ y además $\overline{DE} = \overline{EB}$, entonces: $\overline{AG} = \overline{FC}$.

(b) Si $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ entonces: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GF}}$

11.- En la figura siguiente $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ completar cada igualdad:



(a) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{CE}}{?}$

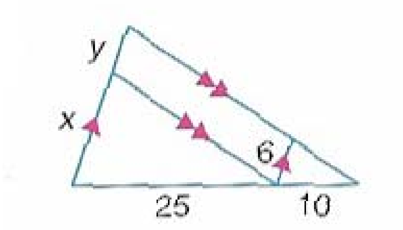
(b) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{GE}} = \dfrac{?}{\overline{GF}}$

© $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{IE}} = \dfrac{?}{\overline{HI}}$

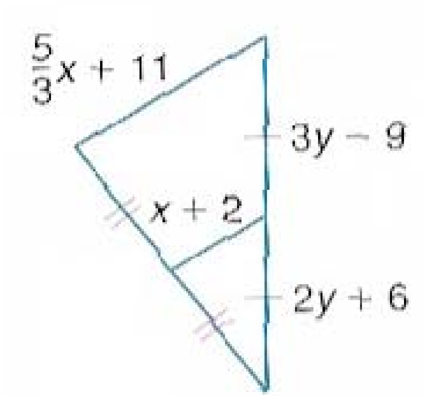
(d) $\dfrac{\overline{CE}}{?} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{HI}}$

12.- Encontrar en cada caso los valores de x e y:

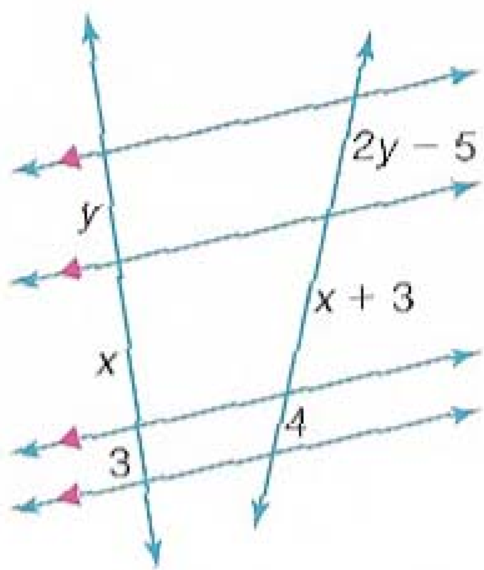
(a)



(b)

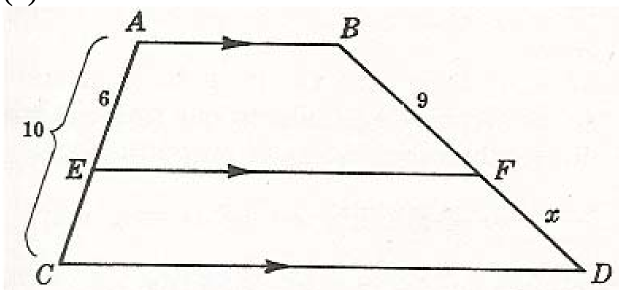


(c)

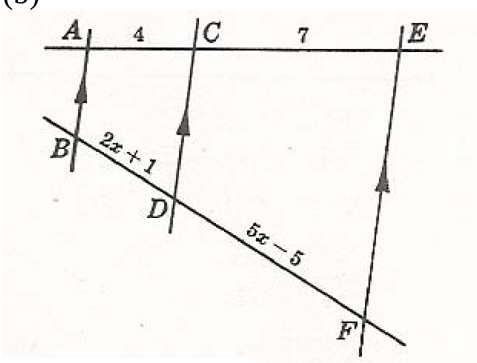


13.- Encontrar el valor de ***x*** en cada figura:

(a)

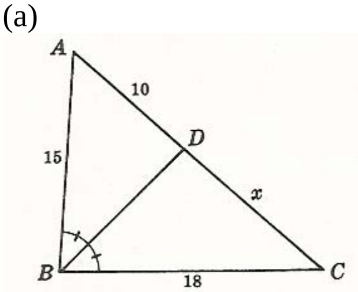


(b)

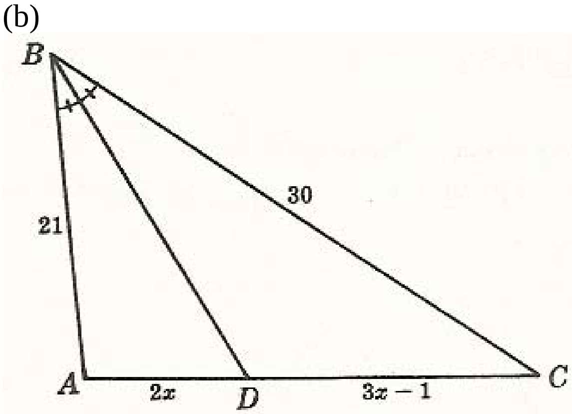


14.- Encontrar el valor de x en cada figura:

(a)



(b)



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 5 – Polígonos semejantes.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

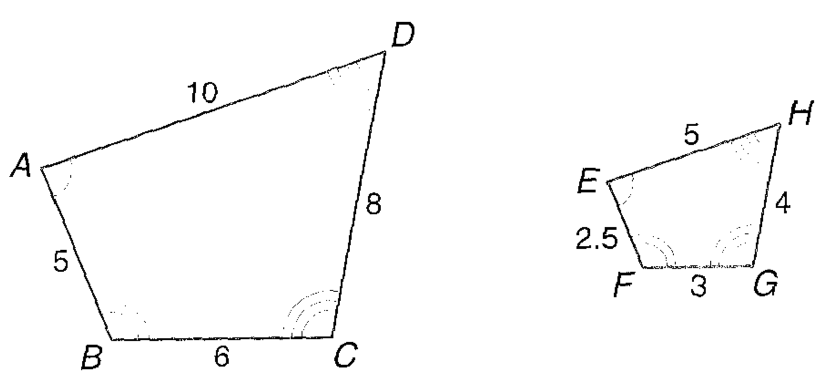
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Dos polígonos son semejantes si se cumple que sus ángulos correspondientes son congruentes (*iguales*) y las dimensiones de sus lados correspondientes son proporcionales. Para mostrar que dos polígonos son semejantes se utiliza el símbolo



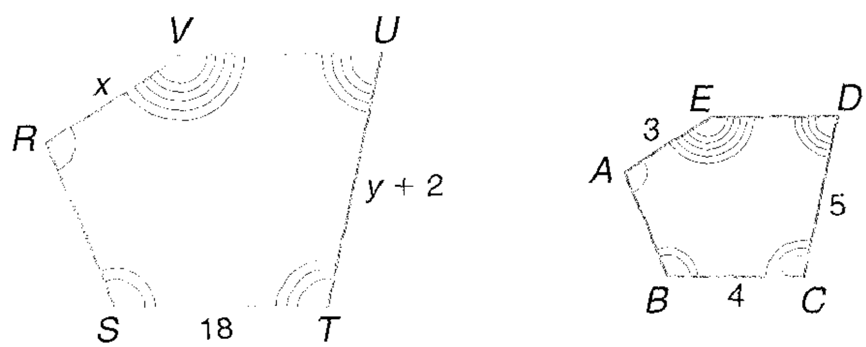
Por ejemplo, en el caso de las dos figuras geométricas, cuadriláteros, mostradas arriba, éstas son semejantes porque se cumple que:

$$<A = <E; <B = <F; <C = <G; <D = <H$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{2}{1}$$

El cociente de las longitudes de los lados correspondientes de dos polígonos semejantes se designa como ***razón de proporcionalidad***. También se cumple que este mismo cociente es igual al cociente entre las respectivas apotemas e igual también al cociente entre los respectivos radios de los círculos inscritos y circunscritos.

Ejemplo:



Dado que los polígonos $RSTUV \sim ABCDE$, encontrar la razón de proporcionalidad y los valores de ***x*** e ***y.***

Solución:

$$Razón = \frac{ST}{BC} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Luego, para encontrar el valor de ***x***:

$$\frac{ST}{BC} = \frac{VE}{EA}$$

$$\frac{18}{4} = \frac{x}{3}$$

$$54 = 4x$$

$$x = 13,5$$

Para encontrar el valor de ***y***:

$$\frac{ST}{BC}=\frac{UT}{DC}$$

$$\frac{18}{4}=\frac{y+2}{5}$$

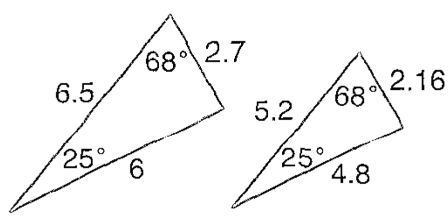
$$90=4y+8$$

$$4y=82$$

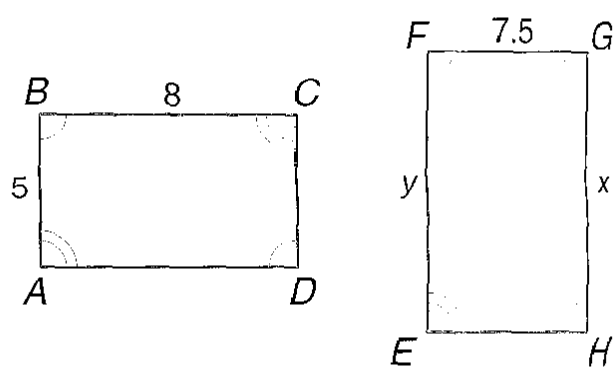
$$y=20,5$$

PREGUNTAS:

1.- Demostrar si los dos triángulos mostrados son semejantes:

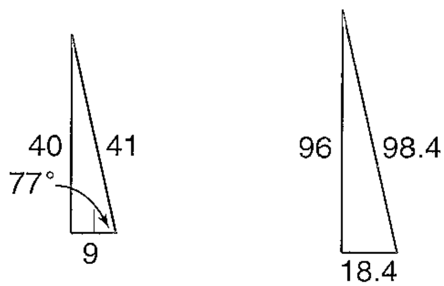


2.- Dado que los polígonos mostrados abajo son semejantes, encontrar los valores de ***x*** e ***y***:

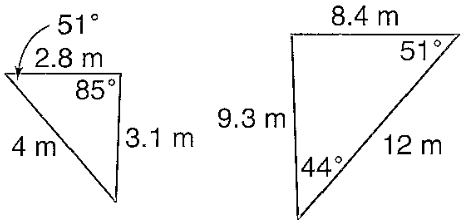


3.- Determinar si cada una de las dos pares de figuras son semejantes y justifique su respuesta:

(a)

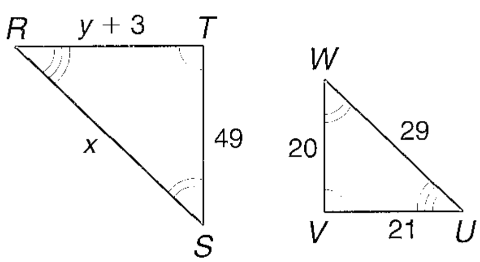


(b)

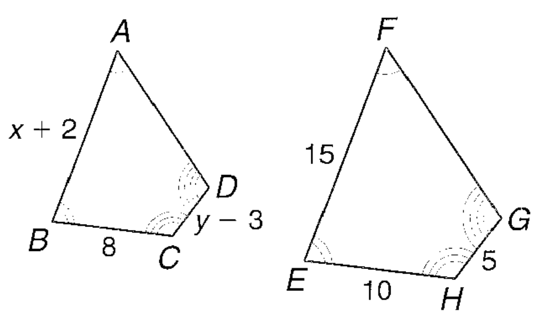


4.- Dado que cada par de polígonos son semejantes, encontrar los valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$:

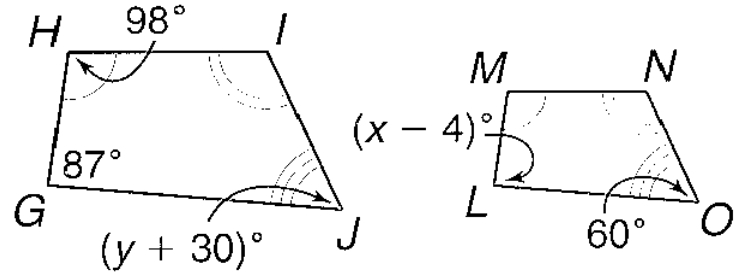
(a)



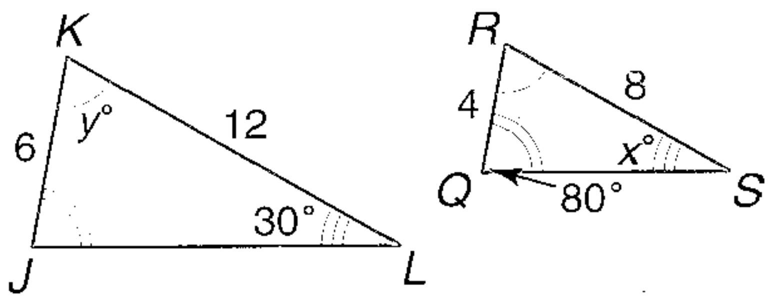
(b)



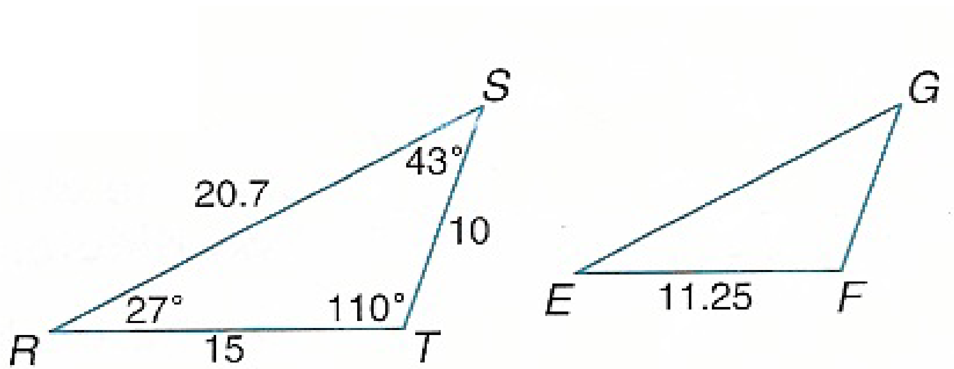
(c)



(d)



5.- Los triángulos $RST \sim EFG$. Encontrar: (a) La longitud del lado más corto del ΔEFG. (b) Cual es la razón de proporcionalidad entre ***RS*** y ***EG***?

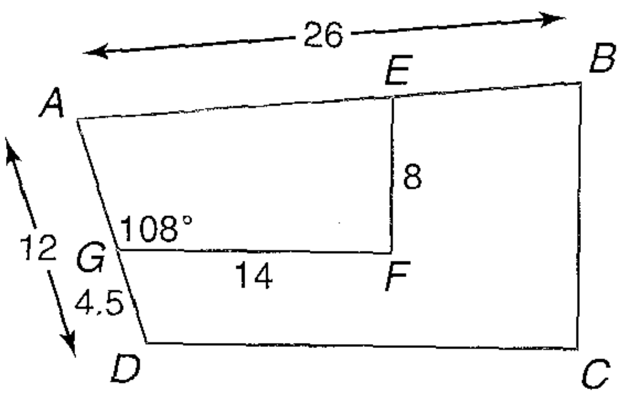


6.- Dados los trapecios $ABCD \sim AEFG$, donde se conocen los siguientes datos:

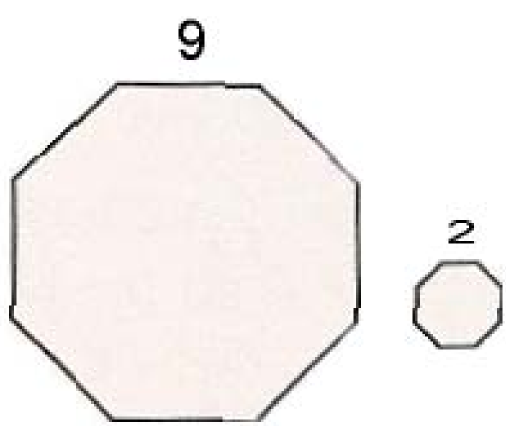
$$< AGF = 108°; GF = 14; AD = 12; DG = 4,5; AB = 26$$

Encontrar lo siguiente:

(a) La razón de proporcionalidad entre los dos trapecios.
(b) AG.
(c) DC
(d) < ***ADC.***
(e) BC.
(f) Perímetro de ***ABCD.***
(g) Perímetro de ***AEFG***.
(h) La razón de proporcionalidad entre los dos perímetros anteriores.



7.- Los dos octágonos mostrados en la gráfica siguiente son semejantes. (a).- Cual es la relación entre sus respectivas áreas? (b).- Cual es la relación entre las longitudes de sus respectivas circunferencias circunscritas?. (c).- Cuales la relación entre las áreas de sus respectivos círculos circunscritos?.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 6 – Triángulos semejantes. Parte “A”.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Criterios para identificar triángulos semejantes:

1.- ***Criterio (A-A***). Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes:

2.- ***Criterio (L-L-L***): Si las medidas de los lados correspondientes (*homólogos*) de dos triángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.

3.- ***Criterio (L-A-L***): Si las medidas de dos lados de un triángulo son proporcionales a las de dos lados correspondientes (*homólogos*) de otro triángulo y los dos ángulos incluidos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.

Teorema: La semejanza de triángulos es reflexiva, simétrica y transitiva:

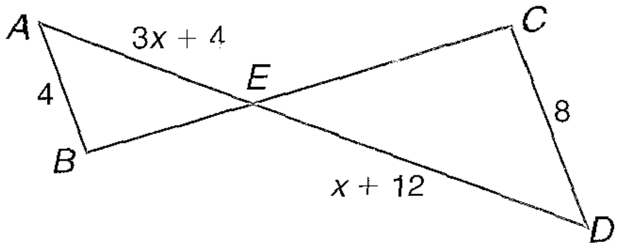
$$\Delta ABC \sim \Delta ABC\left(reflexiva\right)$$

$$Si-\Delta ABC \sim \Delta DEF-entonces-\Delta DEF \sim \Delta ABC\left(simétrica\right)$$

$$Si-\Delta ABC \sim \Delta DEF-y-\Delta DEF \sim \Delta GHI-entonces-\Delta ABC \sim \Delta GHI\left(transitiva\right)$$

Recordatorio: Dado un triángulo de vértices ***A***, ***B*** y ***C***, la suma de los ángulos internos de dicho triángulo es siempre igual a **180**°; o sea: $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

Ejemplo #1: Dado que $AB \parallel CD$ y $AB = 4; AE = 3x + 4; CD = 8; ED = x + 12$, encontrar ***AE*** y ***DE***.



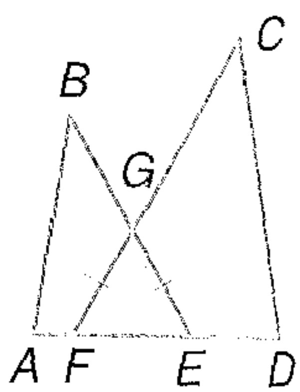
Solución:

Dado que $AB \parallel CD$ se cumple que los ángulos alterno-internos son iguales, entonces: $\angle BAE \cong \angle CDE; \angle ABE \cong \angle DCE$. Luego, por el primer criterio de semejanza los $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ y se cumple que: $\frac{AB}{DC} = \frac{AE}{DE}$; o sea: $\frac{4}{8} = \frac{3x+4}{x+12}$ y resolviendo se

$$4x + 48 = 24x + 32$$

encuentra: $x = \frac{4}{5}$

Ejemplo #2: En la gráfica siguiente se encuentra que:



$$FG \cong EG; BE = 15; CF = 20; AE = 9; DF = 12$$

Determinar cuales triángulos son semejantes.

Solución:

Si ***FG*** es igual a ***EG*** implica que $<GFE \cong < GEF$ porque si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a esos lados son también congruentes. Si los lados correspondientes (*homólogos*), que incluyen a los ángulos, son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes:

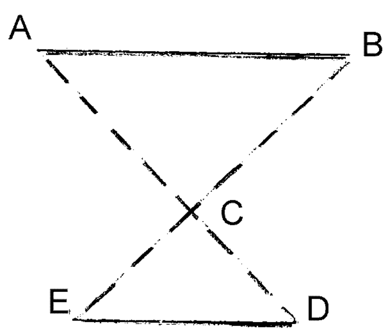
$$\frac{AE}{DF} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{BE}{CF} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

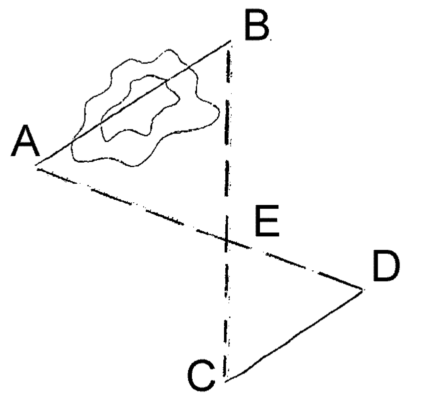
Luego, se puede escribir: $\dfrac{AE}{DF} = \dfrac{BE}{CF}$ por lo que debido al criterio ***L-A-L*** se puede afirmar que $\Delta ABE \sim \Delta DCF$

PROBLEMAS:

1.- Si $AB \parallel ED$ demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes *(homólogos*).

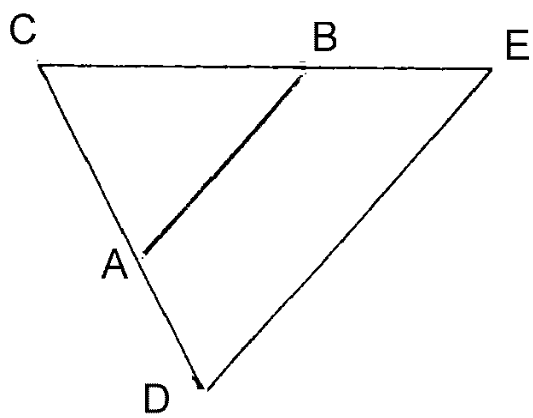


2.- Si $AB \parallel CD$ demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CED$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes (*homólogos*).

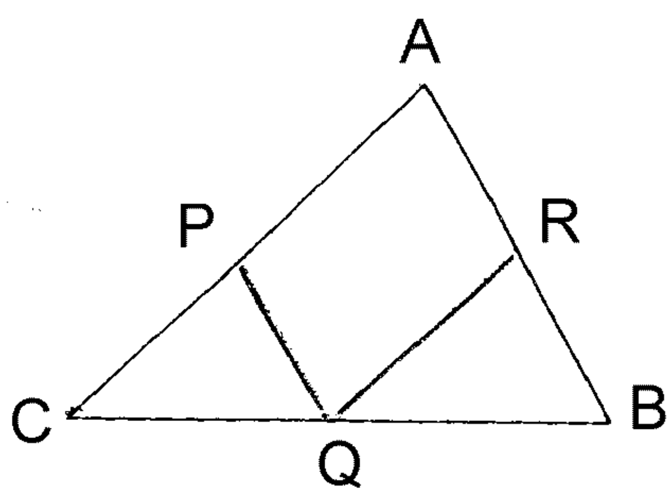


3.- Si $AB \parallel DE$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DCE$ y luego dados:

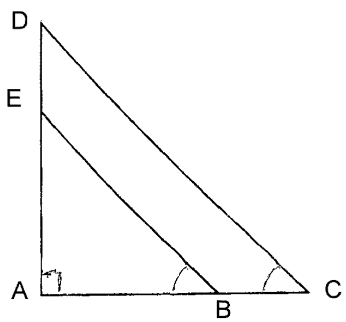
$AC = 3; AD = 2; AB = 4$; calcular ***DE.***



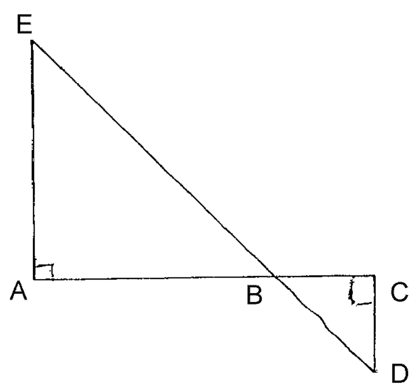
4.- Si $PQ \parallel AB$ y $QR \parallel AC$, demostrar que $\Delta PCQ \sim \Delta RQB$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes (*homólogos*).



5.- Dados los datos: $\angle A = 90°; \angle B = \angle C$; demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes (*homólogos*).



6.- Si $EA \perp AC$ y $DC \perp AC$; demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CDB$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes (*homólogos)*.

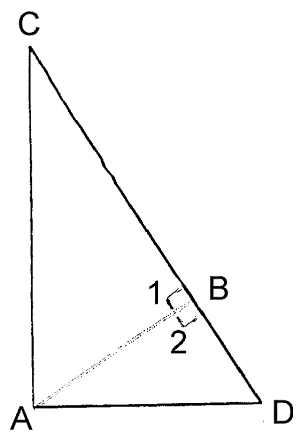


7.- Resolver lo siguiente:

(a) Si $CA \perp AD$ y $AB \perp CD$ demostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

(b) Si tenemos que $< A =< 1 =< 2 = 90°$; demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

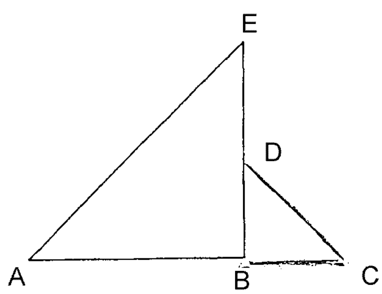
(c) Si $< A = 90°$ y $AB \perp CD$; demostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.



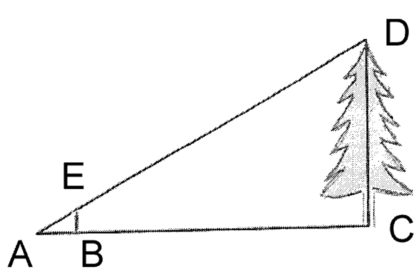
8.- Si se dan los siguientes datos:

$$AB = 8,0; AC = 12,0; ED = DB = 3,0; AE = 10,0; CD = 5,0$$,

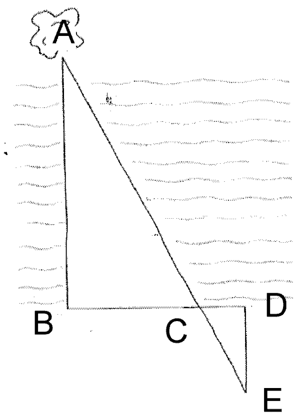
demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CBD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.



9.- Si $EB \parallel CD$ y también $AB = 2,0; BC = 18,0; BE = 3,0;$ calcular ***CD.***



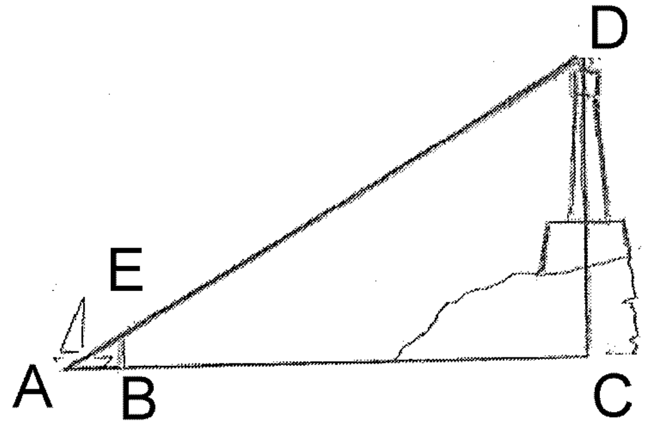
10.- Si $AB \parallel ED$, $AB \perp BD$; $ED \perp BD$; y además: $DE = 4,0; CD = 2,0; BC = 6,0;$ hallar ***AB***.



11.- Resolver lo siguiente:

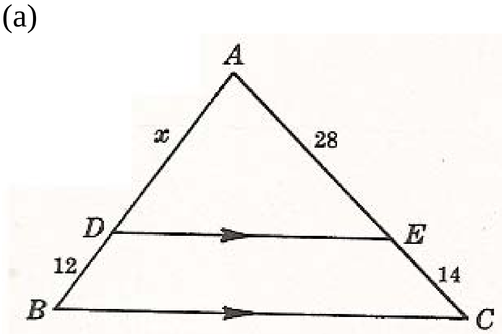
(a) Si $EB \parallel CD$ y también se cumple que: $AB = 9,0; EB = 6,0; CD = 80,0$.
Calcular ***BC.***

(b) Si $EB \parallel CD$ y también:
$AB = 12,0; EB = 8,0; CD = 120,0;$ calcular ***BC.***

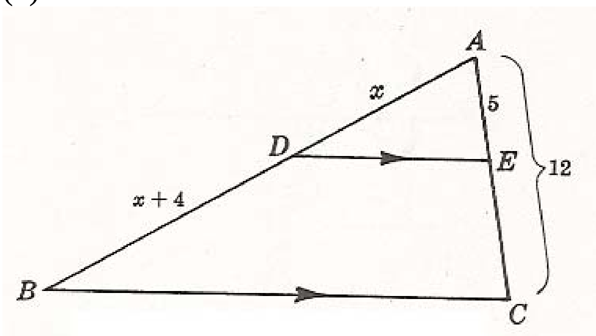


12.- Encontrar x en cada figura:

(a)



(b)



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 7 – Triángulos semejantes. Parte "B".

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Criterios para identificar triángulos semejantes:

1.- ***Criterio (A-A***). Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes:

2.- ***Criterio (L-L-L***): Si las medidas de los lados correspondientes (*homólogos*) de dos triángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.

3.- ***Criterio (L-A-L***): Si las medidas de dos lados de un triángulo son proporcionales a las de dos lados correspondientes (*homólogos*) de otro triángulo y los dos ángulos incluidos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.

Teorema: La semejanza de triángulos es reflexiva, simétrica y transitiva:

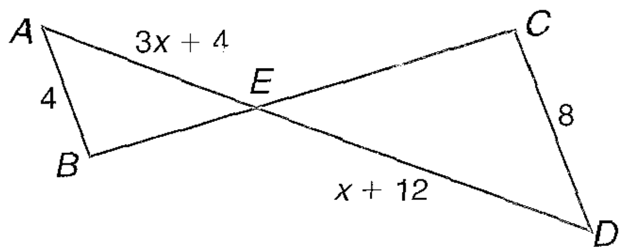
$$\Delta ABC \sim \Delta ABC\left(reflexiva\right)$$

$$Si-\Delta ABC \sim \Delta DEF-entonces-\Delta DEF \sim \Delta ABC\left(simétrica\right)$$

$$Si-\Delta ABC \sim \Delta DEF-y-\Delta DEF \sim \Delta GHI-entonces-\Delta ABC \sim \Delta GHI\left(transitiva\right)$$

Recordatorio: Dado un triángulo de vértices ***A***, ***B*** y ***C***, la suma de los ángulos internos de dicho triángulo es siempre igual a **180°**; o sea: $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

Ejemplo #1: Dado que $AB \parallel CD$ y $AB = 4; AE = 3x + 4; CD = 8; ED = x + 12$, encontrar ***AE*** y ***DE***.



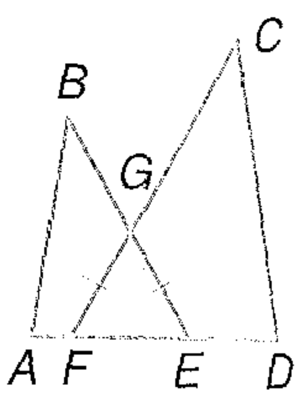
Solución:

Dado que $AB \parallel CD$ se cumple que los ángulos alterno-internos son iguales, entonces: $\angle BAE \cong \angle CDE; \angle ABE \cong \angle DCE$. Luego, por el primer criterio de semejanza los $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ y se cumple que: $\frac{AB}{DC} = \frac{AE}{DE}$; o sea: $\frac{4}{8} = \frac{3x+4}{x+12}$ y resolviendo se

$$4x + 48 = 24x + 32$$

encuentra: $x = \frac{4}{5}$

Ejemplo #2: En la gráfica siguiente se encuentra que:



$$FG \cong EG; BE = 15; CF = 20; AE = 9; DF = 12$$

Determinar cuales triángulos son semejantes.

Solución:

Si ***FG*** es igual a ***EG*** implica que $\angle GFE \cong \angle GEF$ porque si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a esos lados son también congruentes. Si los lados correspondientes (*homólogos*) que incluyen a los ángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes:

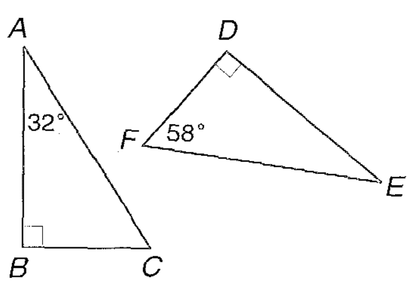
$$\frac{AE}{DF} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{BE}{CF} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Luego, se puede escribir: $\dfrac{AE}{DF} = \dfrac{BE}{CF}$ por lo que debido al criterio ***L-A-L*** se puede afirmar que $\Delta ABE \sim \Delta DCF$

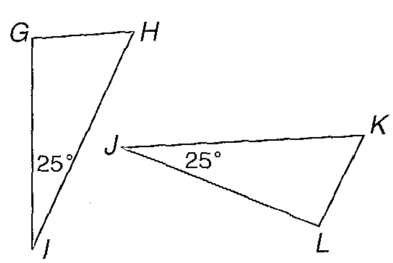
PROBLEMAS:

1.- Determinar si cada par de triángulos son semejantes. Si existe la semejanza, escriba una secuencia matemática relacionando cada par de triángulos.

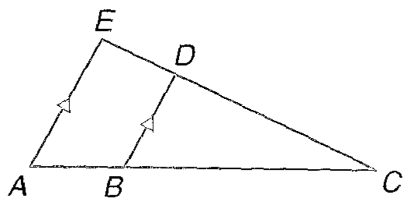
(a)



(b)

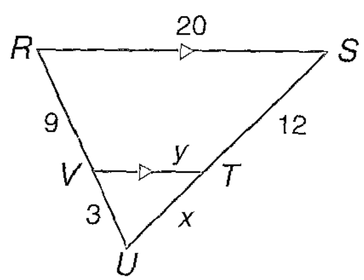


2.- Identifique cuales son los triángulos semejantes mostrados en la gráfica siguiente. Escriba su razonamiento.

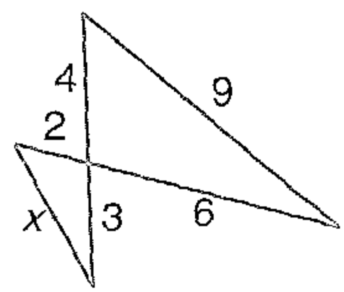


3.- Explique porque cada par de triángulos son semejantes y encuentre en cada caso el valor de cada dimensión.

(a)

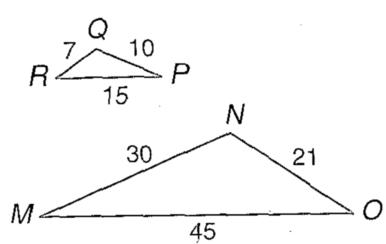


(b)

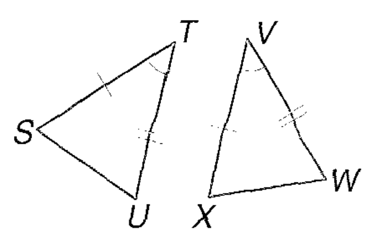


4.- Determine si cada par de triángulos son semejantes y de existir la semejanza, escriba una explicación matemática dando razones para su respuesta.

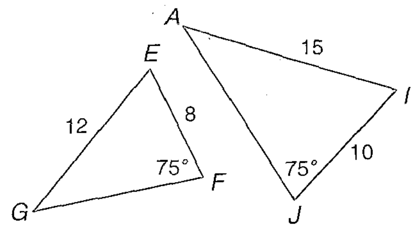
(a)



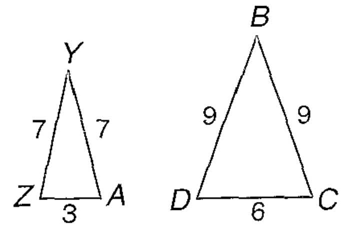
(b)



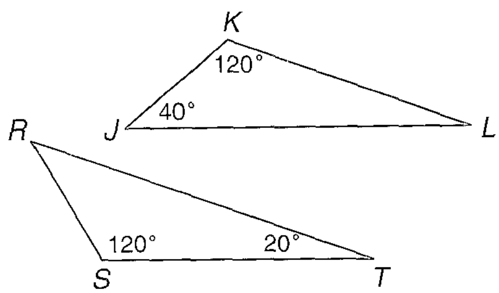
(c)



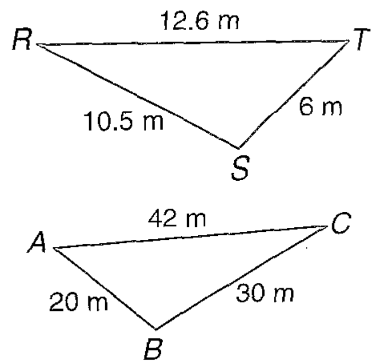
(d)



(e)

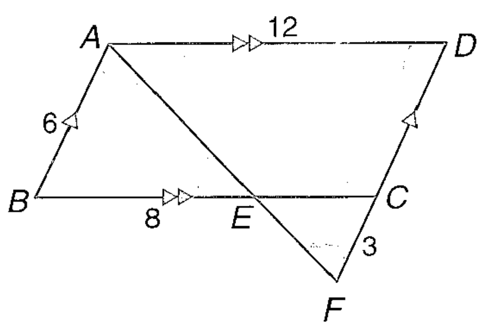


(f)

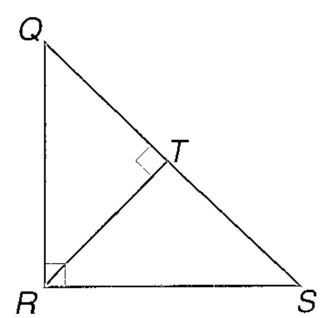


5.- Identifique los triángulos semejantes en cada gráfica y explique su respuesta.

(a)



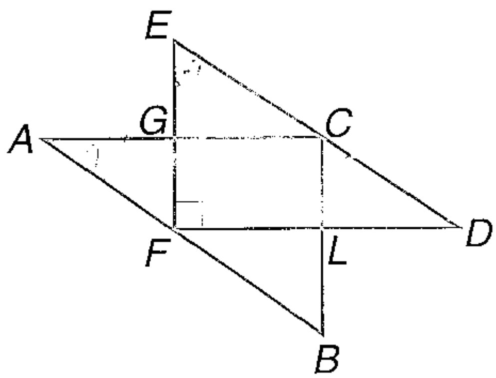
(b)



6.- Dado que $ED \parallel AB$ y además:

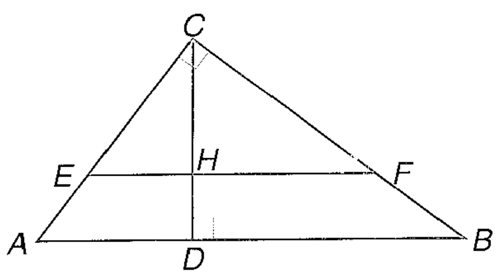
$AB = 10; BC = 6; AC = 8; CD = 5; GE = 3$.

Encontrar las dimensiones de ***EC***; ***GC*** y ***EF***.



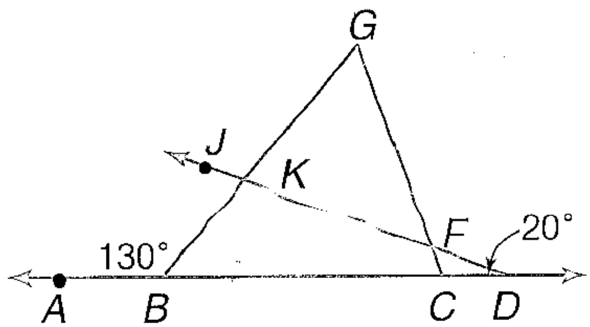
7.- Dado que $EF \parallel AB$ y además:

$AD = 9; DB = 16; EC = 2(AE);$ encontrar las dimensiones de ***AE***; ***AC***; ***CF***; ***CB***; ***CD*** y ***EF.***

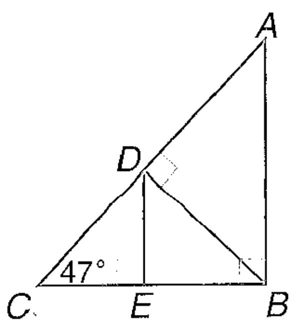


8.- Si se dan los siguientes datos: $\dfrac{FG}{BG} = \dfrac{KG}{CG}; \angle ABG = 130°; \angle ADJ = 20°$

Encontrar los valores de los ángulos: $\angle CFD; \angle GFK; \angle G; \angle GKJ$.

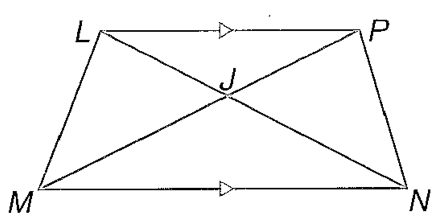


9.- Si el ángulo $\angle ABC$ es un ángulo recto, y $BD \perp AC$, $DE \perp BC$ y además: $\angle ACB = 47$; encontrar las dimensiones de los siguientes ángulos: $\angle CDE; \angle A; \angle ABD; \angle BDE$.

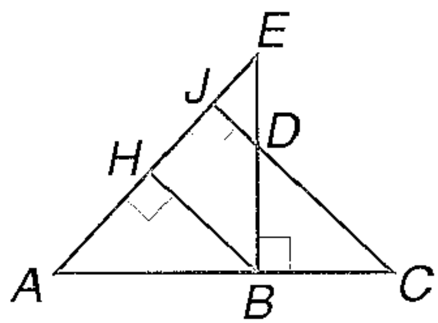


10.- Escribir la prueba de que en cada caso se cumple:

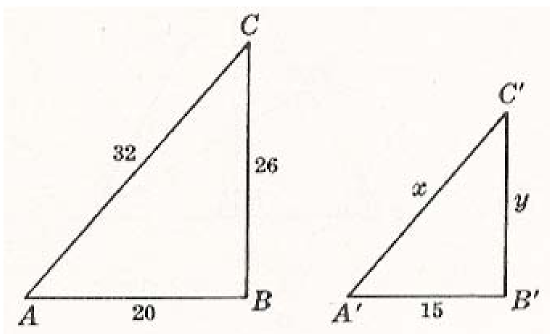
(a) Dado que $LP \parallel MN$ entonces es verdad que $\dfrac{LJ}{JN} = \dfrac{PJ}{JM}$



(b) Dado que $EB \perp AC$; $BH \perp AE$ y $CJ \perp AE$, entonces es verdad que $\Delta ABH \sim \Delta DCB$

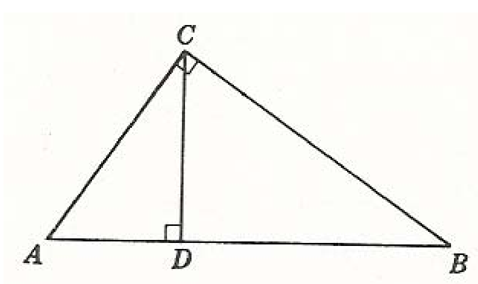


11.- Si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'; \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'$, encontrar $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$:

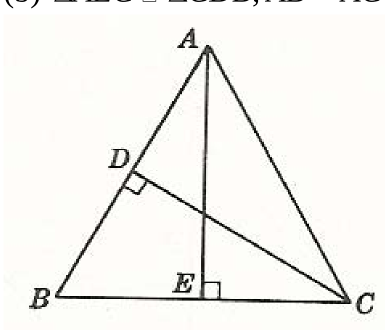


12.- En cada una de las siguientes figuras indicar cuales ángulos son congruentes de manera tal que se compruebe la semejanza de los triángulos indicados:

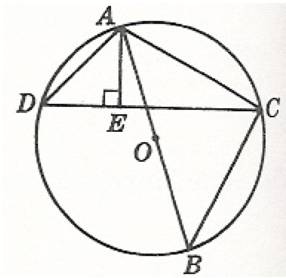
(a) $\triangle ACD \sim \triangle ACB$



(b) $\triangle AEC \sim \triangle CDB; \overline{AB} = \overline{AC}$



© $\Delta ADE \sim \Delta ABC; \overline{AB} = diá metro$



GUIA DE TRABAJO
Materia: Matemáticas.
Tema: Geometría-8- Relaciones métricas en los triángulos
Fecha:_______________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

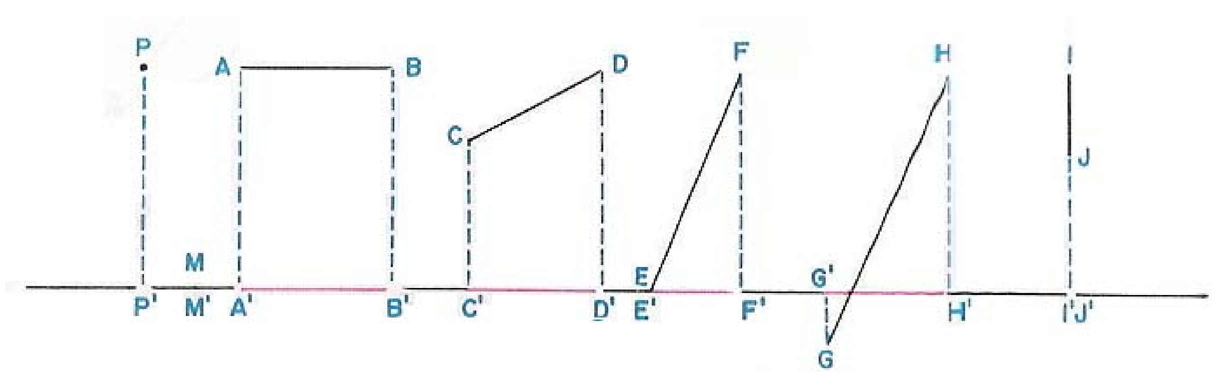
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Proyecciones: Se llama proyección de un punto ***P*** sobre una recta al pie ***P'*** de la perpendicular trazada a la recta, desde el punto. La perpendicular se llama ***proyectante.***

Si un punto ***M*** está sobre la recta, su proyección ***M'*** es el mismo punto ***M.***

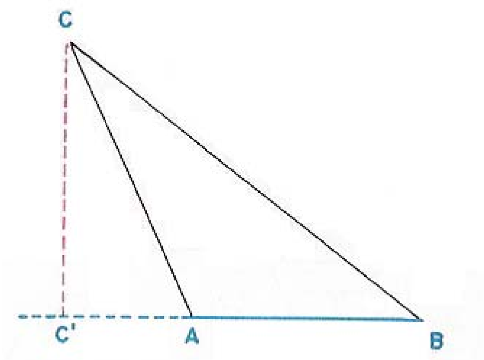
Proyección de un segmento sobre una recta es el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos de dicho segmento.

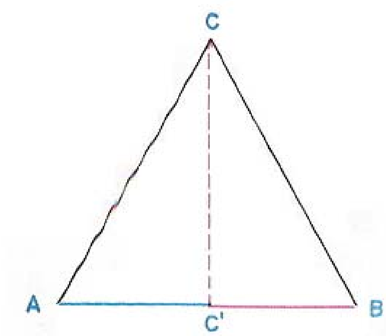


En la figura anterior están representadas las proyecciones de un segmento sobre una recta, en distintos casos.

Cuando el segmento es paralelo a la recta, su proyección es igual a él. Si el segmento es perpendicular a la recta, la proyección es un punto sobre la recta.

Proyecciones de los lados de un triángulo:

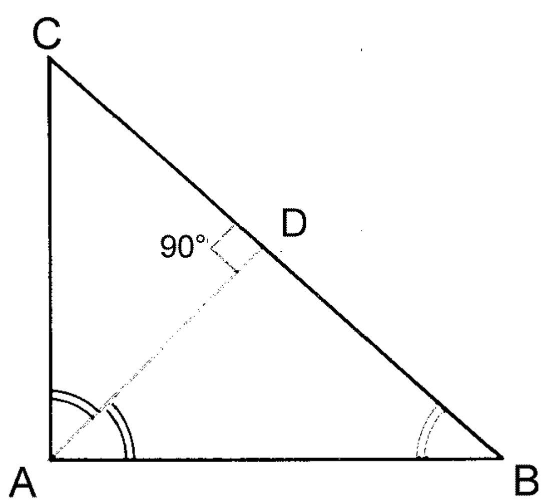




En las figuras de arriba están representadas las proyecciones de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de los triángulos ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$. Las proyecciones se expresan de la siguiente manera:

$$\text{Pr}\,oyec._{AB}\,\overline{AC} = \overline{AC'}$$
$$\text{Pr}\,oyec._{AB}\,\overline{BC} = \overline{BC'}$$

Teoremas de Euclides: Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se verifica que:



1. Los triángulos rectángulos resultantes son semejantes entre si y semejantes al triángulo dado.
2. La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta.
3. La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.
4. Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección correspondiente sobre ella.
5. La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa.

Tesis:

1. $$\begin{gathered}\Delta ADC \sim \Delta ABC;\\ \Delta ADB \sim \Delta ABC;\\ \Delta ADC \sim \Delta ADB\end{gathered}$$
2. $$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$
3. $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$
4. $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}};\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$
5. $$\frac{\overline{AC^2}}{\overline{AB^2}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

Hipótesis: El ΔABC es rectángulo en $\angle A$ y $\overline{AD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa.

Demostración de 1a:

Comparemos los ΔADC y ΔABC:

$$\begin{gathered}\angle D = \angle A\left(rectos\right)\\ \angle C = \angle C\left(común\right)\end{gathered}$$ por lo que se puede concluir que $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ por ser rectángulos con un ángulo agudo igual.

En ΔABD y ΔABC:

$\angle D = \angle A (rectos)$

$\angle B = \angle B (común)$ por lo que se puede concluir que $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ por ser rectángulos con un ángulo agudo igual. Comparando los dos resultados se concluye que: $\Delta ADC \sim \Delta ADB$.

Demostración de 2da:

Escribiendo la proporcionalidad existentes entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos, que según la demostración anterior son semejantes, $\Delta ADC \sim \Delta ABD$, obtenemos que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Demostración de 3ra:

Planteando la proporcionalidad entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos semejantes ΔADC y ΔABC, tenemos: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

Demostración de 4ta:

Escribiendo la proporcionalidad entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos ΔADC y ΔABC y entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos ΔADB y ΔABC, resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

Demostración de 5ta:

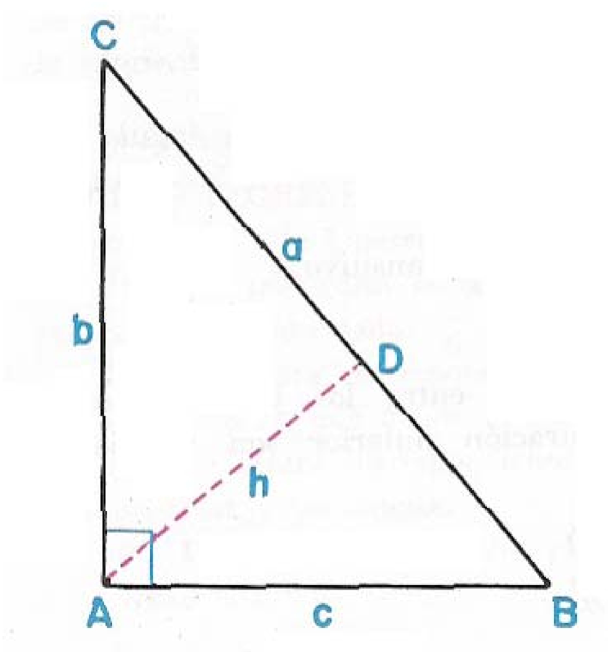
Basándonos en la demostración de 4ta, podemos escribir que: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$; de donde, haciendo el producto de los medios se obtiene: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$ (1)

De la misma manera, basándonos en la demostración de 4ta., podemos escribir que se cumple: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ y por tanto se obtiene: $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$ (2)

Dividiendo ahora (1) entre (2), resulta:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\left(\overline{BC} \cdot \overline{CD}\right)}{\left(\overline{BC} \cdot \overline{BD}\right)} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



Hipótesis El ΔABC es rectángulo en $\angle A$ y la hipotenusa es $\overline{BC} = a$. Los catetos son los siguientes: $\overline{AB} = c; \overline{AC} = b$.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2$

Demostración: Para ello se traza la altura $\overline{AD} = h$, correspondiente a la hipotenusa. Y como cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, se puede escribir que se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{CD}}; \frac{a}{c} = \frac{c}{\overline{DB}}$$

Despejando los catetos:

$b^2 = a \cdot \overline{CD}$ (1)

$c^2 = a \cdot \overline{DB}$ (2)

Sumando ahora (1) y (2), se obtiene:

$$b^2 + c^2 = a \cdot \overline{CD} + a \cdot \overline{DB} = a \cdot \left(\overline{CD} + \overline{DB} \right)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (a) = a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

PROBLEMAS:

1.- Si ***a*** es la hipotenusa y ***b*** y ***c*** los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta:

(a) $b = 10(cm); c = 6(cm)$

(b) $a = 32(cm); c = 12(cm)$

© $a = 100(Km); b = 80(Km)$

2.- Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que el valor del cateto es:

(a) $c = 4(m)$

(b) $c = 15(cm)$

© $c = 11(cm)$

3.- Hallar la altura de un triángulo equilátero sabiendo que el lado vale:

(a) $l = 12(cm)$

(b) $l = 4(cm)$

© $l = 30(m)$

4.- Hallar la diagonal de un cuadrado cuyo lado vale:

(a) $l = 3(m)$

(b) $l = 15(cm)$

© $l = 7(cm)$

5.- Hallar la diagonal de un rectángulo sabiendo que los lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ miden lo que se indica:

(a) $a = 2(m); b = 4(m)$

(b) $a = 7(m); b = 9(m)$

© $a = 10(m); b = 12(m)$

6.- Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números consecutivos.

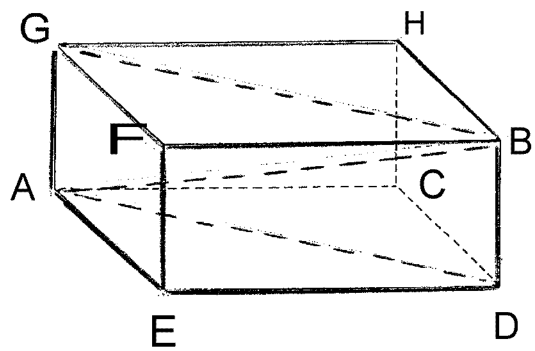
7.- Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números pares consecutivos.

8.- La diagonal de un cuadrado vale $5\sqrt{2}\,(m)$. Encontrar el lado del cuadrado.

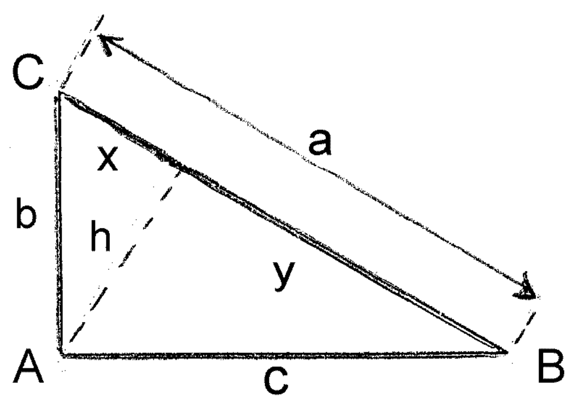
9.- Calcular $\overline{AB}$ en la figura siguiente, sabiendo lo siguiente:

$$\overline{AE} = \overline{BD} = 30(cm)$$

$$\overline{ED} = 40(cm)$$



10.- Calcular los valores desconocidos que se pide en la figura siguiente:



(a) $h = ?; x = 4(cm); y = 9(cm)$

(b) $h = ?; a = 5; b = 3; c = 4$

© $x = ?; a = 10; b = 6$

(d) $y = ?; a = 10; c = 8$

(e) $y = ?; b = 3; c = 4; x = 2$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 9-Problemas de repaso de material ya visto.

Fecha:______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

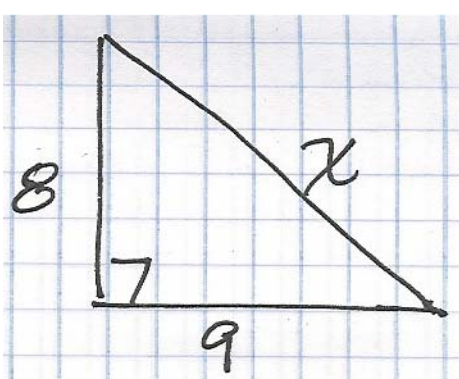
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

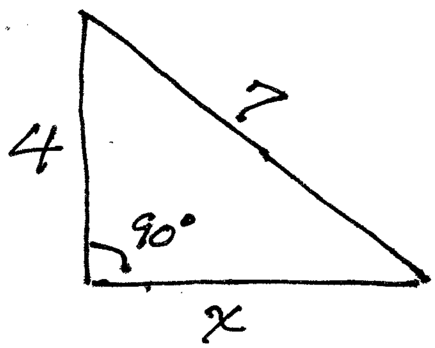
PREGUNTAS:

1.- Encontrar las incógnitas en las figuras geométricas dadas con los siguientes datos:

(a) 1 punto



(b) 1 punto



© 1 punto

Un cateto de un triángulo rectángulo mide 64 cm. y la diferencia entre la hipotenusa y el otro cateto es de 12,0 cm., Cuál es la medida del otro cateto?

(d) 1 punto

Cuánto mide la diagonal de un cuadrado que tiene área de 81 cm^2?.

(e) 1 punto.

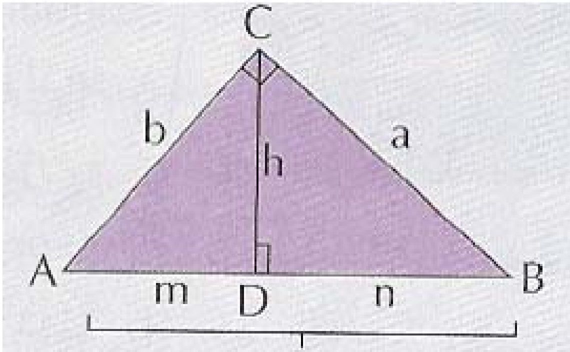
Cuánto mide la diagonal de un rectángulo ABCD cuyos lados son:

AB = 20,0 cm. BC = 30,0 cm.

(f) 1 punto

Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero de lado 15,0 cm ?

2.- Dada la figura siguiente, resolver los siguientes problemas:



(a) 2 puntos

Calcular ***h,*** si: $m = 9{,}0(cm.)$ y $n = 15{,}0(cm.)$

(b) 2 puntos
Calcular ***m***, si : $n = 16{,}0(cm.)$ y $h = 6{,}0(cm.)$

© 2 puntos

Calcular ***c***, si : $b = 16(cm.)$ y $m = 9{,}0(cm.)$

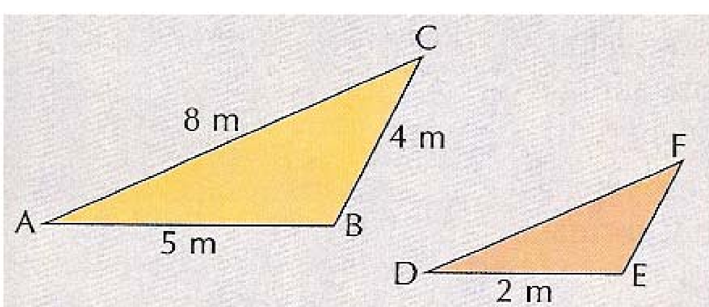
(c) 2 puntos

Calcular c, si: $b = 6\sqrt{3}(cm.)$ y $n = 12{,}0(cm.)$

3.- Semejanza de triángulos:

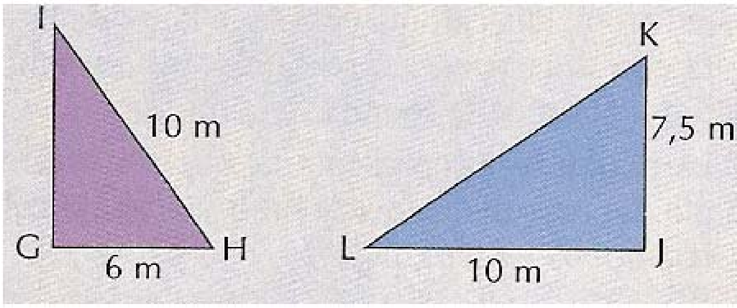
(a) 2 puntos

Si los triángulos mostrados abajo son semejantes: Cuánto mide el lado EF? Cuánto mide el lado FD?



(b) 2 puntos

Si los triángulos mostrados abajo son semejantes: Cuánto mide IG?. Cuánto mide LK?.



© 2 puntos

Si en la figura anterior:

$$LJ + 40,0(cm.)$$
$$JK = 30,0(cm.)$$

Cuánto miden los lados ***GI*** y ***KL***?

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría – Explorando la circunferencia y el círculo.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

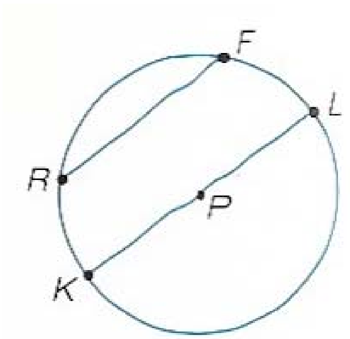
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que distan la misma distancia de un punto definido de ese mismo plano. La distancia se designa como radio, $\boldsymbol{r}$, y el punto como centro de la circunferencia. Un circulo, es el área interior a la circunferencia. Normalmente una circunferencia o un círculo se designan por el centro, por ejemplo, en la gráfica que sigue como $\odot P$.

Cuerdas: Tanto $\overline{RF}$ como $\overline{KL}$ son cuerdas del $\odot P$. Una cuerda es un segmento que tiene sus puntos extremos en la circunferencia.

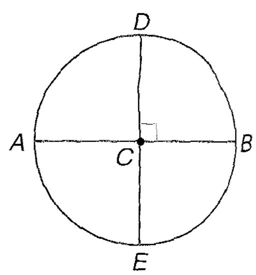


Diámetro: En la gráfica anterior $\overline{KL}$ es el diámetro, $\boldsymbol{d}$, de $\odot P$; o sea, que un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo, que pasa por el centro. Se debe notar que tanto $\overline{PK}$ como $\overline{PL}$ son radios del círculo y son, ambos exactamente la mitad del diámetro. Entonces, podemos escribir que: $r = \frac{1}{2}d$.

Longitud de la circunferencia: $C = 2\pi r = \pi d$

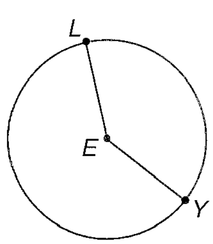
Area del círculo: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

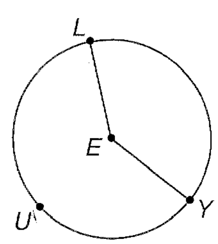
Angulo central: Aquel que tiene como vértice el centro de la circunferencia, como se ve en la gráfica de abajo, donde sus lados cortan la circunferencia. Entonces, los ángulos $\angle DCB$; $\angle DCA$; $\angle ACE$ y $\angle ECB$ son ejemplos de ángulos centrales, siendo todos iguales a 90°. Un ángulo central puede tener cualquier valor, además de 90°.



Suma de ángulos centrales: La suma de los ángulos centrales de un círculo, sin puntos interiores en común, es igual a 360°.
Arcos: Son medidos por la medida de sus ángulos centrales correspondientes.

Arco menor y arco mayor: En la gráfica siguiente se denomina ***arco menor*** al arco $\overset{\frown}{LY}$ el cual está conformado por el corte de los lados del ángulo central $\angle LEY$ con la circunferencia. Por otro lado se llama ***arco mayor del ángulo central*** $\angle LEY$ al arco $\overset{\frown}{LUY}$; o sea, que la dimensión de un arco menor es la medida de su ángulo central correspondiente y la dimensión de un arco mayor para el mismo ángulo central es 360° menos el arco menor.

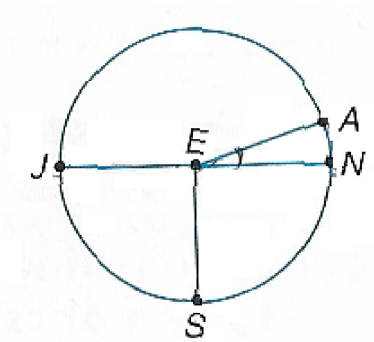




Semicírculo: Es la porción de círculo correspondiente a 180°.

Adición de arcos: La medida de un arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos; o sea, que se cumple que: $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{PQR}$

Ejemplo #1: En $\odot E$, se encuentra que $\angle AEN = 18°; \overline{JN} = d$ y $\angle JES = 90°$. Encontrar cada dimensión en cada caso:



a.- Encontrar $m\overset{\frown}{AN}$.

Como $\angle AEN$ es un ángulo central, $m\angle AEN = m\overset{\frown}{AN}$, entonces $m\overset{\frown}{AN} = 18°$.

b.- Encontrar $m\overset{\frown}{JA}$.

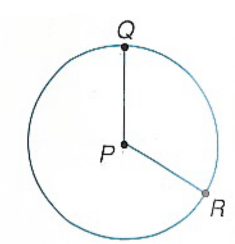
Por el postulado de adición de arcos, se tiene que:

$$m\overset{\frown}{JAN} = m\overset{\frown}{JA} + m\overset{\frown}{AN}$$
$$180° = m\overset{\frown}{JA} + 18°$$
$$m\overset{\frown}{JA} = 162°$$

c.- Encontrar $m\overset{\frown}{JAS}$.

$\overset{\frown}{JAS}$ es el arco mayor correspondiente al ángulo central $\angle JES$; por lo tanto, $m\overset{\frown}{JAS} = 360° - m\overset{\frown}{JS}$. Como $m\overset{\frown}{JS} = 90°$, entonces $m\overset{\frown}{JA} = 360° - 90° = 270°$.

Ejercicio #2: En $\odot P$, **PR** = 9 y $\angle QPR = 120°$. Encontrar la longitud de $\overset{\frown}{QR}$.



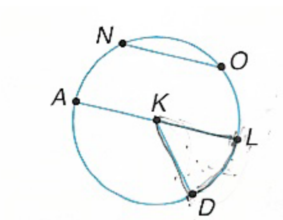
En primer lugar, se debe encontrar que parte del círculo es el $\angle QPR$:

$\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$; o sea, que el ángulo dado es $\frac{1}{3}$ del círculo, de modo que la longitud del $\overset{\frown}{QR}$ es $\frac{1}{3}$ de la longitud de la circunferencia de $\odot P$. Luego:

Longitud de $\overset{\frown}{QR} = \frac{1}{3}(2\pi r) = \frac{1}{3}(2\pi 9) = 18{,}8$.

PROBLEMAS:

1.- En la gráfica del círculo $\odot K$, hacer lo siguiente:

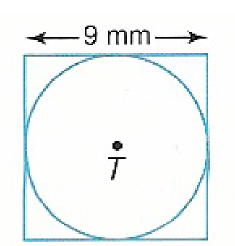


(a) Nombre dos cuerdas.
(b) Si ***AL*** = 9,4, encuentre ***KD***.
(c) Es ***NO*** < ***AL*** ?. Explique.

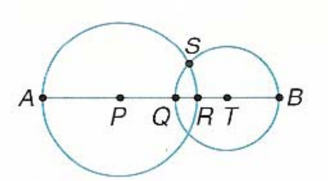
2.- Dados ciertos valores encontrar los otros:

(a) $r = 7; d = ?; C = ?$
(b) $C = 76{,}4; d = ?; r = ?$.

3.- Encontrar la longitud de la circunferencia de $\odot T$.

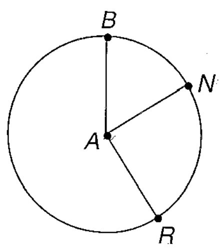


4.- $\odot P$ tiene un radio de 6 unidades y $\odot T$ tiene un radio de 4 unidades.



(a) Si ***QR*** = 1, encontrar ***RT***.
(b) Si ***QR*** = 1,2, encontrar ***AQ***.

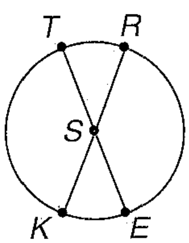
5.-



(a) Explique porque $\overset{\frown}{BNR}$ y $\overset{\frown}{BRN}$ en $\odot A$ no son el mismo arco.

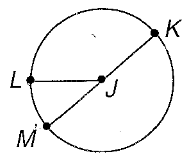
(b) Si $m\overset{\frown}{BN} = 25°$, encontrar $m\overset{\frown}{BRN}$.

6.- Si $\overline{TE}$ y $\overline{KR}$ son diámetros de $\odot S$ y además $m\angle TSR = 42°$, encuentre las medidas de los siguientes arcos:



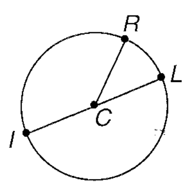
(a) $m\overset{\frown}{TRE}$
(b) $m\overset{\frown}{TK}$
(c) $m\overset{\frown}{TRK}$

7.- En $\odot J$, $\overline{KM}$ es un diámetro y además: $JL = 18; m\angle KJL = 140°$. Encontrar la longitud de los siguientes arcos:



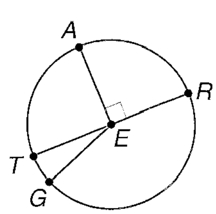
(a) $\overset{\frown}{LM}$.
(b) $\overset{\frown}{KL}$
(c) $\overset{\frown}{LMK}$

8.- En $\odot C$, $\overline{IL}$ es un diámetro y además: $m\angle ICR = 3x + 5; m\angle RCL = x - 1$
Encontrar lo siguiente:



(a) X.
(b) $m\angle ICR$
(c) $m\overset{\frown}{ILR}$

9.- Si $m\angle TEG = 21°$ y $\overline{TR}$ es un diámetro determine si cada arco es un arco menor, un arco mayor o un semicírculo y encuentre la medida de cada arco:



(a) $m\overset{\frown}{TG} =$
(b) $m\overset{\frown}{ATR} =$ (c) $m\overset{\frown}{AR}$ (d) $m\overset{\frown}{TAR} =$ (e) $m\overset{\frown}{ATG} =$

(f) $m\overset{\frown}{ARG} =$ (g) $m\overset{\frown}{RAG} =$ (h) $m\overset{\frown}{TAG} =$ (i) $m\overset{\frown}{GR} =$

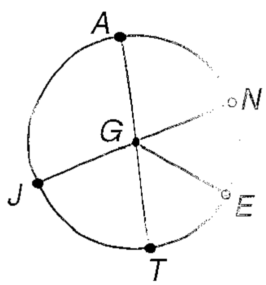
10.- Utilizando la gráfica anterior, si $TR = 12$, encontrar la longitud de cada arco:

(a) $\overset{\frown}{TG} =$ (b) $\overset{\frown}{ATR} =$ (c) $\overset{\frown}{AR} =$ (d) $\overset{\frown}{TAR} =$

(e) $\overset{\frown}{ATG} =$ (f) $\overset{\frown}{ARG} =$ (g) $\overset{\frown}{TAG} =$ (h) $\overset{\frown}{RAG} =$

(i) $\overset{\frown}{GR} =$

11.- En el $\odot G$, abajo, el $\angle NEG = \angle EGT$, $m\angle AGJ = 2x; m\angle JGT = 2x + 24$ y $\overline{AT}$ y $\overline{JN}$ son diámetros. Encontrar cada uno de los siguientes:



(a) $x =$ (b) $m\angle AGJ =$ (c) $m\angle JGT =$ (d) $m\overset{\frown}{NE} =$

(e) $m\overset{\frown}{NJT} =$ (f) $m\overset{\frown}{JNE} =$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 11– El círculo, cuerdas y arcos.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

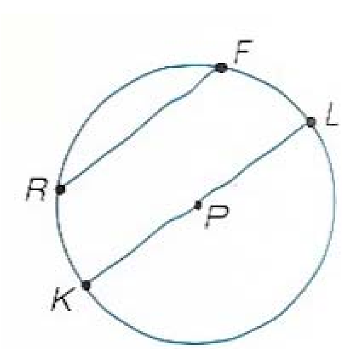
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que distan la misma distancia de un punto definido de ese mismo plano. La distancia se designa como radio, $\boldsymbol{r}$, y el punto como centro de la circunferencia. Un circulo, es el área interior a la circunferencia. Normalmente una circunferencia o un círculo se designan por el centro, por ejemplo, en la gráfica que sigue como $\odot P$.

Cuerdas: Tanto $\overline{RF}$ como $\overline{KL}$ son cuerdas del $\odot P$. Una cuerda es un segmento que tiene sus puntos extremos en la circunferencia.

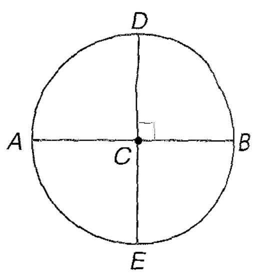


Diámetro: En la gráfica anterior $\overline{KL}$ es el diámetro, $\boldsymbol{d}$, de $\odot P$; o sea, que un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo, que pasa por el centro. Se debe notar que tanto $\overline{PK}$ como $\overline{PL}$ son radios del círculo y son, ambos exactamente la mitad del diámetro. Entonces, podemos escribir que: $r = \frac{1}{2}d$.

Longitud de la circunferencia: $C = 2\pi r = \pi d$

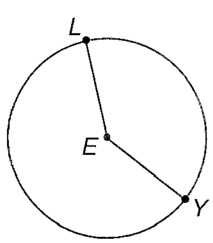
Area del círculo: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

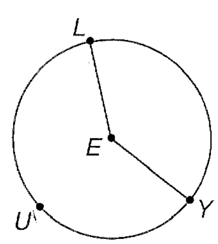
Angulo central: Aquel que tiene como vértice el centro de la circunferencia, como se ve en la gráfica de abajo, donde sus lados cortan la circunferencia. Entonces, los ángulos $\angle DCB$; $\angle DCA$; $\angle ACE$ y $\angle ECB$ son ejemplos de ángulos centrales, siendo todos iguales a 90°. Un ángulo central puede tener cualquier valor, además de 90°.



Suma de ángulos centrales: La suma de los ángulos centrales de un círculo, sin puntos interiores en común, es igual a 360°.
Arcos: Son medidos por la medida de sus ángulos centrales correspondientes.

Arco menor y arco mayor: En la gráfica siguiente se denomina ***arco menor*** al arco $\overset{\frown}{LY}$ el cual está conformado por el corte de los lados del ángulo central $\angle LEY$ con la circunferencia. Por otro lado se llama ***arco mayor del ángulo central*** $\angle LEY$ al arco $\overset{\frown}{LUY}$; o sea, que la dimensión de un arco menor es la medida de su ángulo central correspondiente y la dimensión de un arco mayor para el mismo ángulo central es 360° menos el arco menor.

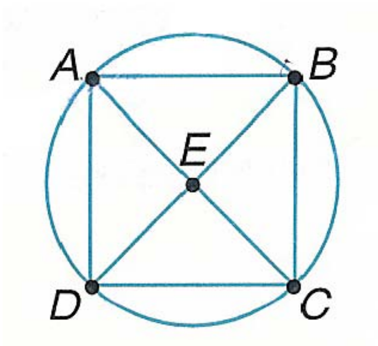




Semicírculo: Es la porción de círculo correspondiente a 180°.

Adición de arcos: La medida de un arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos; o sea, que se cumple que: $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{PQR}$

Teoremas de cuerdas y arcos:



1.- ***Teorema #1***: En un círculo, o en círculos congruentes, dos arcos menores son congruentes solamente si sus correspondientes cuerdas son congruentes.

Dado el $\odot E$ y $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DC}$ probar que $\overline{AB} = \overline{DC}$

Prueba: Considerando los datos dados y por ser los radios del círculo iguales se puede escribir que:

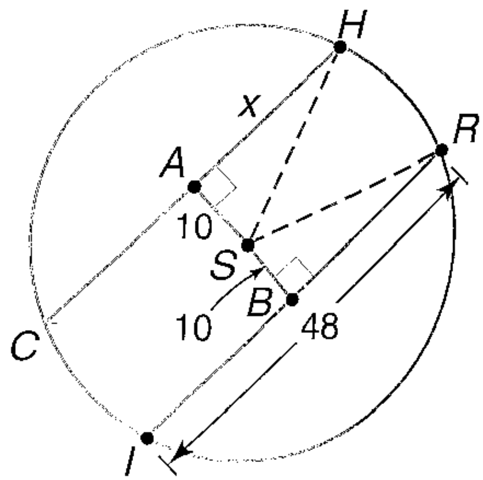
$$\overline{AE} \cong \overline{CE}$$
$$\overline{BE} \cong \overline{DE}$$

También, los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$\angle AEB \cong \angle CED$ y utilizando el criterio de semejanza de triángulos ***LAL*** podemos escribir que: $\Delta AEB \cong \Delta CED$, por lo que queda demostrado que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

2.- ***Teorema #2***: En un círculo, si un diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces éste bisecta la cuerda y su arco correspondiente. *Este teorema puede ser demostrado fácilmente por triángulos semejantes.*

Ejemplo: Las cuerdas $\overline{CH}$ y $\overline{IR}$ son equidistantes del centro de $\odot S$ Si $IR = 48$, encontrar CH, dado que SA es la distancia desde S a $\overline{CH}$, y SB es la distancia de S a $\overline{IR}$.

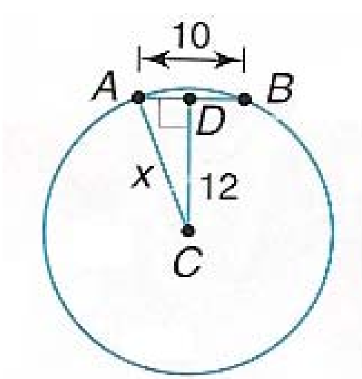


Solución:

Dibujar los radios $\overline{SH}$ y $\overline{SR}$. Como $\overline{SB} \perp \overline{IR}$, por el teorema anterior se tiene que $BR = 24$. También los ΔSAH y ΔSBR son rectángulos. Luego, dado que las cuerdas son equidistantes del centro, se tiene que $\overline{SB} = \overline{SA}$ y por ser radios del mismo círculo se tiene también que $\overline{SR} = \overline{SH}$, por lo que se puede afirmar que $\Delta SAH \cong \Delta SBR$. Entonces $\overline{AH} = \overline{BR}$ y como $BR = 24$ será que $AH = 24$.

3.- ***Teorema #3:*** En un círculo, o en círculos congruentes, dos cuerdas son congruentes solamente si ellas son equidistantes del centro.

Ejemplo #1*:* Suponga que la cuerda de un círculo tiene una longitud de 10 centímetros y dista 12 centímetros del centro del círculo. Encontrar la longitud del radio del círculo.



Solución: En el $\odot C$ se tiene que $AB = 10; CD = 12$ y $\overline{AC}$ es el radio del círculo. Ya que el ΔADC es rectángulo, se utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar el radio x.

$$(AD)^2 + 12^2 = x^2$$

$$5^2 + 12^2 = x^2$$

$$25 + 144 = x^2$$

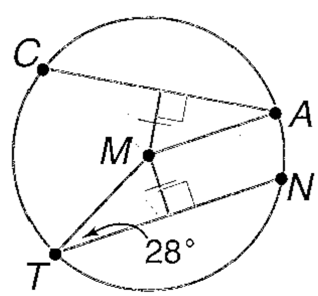
$$169 = x^2$$

$$x = 13$$

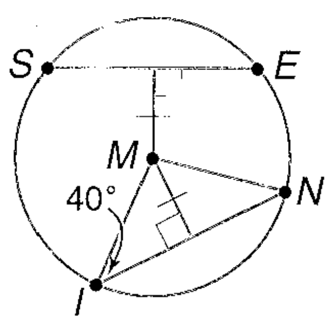
PROBLEMAS:

1.- En cada uno de los siguientes círculos de centro ***M*** encontrar las medidas indicadas:

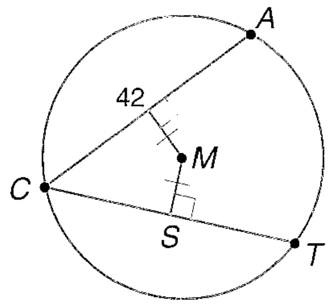
(a) $m\angle CAM =$



(b) $m\overset{\frown}{SE} =$

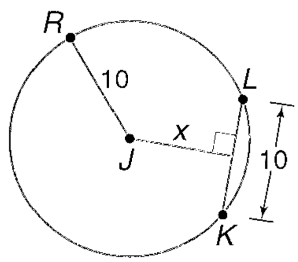


(c) *CS*

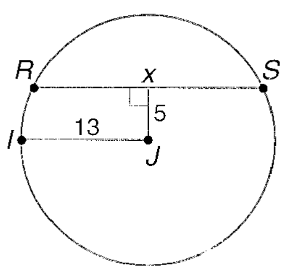


2.- En cada figura ***J*** es el centro del círculo. Encontrar ***x.***

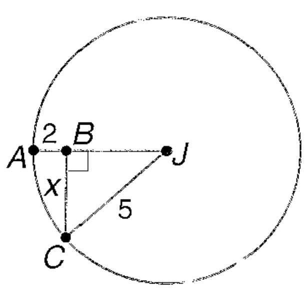
(a)



(b)

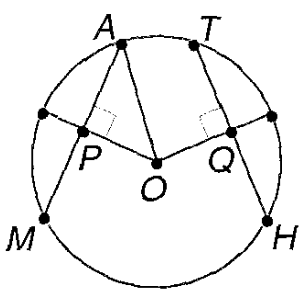


(c)

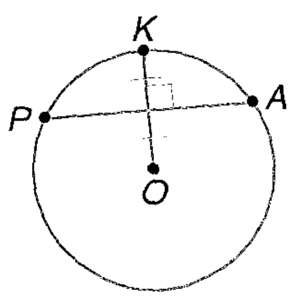


3.- En el $\odot O$, encontrar $\boldsymbol{OA}$ dado que :

$$\overline{MA} = \overline{TH}$$
$$MA = 8x + 4$$
$$TH = 12$$
$$OQ = x^2$$



4.- Si $\overline{PA}$ es una recta perpendicular al radio $\overline{OK}$ y que lo divide en dos partes iguales, y si $OK = 16$, encontrar $\boldsymbol{AP}$.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 12– El círculo, ángulos inscritos.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

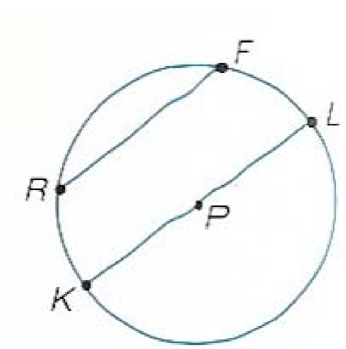
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que distan la misma distancia de un punto definido de ese mismo plano. La distancia se designa como radio, $\boldsymbol{r}$, y el punto como centro de la circunferencia. Un circulo, es el área interior a la circunferencia. Normalmente una circunferencia o un círculo se designan por el centro, por ejemplo, en la gráfica que sigue como $\odot P$.

Cuerdas: Tanto $\overline{RF}$ como $\overline{KL}$ son cuerdas del $\odot P$. Una cuerda es un segmento que tiene sus puntos extremos en la circunferencia.

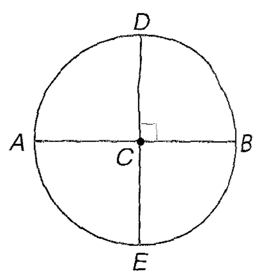


Diámetro: En la gráfica anterior $\overline{KL}$ es el diámetro, $\boldsymbol{d}$, de $\odot P$; o sea, que un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo, que pasa por el centro. Se debe notar que tanto $\overline{PK}$ como $\overline{PL}$ son radios del círculo y son, ambos exactamente la mitad del diámetro. Entonces, podemos escribir que: $r = \frac{1}{2}d$.

Longitud de la circunferencia: $C = 2\pi r = \pi d$

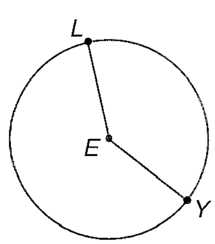
Area del círculo: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

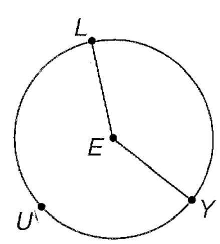
Angulo central: Aquel que tiene como vértice el centro de la circunferencia, como se ve en la gráfica de abajo, donde sus lados cortan la circunferencia. Entonces, los ángulos $\angle DCB$; $\angle DCA$; $\angle ACE$ y $\angle ECB$ son ejemplos de ángulos centrales, siendo todos iguales a 90°. Un ángulo central puede tener cualquier valor, además de 90°.



Suma de ángulos centrales: La suma de los ángulos centrales de un círculo, sin puntos interiores en común, es igual a 360°.
Arcos: Son medidos por la medida de sus ángulos centrales correspondientes.

Arco menor y arco mayor: En la gráfica siguiente se denomina ***arco menor*** al arco $\overset{\frown}{LY}$ el cual está conformado por el corte de los lados del ángulo central $\angle LEY$ con la circunferencia. Por otro lado se llama ***arco mayor del ángulo central*** $\angle LEY$ al arco $\overset{\frown}{LUY}$; o sea, que la dimensión de un arco menor es la medida de su ángulo central correspondiente y la dimensión de un arco mayor para el mismo ángulo central es 360° menos el arco menor.





Semicírculo: Es la porción de círculo correspondiente a 180°.

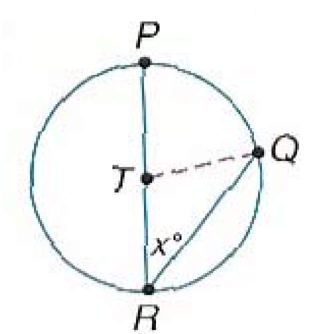
Adición de arcos: La medida de un arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos; o sea, que se cumple que: $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{PQR}$

TEOREMAS RELATIVOS A ANGULOS INSCRITOS:

1.- ***Teorema #1***: Si un ángulo está inscrito en un círculo, entonces la medida de ese ángulo es igual a la mitad de la medida de su correspondiente arco interceptado.

Prueba del teorema: Existen tres casos a considerar en la prueba de este teorema:

(a) El centro del círculo yace en uno de los lados del ángulo
(b) El centro del círculo yace en el interior del ángulo
(c) El centro del círculo yace en el exterior del ángulo.

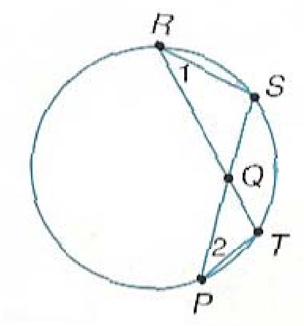


Dado el ángulo $\angle PRQ$ inscrito en $\odot T$ y dado que $\overline{PR}$ contiene a T, probar que es verdad que: $m\angle PRQ = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{PQ}$

Se debe dibujar el radio $\overline{TQ}$ y se hace $m\angle PRQ = x$. Al ser el $\angle PTQ$ un ángulo central, se puede afirmar que $m\overset{\frown}{PQ} = m\angle PTQ$. Como $\overline{TQ}$ y $\overline{TR}$ son radios, el ΔTQR es isósceles y $m\angle TQR = x$; por lo que utilizando el teorema del ángulo exterior de un ángulo de un triángulo se puede escribir que $m\angle PTQ = 2x$ y como consecuencia de ello $m\overset{\frown}{PQ} = 2x$ y $m\angle PRQ = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{PQ}$.

2.- ***Teorema #2***: Si dos ángulos inscritos de un círculo o de círculos congruentes interceptan arcos congruentes o el mismo arco, entonces los ángulos son congruentes.

Ejemplo #1: En el círculo mostrado abajo, $m\overset{\frown}{ST} = 68°$. Encontrar $m\angle 1$ y $m\angle 2$.



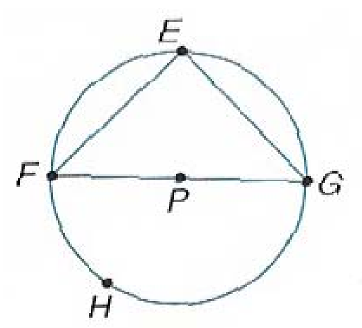
Solución: Como $\overset{\frown}{ST}$ es el arco de intercepción para ambos, $\angle 1$ y $\angle 2$, se aplica el teorema anterior, como sigue:

$$m\angle 1 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{ST}; m\angle 2 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{ST}$$

$$m\angle 1 = m\angle 2 = \frac{1}{2}(68) = 34°$$

3.- ***Teorema #3***: Si un ángulo inscrito de un círculo intercepta un semicírculo, entonces el ángulo es un ángulo recto.

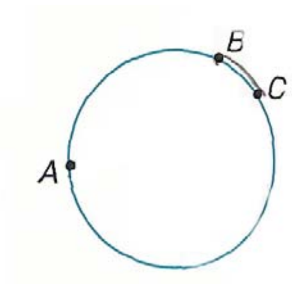
Suponer que un ángulo inscrito intercepta un semicírculo en $\odot P$. La medida del semicírculo $FHG = 180°$, de tal manera que aplicando el teorema #1 la medida $m\angle FEG = 90°$.



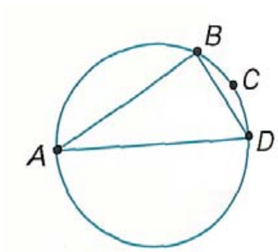
Ejemplo de construcción: Encontrar el centro de un círculo dados tres puntos del mismo:

Este problema hay dos maneras de hacerlo. Una es como se explica a continuación y otro es encontrar las dos cuerdas de los puntos dados, construir las mediatrices y donde se corten éstas ese es el centro del círculo. Describiremos ahora el primer método:

1.- Dibuje un círculo cualquiera y localice tres puntos ***A***, ***B*** y ***C*** en él:

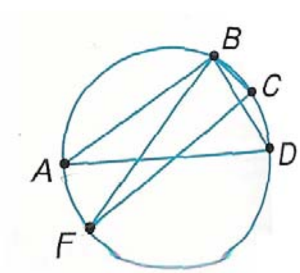


2.- Dibuje $\overline{AB}$ y luego construya un segmento que pase por ***B*** y que sea perpendicular a $\overline{AB}$ y llame este nuevo segmento $\overline{BD}$.



Dibuje luego $\overline{AD}$ y como $\overline{BD} \perp \overline{AB}$, necesariamente la $m\angle ABD = 90°$ y el arco que éste ángulo intercepta tiene una medida de 180°. Esto significa que $\overline{AD}$ es un diámetro.

3.- Dibuje $\overline{BC}$ y construya un segmento a través de ***B*** que sea perpendicular a $\overline{BC}$, designándolo como $\overline{BF}$. Dibuje ahora $\overline{CF}$. Como $m\angle FBC = 90°$, $\overline{CF}$ será también un diámetro.

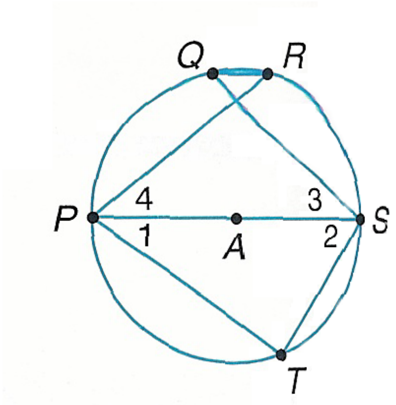


Conclusión: El punto que todos los diámetros tienen en común es el centro del círculo. Entonces, la intercepción de los diámetros $\overline{AD}$ y $\overline{CF}$ es el centro del círculo.

Ejemplo #2: En el $\odot A$, se encuentra la siguiente información:

$$m\angle 1 = 6x + 11; m\angle 2 = 9x + 19; m\angle 3 = 4y - 25;$$

$$m\angle 4 = 3y - 9; \overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{RS}$$



Encontrar: $m\angle 1; m\angle 2; m\angle 3; m\angle 4$.

Solución:

Como el $\angle PTS$ es inscrito en un semicírculo, el ángulo $\angle T$ debe ser necesariamente un ángulo recto; por lo consiguiente, el ΔPTS es un triángulo rectángulo y los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, por lo que podemos escribir:

$$\angle 1 + \angle 2 = 90°$$

$$6x + 11 + 9x + 19 = 90° \Rightarrow 15x + 30 = 90°$$

$$x = 4°$$

Entonces, se encuentra que los valores de:

$$m\angle 1 = 6(4) + 11 = 35°$$

$$m\angle 2 = 9(4) + 19 = 55°$$

Luego, como $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{RS}$; los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ interceptan arcos congruentes, por lo que se cumple que: $m\angle 3 = m\angle 4$. Entonces:

$$4y - 25 = 3y - 9$$

$$y = 16$$

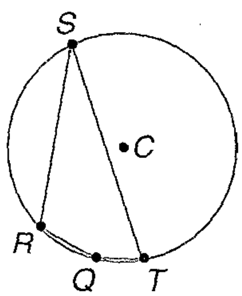
Por lo consiguiente:

$$m\angle 3 = 4(16) - 25 = 39°$$

$$m\angle 4 = 3(16) - 9 = 39°$$

4.- ***Teorema #4***: Si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios.

Ejemplo #3: El cuadrilátero $QRST$ está inscrito en $\odot C$. Si se dan los datos siguientes: $m\angle S = 28°; m\angle R = 110°$, encontrar $m\angle Q$ y $m\angle T$.



Aplicando los teoremas vistos anteriormente en esta guía, tenemos que:

$$m\angle S = \frac{1}{2} m\overparen{RQT}$$

$$28° = \frac{1}{2} m\overparen{RQT}$$

$$56° = m\overparen{RQT}$$

$m\overparen{RST} = 360° - 56° = 304°$. Luego, como el ángulo $\angle Q$ intercepta el arco $\overparen{RST}$:

$$m\angle Q = \frac{1}{2} m\overparen{RST} = \frac{1}{2}(304) = 152°$$

Para encontrar $m\angle T$ se utilizará una estrategia similar:

$$m\angle R = \frac{1}{2} m\overparen{STQ}$$

$$110° = \frac{1}{2} m\overparen{STQ}$$

$$220° = m\overparen{STQ}$$

También:

$$m\overset{\frown}{QRS} = 360° - 220° = 140°$$

Como el ángulo $\angle T$ intercepta al arco $\overset{\frown}{QRS}$, se puede escribir:

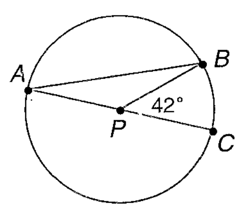
$$m\angle T = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{QRS} = \frac{1}{2}(140) = 70°$$

Dados los resultados de este ejemplo se puede ver que los ángulos $\angle R$ y $\angle T$ son opuestos y suplementarios (suman 180°). Igualmente sucede con los ángulos $\angle Q$ y $\angle S$.

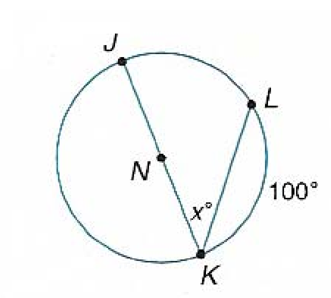
PROBLEMAS:

1.- En $\odot P$, $\overline{AC}$ es un diámetro:

(a) Nombre el ángulo inscrito.
(b) Nombre el arco interceptado por el $\angle BAC$.
(c) Si $m\angle BPC = 42°$, encontrar $m\angle BAC$.

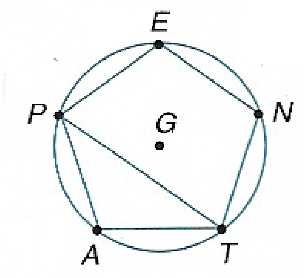


2.- En $\odot N$ encontrar x.



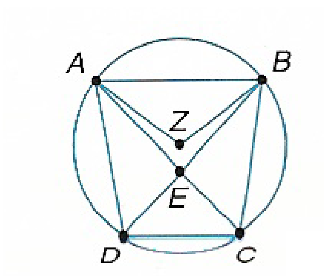
3.- El pentágono ***PENTA*** está inscrito en $\odot G$. Todos los lados del pentágono ***PENTA*** son congruentes. Encontrar cada medida:

(a) $m\overset{\frown}{PE}$
(b) $m\angle BAC$
© $m\angle PEN$.

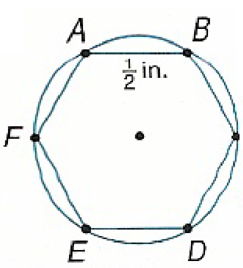


4.- En $\odot Z$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}; m\overset{\frown}{BC} = 94°; m\angle AZB = 104°$. Encontrar cada medida:

(a) $m\overset{\frown}{AB} =$
(b) $m\angle BAC =$
© $m\angle ADB =$



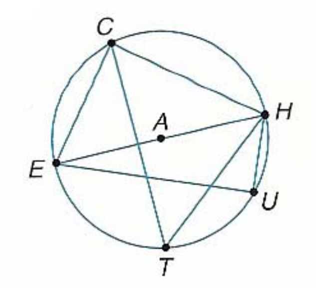
5.- Que diámetro de cabilla de acero redonda debe ser utilizado para cortar tuercas hexagonales cuyas caras tengan 0,5 pulgadas de longitud?



6.- En $\odot A$, $\overline{HE}$ es un diámetro.

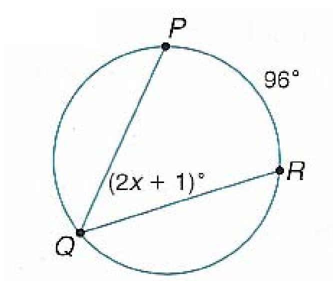
(De la gráfica en la página siguiente)

(a) Nombrar el arco interceptado por el $\angle HTC$.
(b) Si $m\angle HTC = 52°$, encontrar $m\overset{\frown}{CH}$.
(c) Nombrar el arco interceptado por $\angle TCH$.
(d) Encontrar $m\angle ECH$.
(e) Si $m\angle HTC = 52°$, encontrar $m\angle CEH$.

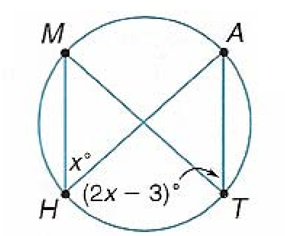


7.- En cada figura, encontrar el valor de ***x:***

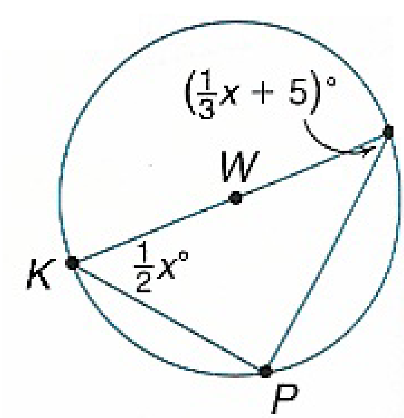
(a)



(b)



(c)

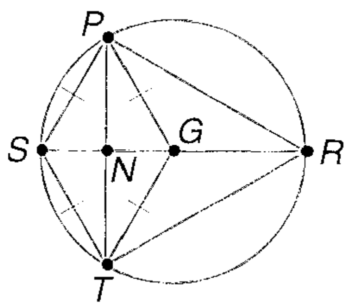


8.- El cuadrilátero ***SPRT*** está inscrito en $\odot G$ y la figura ***PGTS*** es un rombo. Si:

$m\angle PRS = (-2x+42)°$

$m\angle SRT = (8x-18)°$

Encontrar cada medida:



(a) $m\overset{\frown}{PS} =$

(b) $m\overset{\frown}{ST} =$

© $m\angle RST =$

(d) $m\angle PGR =$

(e) $m\overset{\frown}{PR} =$

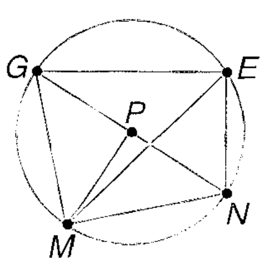
(f) $m\overset{\frown}{PSR} =$

(g) $m\angle PNG =$

(h) $m\overset{\frown}{PRT} =$

(i) $m\angle PSR =$

9.- En el $\odot P$, $\overset{\frown}{EN} = 66°; m\angle GPM = 89°$ y $\overline{GN}$ es un diámetro. Encontrar cada medida:



(a) $m\overset{\frown}{GM} =$

(b) $m\overset{\frown}{NM} =$

© $m\overset{\frown}{GE} =$

(d) $m\angle GEN =$

(e) $m\angle EGN =$

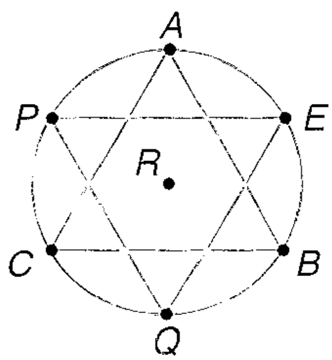
(f) $m\angle EMN =$

(g) $m\angle GNM =$

(h) $m\angle GME =$

(i) $m\angle EGM =$

10.- El triángulo equilátero PEQ está inscrito en $\odot R$. El punto ***A*** bisecta al arco $\overset{\frown}{PE}$, el punto ***B*** bisecta al arco $\overset{\frown}{EQ}$ y el punto ***C*** bisecta al arco $\overset{\frown}{PQ}$. Explique que hay acerca del ΔABC.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 13– El círculo, ángulos internos y externos, secantes y tangentes.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

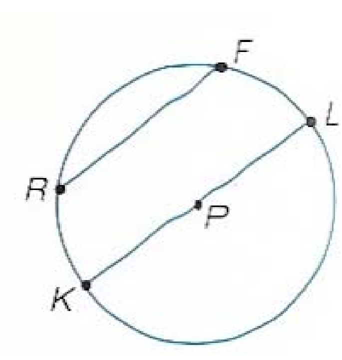
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

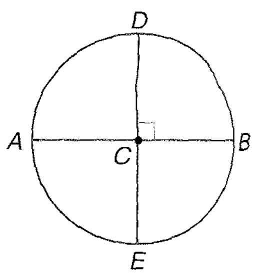
Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que distan la misma distancia de un punto definido de ese mismo plano. La distancia se designa como radio, $\boldsymbol{r}$, y el punto como centro de la circunferencia. Un circulo, es el área interior a la circunferencia. Normalmente una circunferencia o un círculo se designan por el centro, por ejemplo, en la gráfica que sigue como $\odot P$.

Cuerdas: Tanto $\overline{RF}$ como $\overline{KL}$ son cuerdas del $\odot P$. Una cuerda es un segmento que tiene sus puntos extremos en la circunferencia.

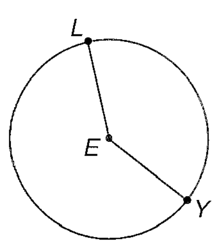


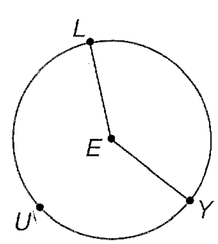
Diámetro: En la gráfica anterior $\overline{KL}$ es el diámetro, $\boldsymbol{d}$, de $\odot P$; o sea, que un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo, que pasa por el centro. Se debe notar que tanto $\overline{PK}$ como $\overline{PL}$ son radios del círculo y son, ambos exactamente la mitad del diámetro. Entonces, podemos escribir que: $r = \frac{1}{2}d$.

Angulo central: Aquel que tiene como vértice el centro de la circunferencia, como se ve en la gráfica de abajo, donde sus lados cortan la circunferencia. Entonces, los ángulos $\angle DCB$; $\angle DCA$; $\angle ACE$ y $\angle ECB$ son ejemplos de ángulos centrales, siendo todos iguales a 90°. Un ángulo central puede tener cualquier valor, además de 90°.



Suma de ángulos centrales: La suma de los ángulos centrales de un círculo, sin puntos interiores en común, es igual a 360°.
Arcos: Son medidos por la medida de sus ángulos centrales correspondientes.
Arco menor y arco mayor: En la gráfica siguiente se denomina ***arco menor*** al arco $\overset{\frown}{LY}$ el cual está conformado por el corte de los lados del ángulo central $\angle LEY$ con la circunferencia. Por otro lado se llama ***arco mayor del ángulo central*** $\angle LEY$ al arco $\overset{\frown}{LUY}$; o sea, que la dimensión de un arco menor es la medida de su ángulo central correspondiente y la dimensión de un arco mayor para el mismo ángulo central es 360° menos el arco menor.



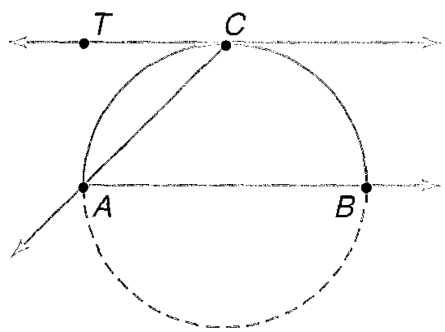


Semicírculo: Es la porción de círculo correspondiente a 180°.

Adición de arcos: La medida de un arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos; o sea, que se cumple que: $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{PQR}$

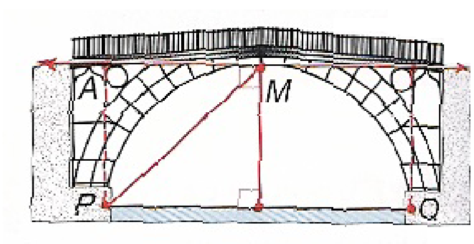
TEOREMAS:

Teorema #1: Si una secante y una tangente se interceptan en el punto de tangencia en el círculo, entonces la medida de cada ángulo formado es la mitad de la medida del arco interceptado.



$$m\angle TCA = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{CA}$$

Ejemplo #1: El puente ***Darby*** fue construido en 1779 cerca de ***Coalbrookdale, Londres***. Si el arco del puente es un semicírculo, y si ***M*** es el punto medio del semicírculo y además es el punto de tangencia, encontrar $m\angle AMP$.



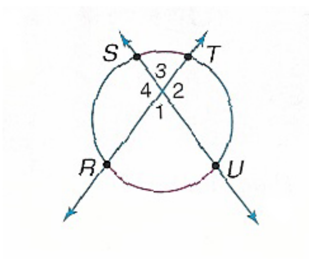
Solución:

Como el arco $\overset{\frown}{PMQ}$ es un semicírculo y ***M*** es su punto medio, entonces se puede decir que $m\overset{\frown}{PM} = 90°$ y por el teorema anterior:

$$m\angle AMP = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(90°) = 45°$$

Teorema #2: Si dos secantes se interceptan en el interior de un círculo, entonces la medida del ángulo formado es igual a la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados.

En el círculo mostrado abajo, se interceptan dos secantes dentro del círculo, y por el teorema anterior se podrá escribir lo siguiente:



$$m\angle 1 = \frac{1}{2}\left(m\overset{\frown}{RU} + m\overset{\frown}{ST}\right)$$

$$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{TU} + m\overset{\frown}{RS})$$

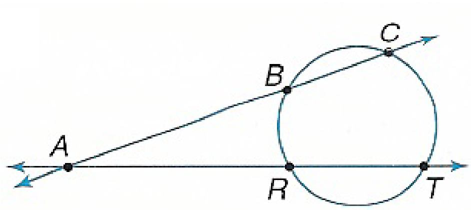
Como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, también se puede escribir:

$$m\angle 1 = m\angle 3 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{RU} + m\overset{\frown}{ST})$$

$$m\angle 2 = m\angle 4 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{TU} + m\overset{\frown}{RS})$$

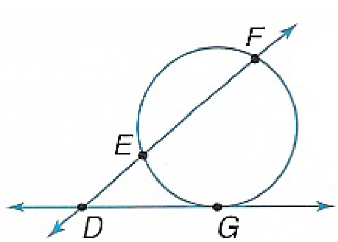
Teorema #3: Si dos secantes, una secante y una tangente, o dos tangentes se interceptan en el exterior de un círculo, entonces la medida del ángulo exterior formado es la mitad de la diferencia positiva de las medidas de los arcos interceptados.

Caso #1: Dos secantes.



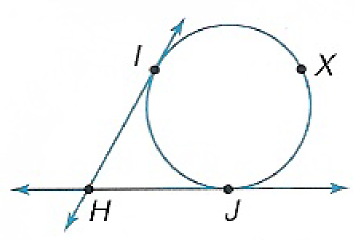
$$m\angle CAT = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{CT} - m\overset{\frown}{BR})$$

Caso #2: Una secante y una tangente:



$$m\angle FDG = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FG} - \overset{\frown}{EG})$$

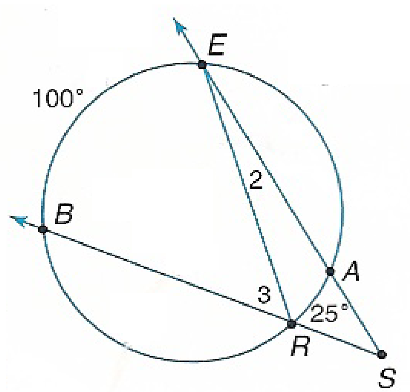
Caso #3: Dos tangentes:



$m\angle IHJ = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{IXJ} - \overset{\frown}{IJ})$

También se pueden utilizar ángulos inscritos para encontrar la medida de un ángulo formado por dos secantes que se interceptan fuera del círculo, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo #2: Si el $m\overset{\frown}{BE} = 100°$ y $m\overset{\frown}{AR} = 25°$, encontrar $m\angle S$.



Solución:

Los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ son ángulos inscritos en el círculo dado, de manera tal, que se puede escribir:

$$m\angle 2 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AR}$$

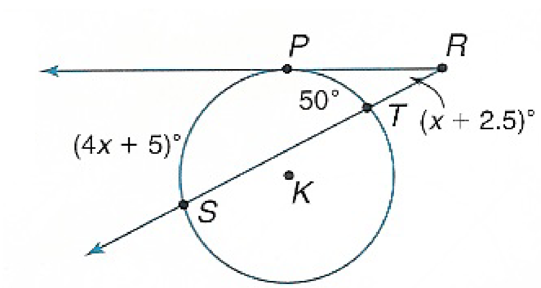
$$m\angle 3 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BE}$$

Ahora, recordando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° y que el ángulo $\angle 3$ y el ángulo $\angle R$, interno del triángulo ΔERS, son suplementarios, se puede asegurar entonces que $m\angle 3 = m\angle S + m\angle 2$. Sustituyendo por sus equivalentes en medidas de arcos, tenemos $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{BE} = m\angle S + \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AR}$.

Luego, sustituyendo por los valores dados en el enunciado del problema:

$$\frac{1}{2}(100°) = m\angle S + \frac{1}{2}(25°)$$
$$50° = m\angle S + 12,5°$$
$$m\angle S = 37,5°$$

Ejemplo #3: Utilice la gráfica de $\odot K$ para encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$.

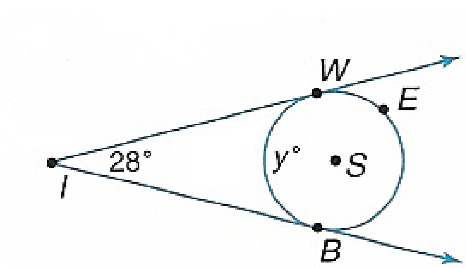


Solución:

El $\angle R$ es formado por una secante y una tangente.

$$m\angle R = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{PS} - m\overset{\frown}{PT})$$
$$x + 2,5 = \frac{1}{2}[(4x+5) - 50] =$$
$$x + 2,5 = \frac{1}{2}(4x - 45)$$
$$x + 2,5 = 2x - 22,5$$
$$x = 25°$$

Ejemplo #4: Use la gráfica del $\odot S$ para encontrar el valor de $\boldsymbol{y}$.

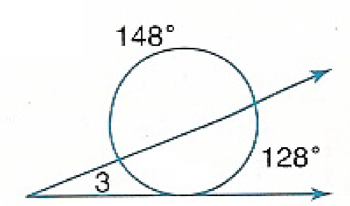


Solución: El ángulo $\angle I$ está formado por dos tangentes, por tanto, si $m\overset{\frown}{WB} = y$, entonces, $m\overset{\frown}{WEB} = 360° - y$. Luego, en base al teorema anterior, se puede escribir que:

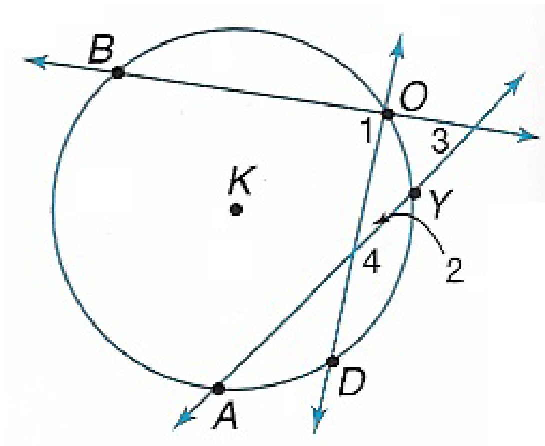
$$m\angle I = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{WEB} - m\overset{\frown}{WB}) =$$
$$28° = \frac{1}{2}[(360° - y) - y] =$$
$$28° = \frac{1}{2}(360° - 2y) = 180° - y$$
$$y = 152°$$

PROBLEMAS:

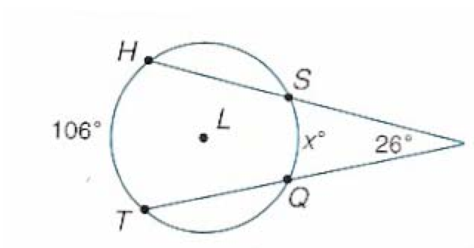
1.- Encontrar la medida del ángulo $\angle 3$.



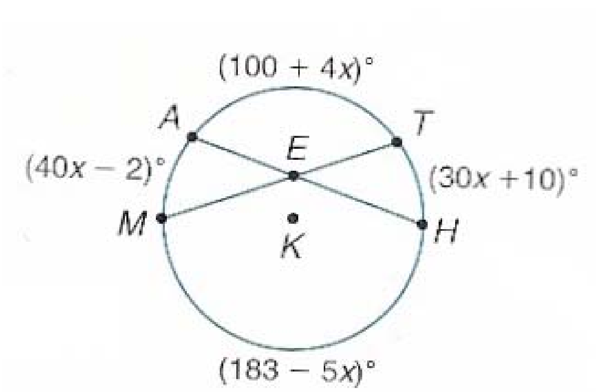
2.- En $\odot K$, se tienen los siguientes datos:
$m\overset{\frown}{OB} = 98°; m\overset{\frown}{OY} = 28°; m\overset{\frown}{YD} = 62°; m\overset{\frown}{DA} = 38°$. Encontrar cada medida:



3.- Dado el $\odot L$, encontrar el valor de ***x.***

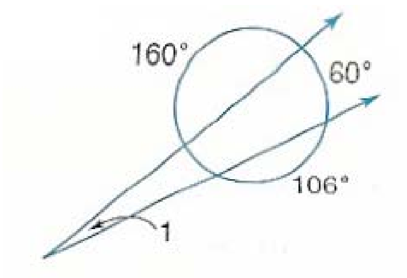


4.- En el $\odot K$, encontrar el valor de ***x*** y $m\angle AET$.

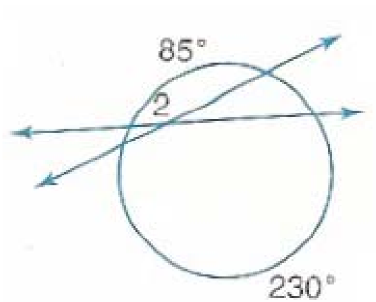


5.- Encontrar en cada caso la medida de cada ángulo designado por un número.

(a)

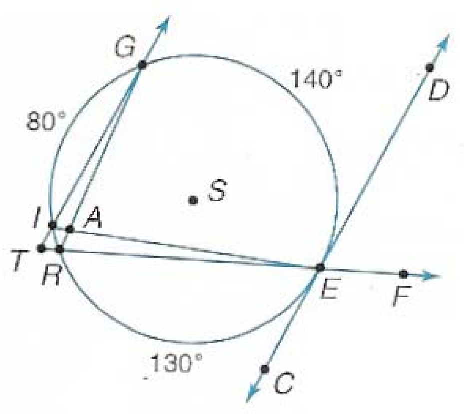


(b)



(c) $\overline{CE}$ es tangente a $\odot S$ en $\boldsymbol{E}$. y también se dan los siguientes datos:

$m\overset{\frown}{IG} = 80°; m\overset{\frown}{GE} = 140°; m\overset{\frown}{ER} = 130°$. Encontrar cada medida:



(a) $m\angle GRE =$ (b) $m\overset{\frown}{IR} =$ (c) $m\angle T =$

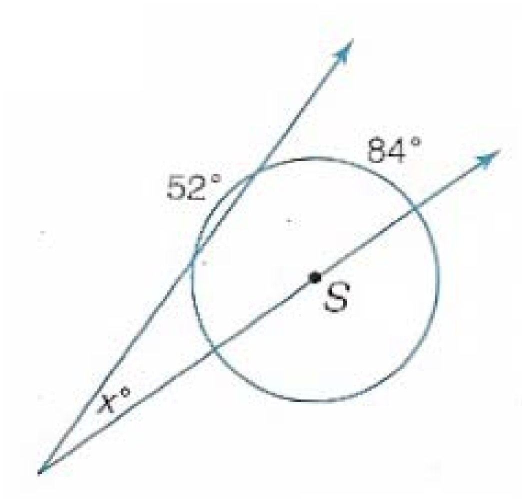
(d) $m\angle GAE =$ (e) $m\angle IEC =$ (f) $m\angle IED =$

(g) $m\angle IGA =$ (h) $m\overset{\frown}{GIE} =$ (i) $m\angle IAG =$

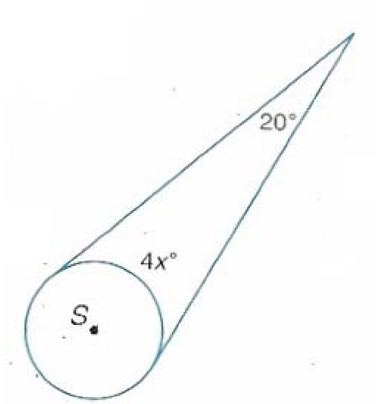
(j) $m\angle TIE =$ (k) $m\angle CER =$ (l) $m\angle DEF =$

6.- Dado el $\odot S$, encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ en cada caso***:***

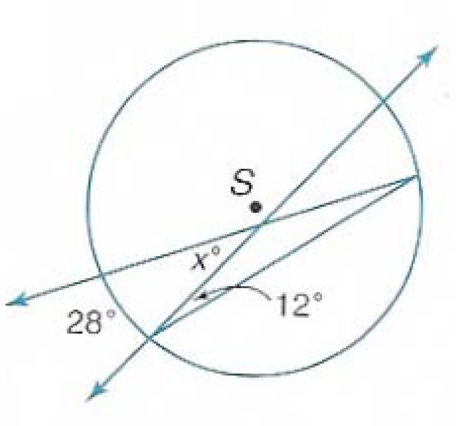
(a)



(b)

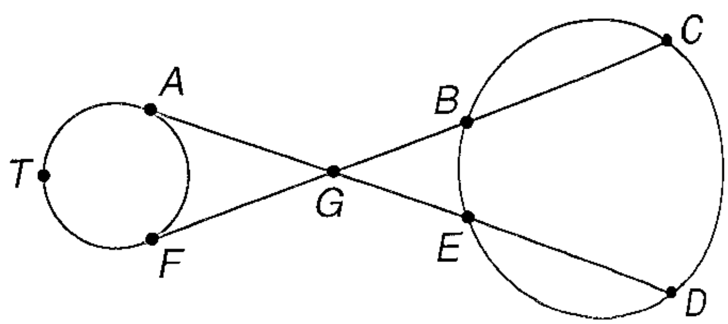


(c)



7.- Encontrar $m\overset{\frown}{AF}$ en la figura de abajo si se cumple que:

$$m\overset{\frown}{CD} = 116°; m\overset{\frown}{BE} = 38°; m\overset{\frown}{ATF} = 219°$$



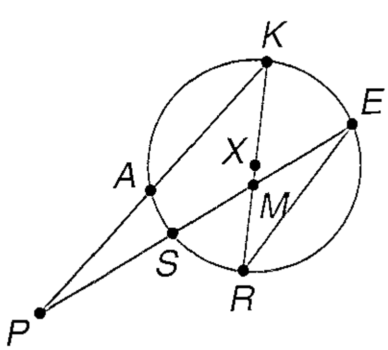
8.- En $\odot X$ se dan los siguientes datos::

$m\overset{\frown}{AK} = 108°; m\overset{\frown}{RE} = 118°; m\angle KRE = 30°; m\angle KME = 52°$ .Encontrar cada medida:

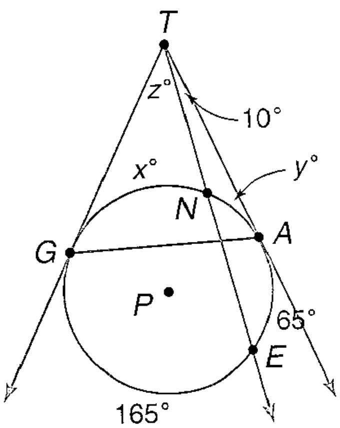
(a) $m\overset{\frown}{SR} =$

(b) $m\overset{\frown}{AS} =$

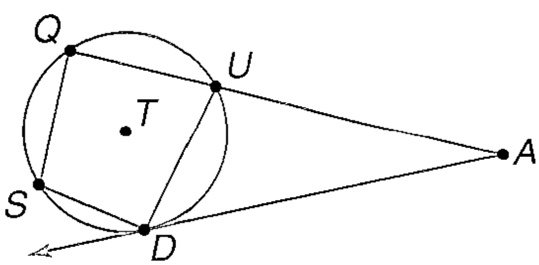
© $m\angle KPE =$



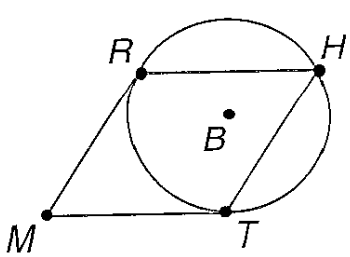
9.- En el $\odot P$, $\overline{TA}$ y $\overline{TG}$ son tangentes al círculo. Encontrar los valores de ***x, y***, ***z.***



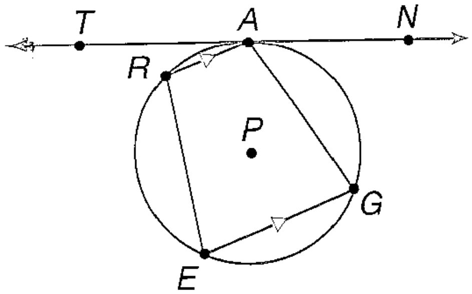
10.- En $\odot T$ se dan los siguientes datos: $m\overset{\frown}{UD} = 106°; m\overset{\frown}{QU} = 96°; m\angle Q = 92°$. Encontrar $m\angle A$.



11.- En el $\odot B$, $\overline{MR}$ y $\overline{MT}$ son tangentes al círculo y ***HTMR*** es un rombo. Encontrar $m\overset{\frown}{RT}$.



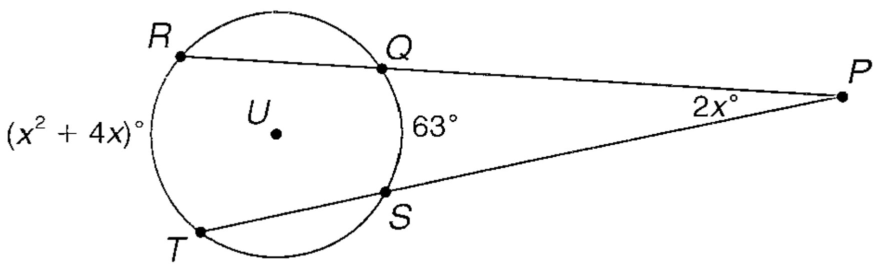
12.- El cuadrilátero ***GERA*** está inscrito en $\odot P$. donde $\overline{TA}$ es tangente al círculo en el punto ***A*** y además: $m\angle REG = 78°; m\overset{\frown}{AR} = 46°; \overline{AR} \cong \overline{GE}$. Encontrar cada medida:



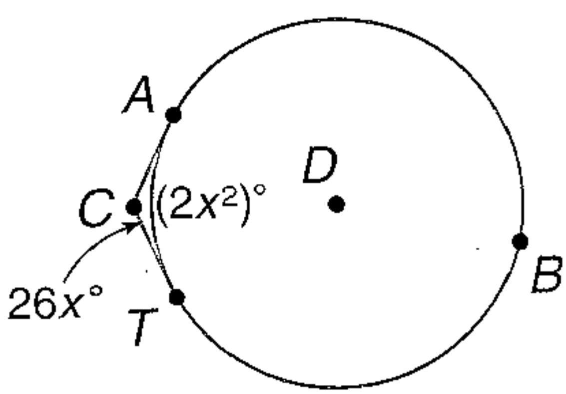
(a) $m\angle GAR =$ (b) $m\overset{\frown}{AG} =$ (c) $m\angle TAR =$

(d) $m\angle GAN =$ (e) $m\overset{\frown}{GE} =$ (f) $m\overset{\frown}{RE} =$

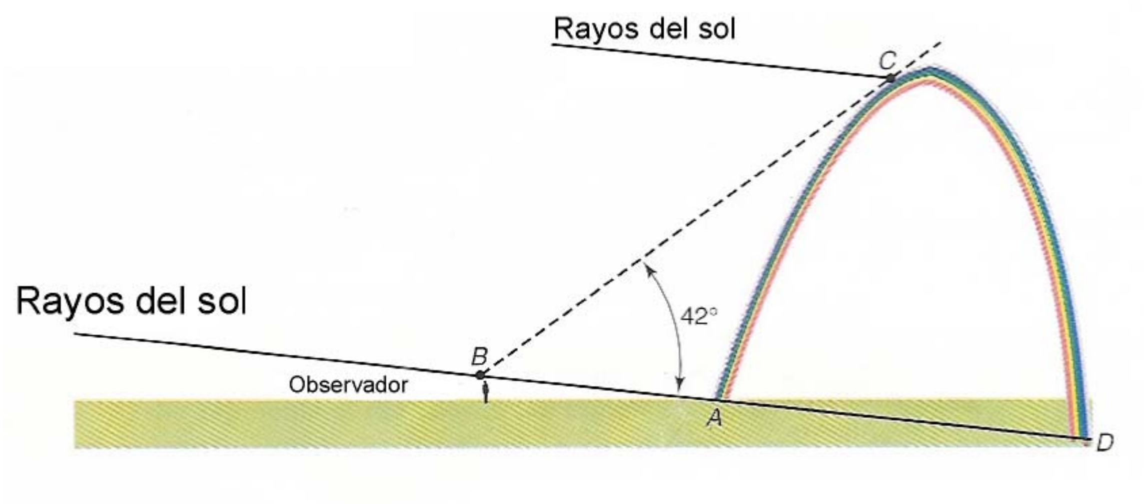
13.- Encontrar los valores de $\boldsymbol{x}$ y de $m\angle P$ en $\odot U$.



14.- Encontrar los valores de $\boldsymbol{x}$ y de $m\overset{\frown}{ABT}$ en el $\odot D$.



15.- Cada arco iris es realmente un círculo completo cuyo centro está ubicado en un punto en el espacio directamente opuesto al Sol. La posición de un arco iris en el espacio varía de acuerdo a la posición del observador; pero, el tamaño del ángulo $\angle ABC$ es siempre igual a 42°, como se muestra en el diagrama de abajo. Si $m\overset{\frown}{CD} = 160°$, encontrar la medida de la parte visible del arco iris, o sea: $m\overset{\frown}{AC}$.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 14 – El círculo, segmentos especiales.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

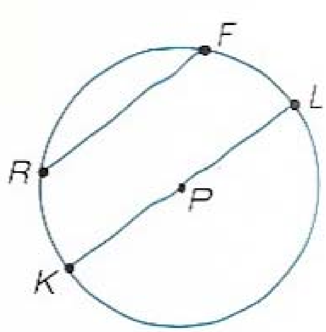
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

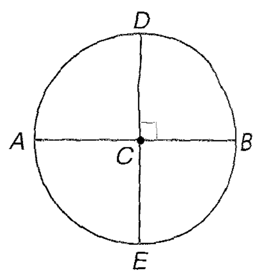
Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que distan la misma distancia de un punto definido de ese mismo plano. La distancia se designa como radio, $\boldsymbol{r}$, y el punto como centro de la circunferencia. Un circulo, es el área interior a la circunferencia. Normalmente una circunferencia o un círculo se designan por el centro, por ejemplo, en la gráfica que sigue como $\odot P$.

Cuerdas: Tanto $\overline{RF}$ como $\overline{KL}$ son cuerdas del $\odot P$. Una cuerda es un segmento que tiene sus puntos extremos en la circunferencia.



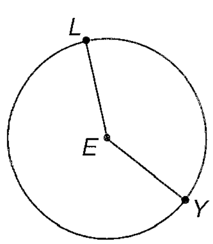
Diámetro: En la gráfica anterior $\overline{KL}$ es el diámetro, $\mathbf{d}$, de $\odot P$; o sea, que un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro del círculo, que pasa por el centro. Se debe notar que tanto $\overline{PK}$ como $\overline{PL}$ son radios del círculo y son, ambos exactamente la mitad del diámetro. Entonces, podemos escribir que: $r = \frac{1}{2}d$.

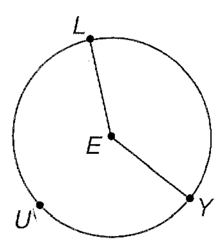
Angulo central: Aquel que tiene como vértice el centro de la circunferencia, como se ve en la gráfica de abajo, donde sus lados cortan la circunferencia. Entonces, los ángulos $\angle DCB$; $\angle DCA$; $\angle ACE$ y $\angle ECB$ son ejemplos de ángulos centrales, siendo todos iguales a 90°. Un ángulo central puede tener cualquier valor, además de 90°.



Suma de ángulos centrales: La suma de los ángulos centrales de un círculo, sin puntos interiores en común, es igual a 360°.
Arcos: Son medidos por la medida de sus ángulos centrales correspondientes.

Arco menor y arco mayor: En la gráfica siguiente se denomina ***arco menor*** al arco $\overset{\frown}{LY}$ el cual está conformado por el corte de los lados del ángulo central $\angle LEY$ con la circunferencia. Por otro lado se llama ***arco mayor del ángulo central*** $\angle LEY$ al arco $\overset{\frown}{LUY}$; o sea, que la dimensión de un arco menor es la medida de su ángulo central correspondiente y la dimensión de un arco mayor para el mismo ángulo central es 360° menos el arco menor.





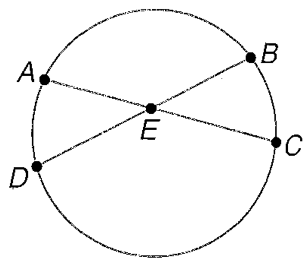
Semicírculo: Es la porción de círculo correspondiente a 180°.

Adición de arcos: La medida de un arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos; o sea, que se cumple que: $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QR} = \overset{\frown}{PQR}$

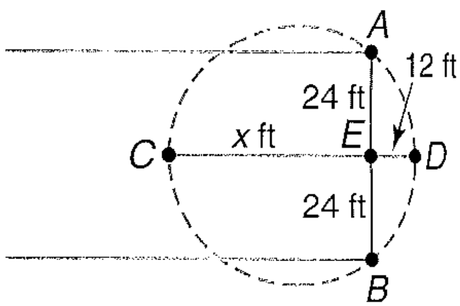
TEOREMAS:

1.- ***Teorema #1:*** Si dos cuerdas se interceptan dentro de un círculo, entonces los productos de las medidas de los segmentos de las cuerdas son iguales.

En el caso mostrado abajo, en el $\odot E$, las dos cuerdas que se interceptan dentro del círculo tienen la siguiente relación: $AE \cdot EC = DE \cdot EB$



Ejemplo #1: Encontrar el radio del arco de círculo mostrado abajo, donde $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, $\overline{AB} = 48(pies)$, $\overline{DE} = 12(pies)$ y E es el punto medio de $\overline{AB}$.



Primero se debe hacer un dibujo esquemático del círculo que se trata de identificar. Luego, se aplica el teorema anterior:

$$DE \cdot EC = AE \cdot EB$$
$$12 \cdot x = 24 \cdot 24$$
$$12x = 576$$
$$x = 48(pies)$$

Para encontrar el radio del círculo, se debe primero encontrar el diámetro, como sigue:

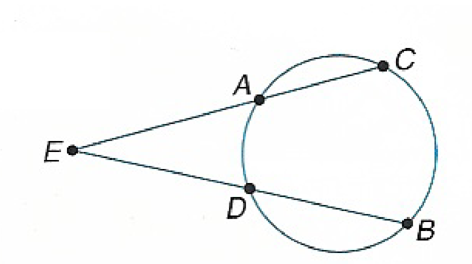
$$DC = DE + EC = 12 + 48 = 60(pies)$$

El radio será entonces **30** (pies).

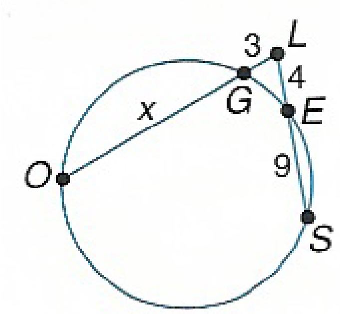
2.- ***Teorema #2***: Si dos segmentos secantes pasan por un círculo, trazadas desde un punto exterior, entonces el producto de las medidas de un segmento secante por la parte externa de ese mismo segmento secante es igual a al producto de las medidas del otro segmento secante por la medida de la parte exterior de este otro segmento secante.

En el caso mostrado abajo, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se extienden fuera del círculo hasta que se interceptan en el punto E, como segmentos secantes. Se puede escribir entonces que:

$$EA \cdot EC = ED \cdot EB$$



Ejemplo #2: Usar la figura de abajo para encontrar el valor de ***OG***.



Hagamos ***OG*** igual a ***x***.

$$LG \cdot LO = LE \cdot LS$$

$$3(x+3) = 4 \cdot 13$$

$$3x + 9 = 52$$

$$3x = 43$$

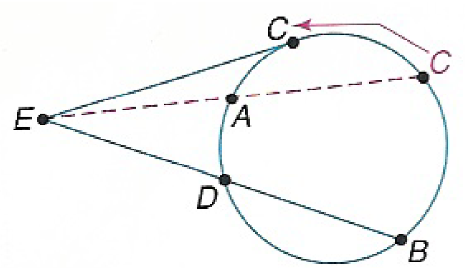
$$x = 14,33$$

3.- ***Teorema #3***: Si desde un punto exterior se trazan un segmento tangente y un segmento secante a un círculo, entonces, el cuadrado de la medida del segmento tangente es igual al producto de la medida del segmento secante por la medida de la parte exterior del mismo segmento secante.

Supongamos que a la secante (*punteada)* de la figura de abajo le es movido su punto ***C*** en sentido contrario a las agujas del reloj hasta que se convierte en la tangente $\overline{EC}$. Esta tangente representa ahora a ambos, la secante completa y el segmento de tangente exterior al círculo, por lo que podemos escribir:

$$EC \cdot EC = ED \cdot EB$$

$$EC^2 = ED \cdot EB$$



Ejemplo #3: En la figura siguiente, $\overline{MA}$ es tangente a $\odot P$. Encontrar el valor de ***x***.

$$(AM)^2 = MB \cdot MC$$

$$10^2 = x(x+6)$$

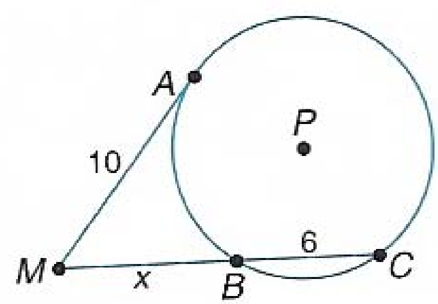
$$100 = x^2 + 6x$$

$$x^2 + 6x - 100 = 0$$

$$x_1 = 7,4; x_2 = -13,4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

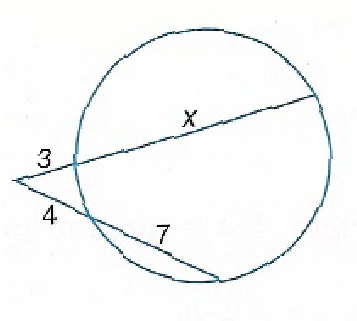
Obviamente se rechaza la solución negativa y se toma solo la positiva, entonces la solución será: $x = 7,4$



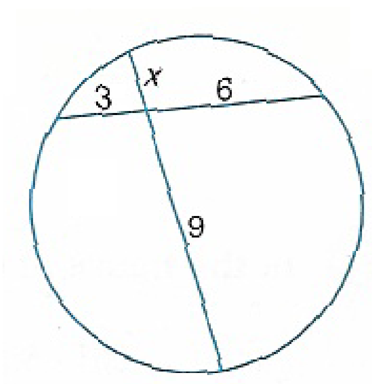
PROBLEMAS:

1.- Encontrar el valor de ***x*** en las gráficas siguientes. Asumir que aquellos segmentos que parecen ser tangentes, son en realidad tangentes:

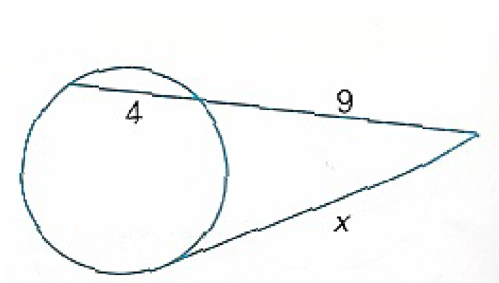
(a)



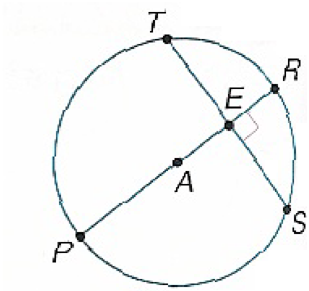
(b)



(c)



2.- En $\odot A$, se tiene que $\overline{TS} \perp \overline{RE}; TS = 10; RE = 3$; encontrar cada medida:



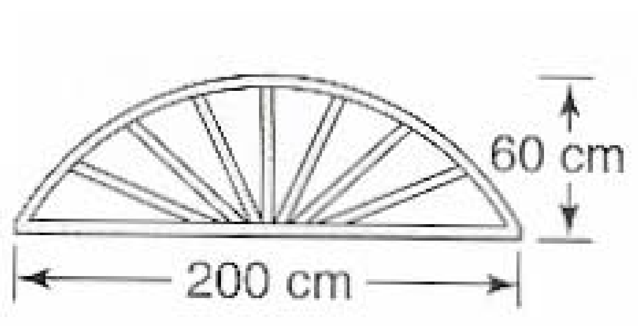
(a) ***TE*** y ***TS***.

(b) ***PE.***

(c) ***PR.***

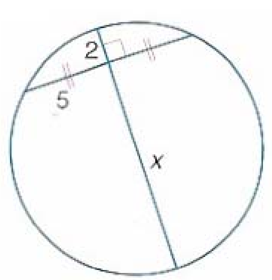
(d) El radio del $\odot A$.

3.- Se trata de un arco de puerta de 200 centímetros de ancho por 60 centímetros de alto. Encontrar el radio del círculo que contiene el arco.

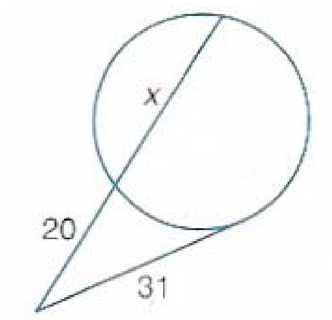


4.- En cada caso, encontrar el valor de ***x.*** Asumir que aquellos segmentos que parecen ser tangentes, son en realidad tangentes:

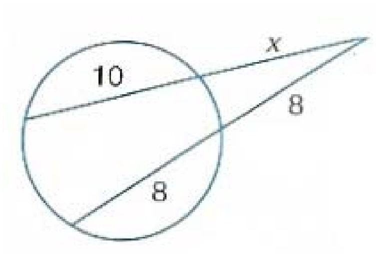
(a)



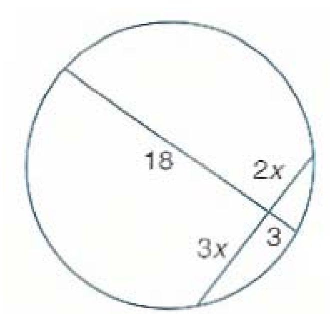
(b)



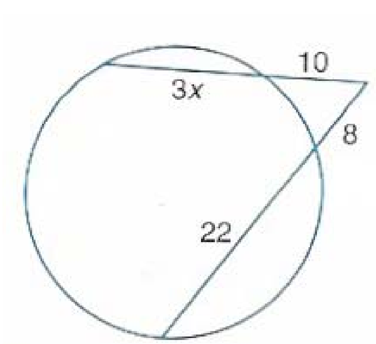
(c)



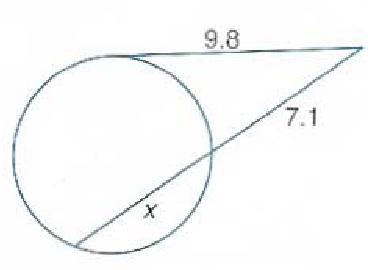
(d)



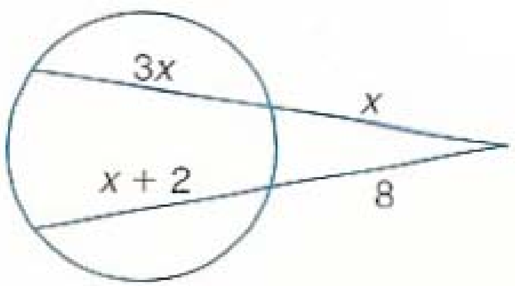
(e)



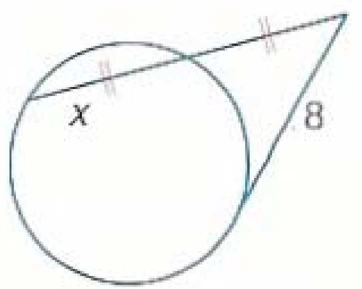
(f)



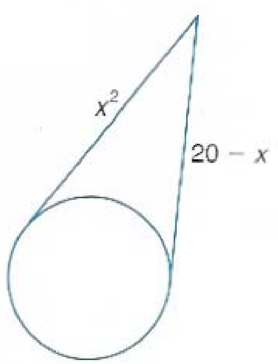
(g)



(h)

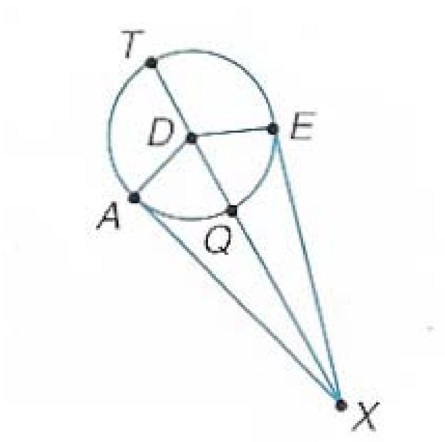


(i)

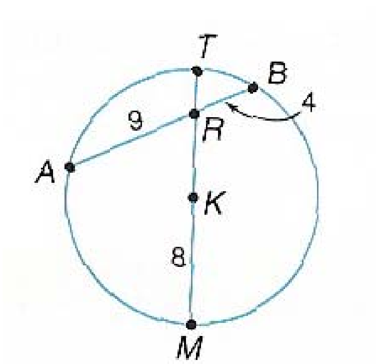


5.- En $\odot D$ tenemos que $EX = 24; DE = 7;$ $\overline{XT}$ es un segmento de secante y $\overline{EX}$ y $\overline{AX}$ son segmentos de tangentes. Encontrar cada medida:

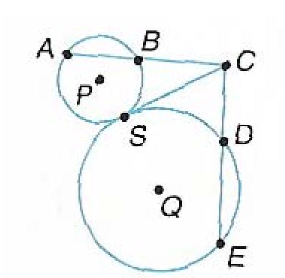
(a) AX ; (b) DX ; (c) QX ; (d) TX



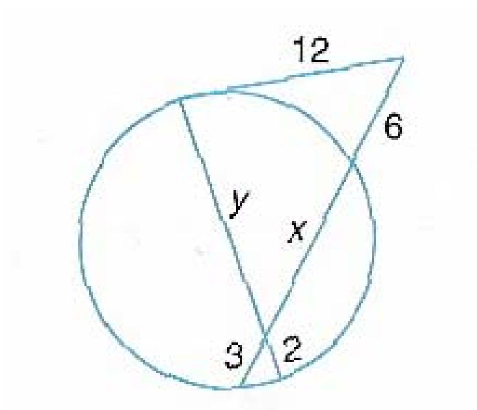
6.- En $\odot K$, encontrar KR.



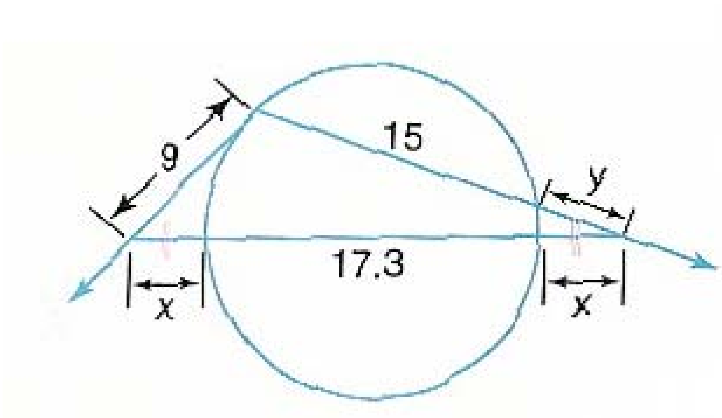
7.- $\odot P$ y $\odot Q$ son tangentes en S. Si se dan los siguientes datos: $AB = 8; CD = 9; BC = 10$, encontrar DE.



8.- Encontrar los valores de ***x*** y de ***y*.**



9.- Encontrar los valores de ***x*** y de ***y***.



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 15- Areas de paralelogramos.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

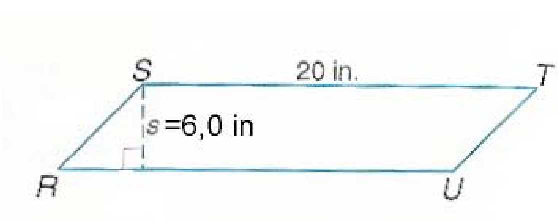
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco teórico:

Teorema #1: Si un paralelogramos tiene una base de $\boldsymbol{b}$ unidades y una altura de $\boldsymbol{h}$ unidades, entonces su área será: $A = b \cdot h$

Ejemplo #1: Encuentre el área del paralelogramo (***romboide***) ***RSTU.***

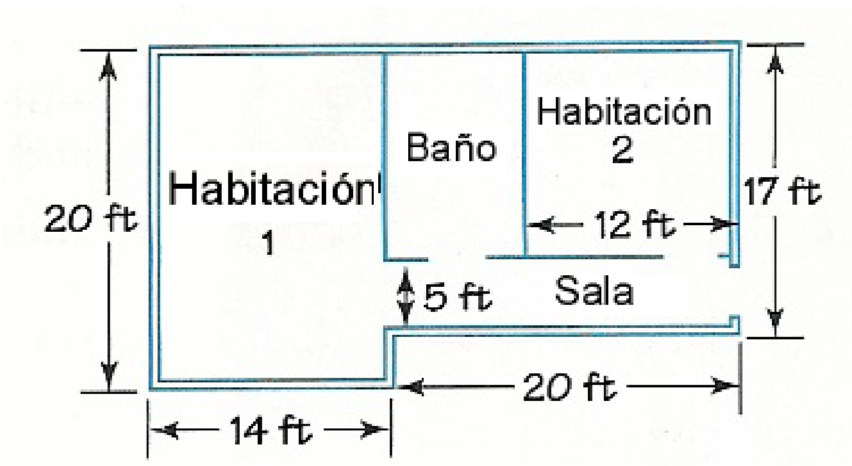


Solución:

Para encontrar el área del paralelogramo, se debe conocer primero las dimensiones de la base y de la altura. , La base, dada en la figura de arriba, mide 20,0 pulgadas de largo. La altura es de 6,0 pulgadas, por lo tanto el área será: $A = 20,0\left(in\right) \cdot 6,0\left(in\right) = 120,0\left(in^2\right)$

Teorema #2: El área de una región en un plano es la suma de las áreas de todas las partes que no están superpuestas.

Ejemplo #2: Se quiere cambiar las alfombras que recubren los pisos de las dos habitaciones y de la sala del apartamento mostrado en la figura de abajo. Encuentre la cantidad de alfombra requerida en pies cuadrados.



Solución:

Area de la habitación #1:

$$Area = l \cdot a = 20 \cdot 14 = 280,0\left(pies^2\right)$$

Area de la habitación #2:

$$Area = l \cdot a = 12\left(17-5\right) = 144,0\left(pies^2\right)$$

Area de la sala:

$$A = l \cdot a = 20 \cdot 5 = 100,0\left(pies^2\right)$$

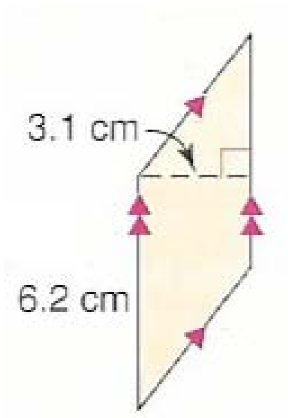
Entonces. El área total que debe ser alfombrada es:

$$Area_T = 280,0 + 144 + 100 = 524,0\left(pies^2\right)$$

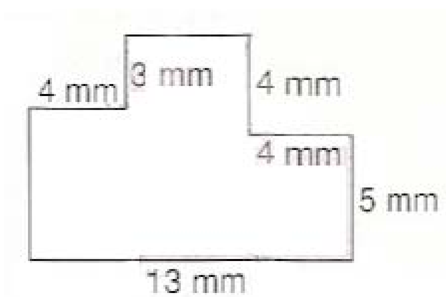
PROBLEMAS:

1.- Encuentre el área de cada figura. Asuma que los ángulos que parecen ser rectos, son en realidad rectos:

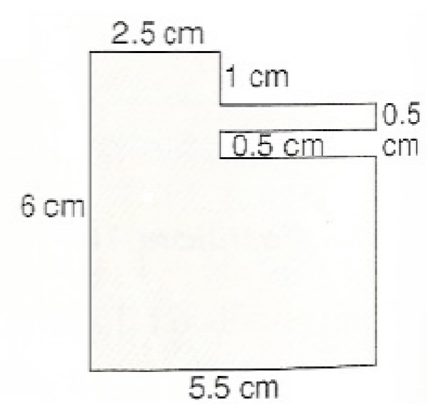
(a)



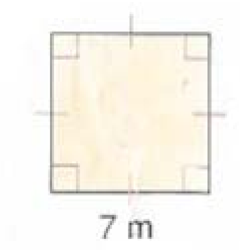
(b)



(c)

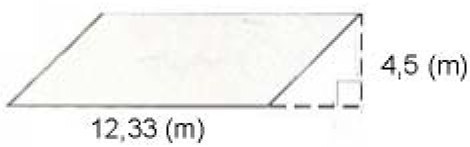


(d)

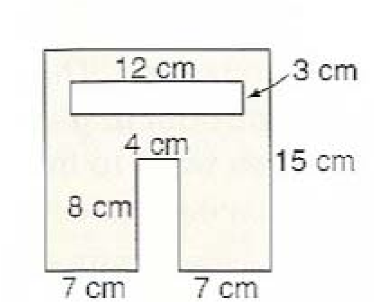


(e)

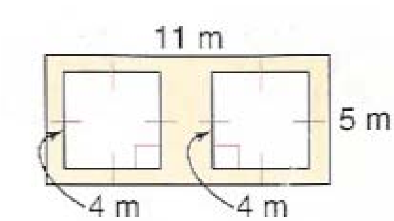
(f)



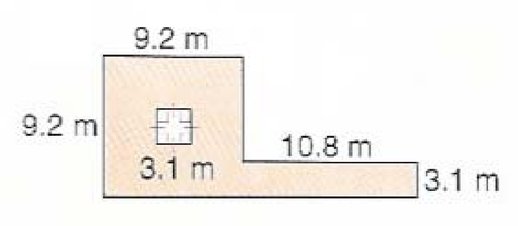
(g)



(h)



(i)



GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 16 – Explorando figuras tridimensionales-#1.

Prismas y cilindros.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

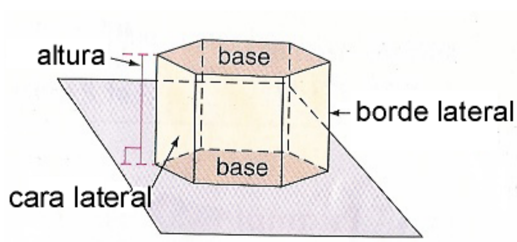
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco teórico:

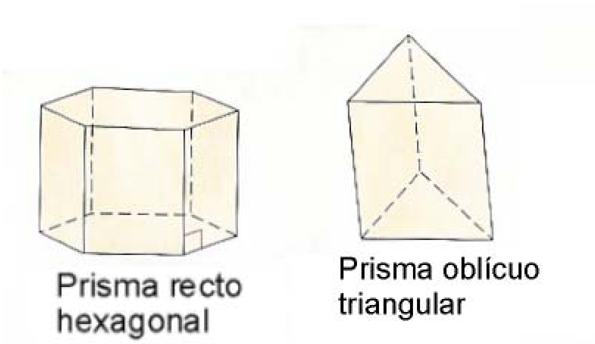
Prismas: Los prismas son cuerpos tridimensionales que en geometría se denominan sólidos, y los cuales tienen las siguientes características:



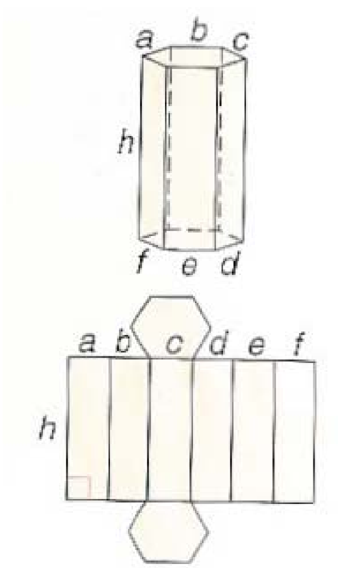
- Dos caras planas, llamadas bases, en planos paralelos entre si, formadas por polígonos congruentes.
- Varias caras laterales, tantas como lados tengan los polígonos que hacen de bases, formadas por paralelogramos.
- La intersección de dos caras laterales son llamadas aristas o bordes laterales.
- La distancia medida entre las dos bases, o sea la longitud de un segmento perpendicular a las mismas, es denominada altura.
- Un prisma cuyos bordes laterales son también alturas es llamado prisma recto.

- Si un prisma no cumple con las condiciones para ser llamado recto, entonces se llama oblicuo.

Los prismas pueden ser clasificados por el tipo de figura geométrica que conforman sus bases, como se muestra a continuación:



Area lateral de un prisma recto: La sumatoria de todas las áreas de las caras laterales del prisma es llamada ***Area Lateral*** Tomando en cuenta el perímetro ***P*** de la base y la altura ***h*** del prisma, su área lateral ***L*** será: $L = P \cdot h$



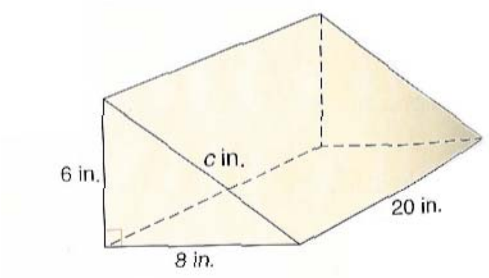
Dado el prisma recto hexagonal las dimensiones de los lados de la base son***:*** ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** y ***f*** y la altura del prisma es ***h***; entonces:

$$L = ah + bh + ch + dh + eh + fh =$$

$$L = (a + b + c + d + e + f) \cdot h = P \cdot h$$

Area total de un prisma recto: Se llama así a la sumatoria del área lateral más las áreas de las dos bases. Se debe recordar que las bases de un prisma recto son congruentes, por lo tanto sus áreas son iguales. Entonces, llamando ***B*** al área de cada base, el ***Area Total (T)*** de un prisma recto será igual a: $T = P \cdot h + 2B$.

Ejemplo #1: Encontrar el área total de un prisma recto triangular, con una altura de 20,0 pulgadas y que tiene como base un triángulo rectángulo cuyos catetos son 6,0 y 8,0 pulgadas.



Solución: Primero que nada debemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2 = 100,0$$
$$c = 10,0(pu\lg adas)$$

Luego, el perímetro de la base será: $P = 6,0 + 8,0 + 10,0 = 24,0(pu\lg adas)$

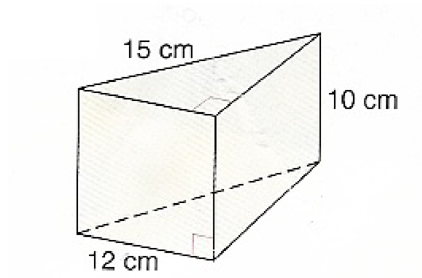
El área de una de las bases es: $B = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2}(6,0 \cdot 8,0) = 24,0(pu\lg.^2)$

Finalmente, el Area total será:

$$T = P \cdot h + 2B = 24,0 \cdot 20,0 + 2 \cdot 24,0 = 528,0(pu\lg.^2)$$

Volumen de un prisma recto: La medida de la cantidad de espacio envuelto en un cuerpo tridimensional es llamada volumen. El volumen ***V*** de un prisma recto será el producto del área ***B*** de su base por la altura ***h*** del prisma, o sea: $V = B \cdot h$

Ejemplo # 2: Encontrar el volumen del prisma recto mostrado en la figura siguiente:



Solución: En primer lugar, se deberá utilizar el Teorema de Pitágoras para encontrar uno de los lados de la base.

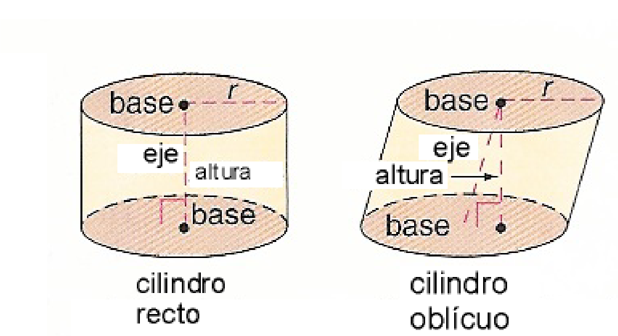
$$a^2 + 12^2 = 15^2$$
$$a^2 = 15^2 - 12^2$$
$$a^2 = 81$$
$$a = 9$$

Ahora, se puede encontrar el volumen del prisma:

$$V = B \cdot h = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9\right) \cdot 10 = 540 \left(cm^3\right)$$

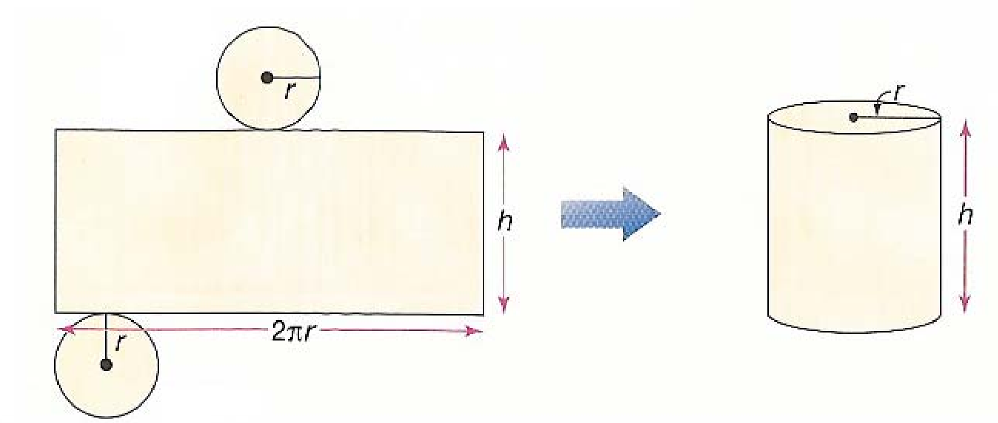
Cilindros: El cilindro es otro tipo común de sólido. Como el prisma, el cilindro tiene bases paralelas congruentes, haciendo la salvedad que las bases del cilindro son círculos. El eje del cilindro es el segmento de recta que pasa por los centros de las bases. (*círculos*).

La altura del cilindro es un segmento perpendicular a los planos que contienen las bases con un punto extremo en cada plano. Si el eje del cilindro es a su vez la altura, el cilindro es llamado ***cilindro recto***. De cualquier otra manera, el cilindro es llamado ***cilindro oblicuo.***



Area lateral de un cilindro recto: El área lateral L de un cilindro recto es el área de la superficie curva del cilindro y es igual al producto de la longitud de la circunferencia de su base por la altura del mismo; o sea:

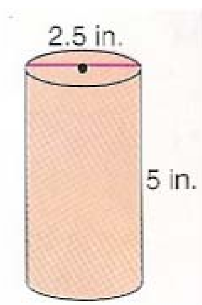
$$L = 2\pi \cdot r \cdot h$$



Area total de la superficie de un cilindro recto: Se denomina T y es igual a:

$$T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$$

Ejemplo #2: Encontrar el área total del cilindro mostrado en la figura siguiente:



Solución: Si el diámetro de la base es 2,5 pulgadas, entonces el radio es 1,25 pulgadas.

$$T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\left(1,25 \cdot 5 + 1,25^2\right) = 49,1\left(pu\lg.^2\right)$$

Ejemplo #3: El área total de un cilindro recto es de 301,6 centímetros cuadrados. Si la altura es de 8,0 centímetros, encontrar el radio de la base.

Solución:

$$T = 2\pi rh + 2\pi r^2 =$$
$$301,6 = 2\pi r\left(8,0\right) + 2\pi r^2 = 50,3r + 6,3r^2$$

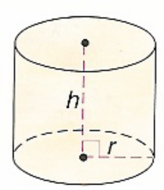
Escribiéndola como una ecuación de segundo grado y aplicando la resolverte:

$$6,3r^2 + 50,3r - 301,6 = 0$$
$$r = \frac{-50,3 \pm \sqrt{50,3^2 - 4\left(6,3\right)\left(-301,6\right)}}{2\cdot\left(6,3\right)} = 4,0\left(cm\right)$$

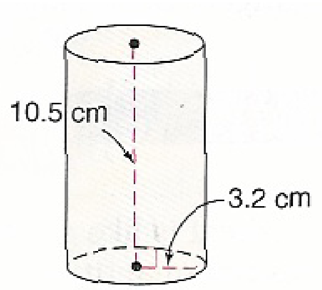
Es obvio que se toma como solución el valor positivo de la resolverte solamente, descartando el valor negativo.

Volumen de un cilindro recto: El volumen ***V*** de un cilindro recto es igual al área ***B*** del círculo base, de radio ***r,*** multiplicada por la altura ***h*** del cilindro, o sea:

$$V = B\cdot h = \pi\cdot r^2\cdot h$$



Ejemplo #5: Encontrar el volumen del cilindro recto mostrado, redondeando los resultados:

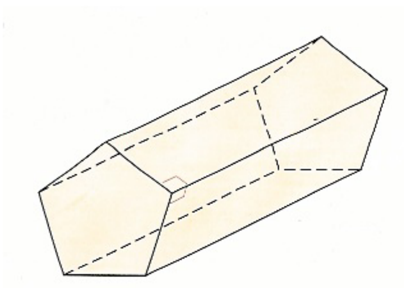


Solución: La altura del cilindro es 10,5 cm. y el radio de la base es 3,2 cm. por tanto:

$$V = \pi\cdot r^2\cdot h = \pi\cdot\left(3,2\right)^2\cdot\left(10,5\right) = 337,8\left(cm^3\right)$$

PREGUNTAS:

1.- Se deberá hacer referencia a la figura mostrada abajo:

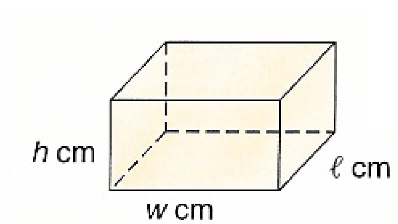


(a) Es este prisma recto u oblicuo. Explique?
(b) Cuáles figuras geométricas elementales conforman las bases y las caras laterales?.
(c) Si las bases son polígonos regulares con lados de longitud 6,0 cm., encontrar el perímetro de una base.
(d) Si el perímetro de la base es 60,0 cms. Y la longitud de un borde lateral es 15,0 cms. , encontrar el área total del prisma.

2.- Encontrar el área total del prisma recto rectangular mostrado, para cada conjunto de datos:

(a) $l = 8,0; w = 4,0; h = 2,0$

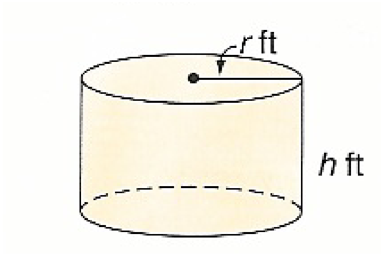
(b) $l = 6,5; w = 6,5; h = 6,5$



3.- Encontrar el área total del cilindro recto mostrado, para cada conjunto de datos:

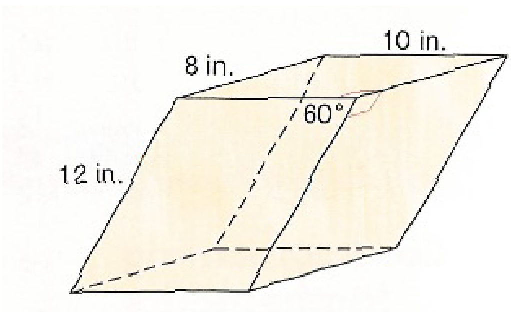
(a) $r = 4,0; h = 6,0$

(b) $r = 8,3; h = 6,6$



4.- Dada la figura mostrada abajo, encontrar:

(a) Es el prisma recto u oblicuo?
(b) Que figuras geométricas encuentra en las bases y en las caras laterales?
(c) Encontrar el perímetro de la base.
(d) Cuál es el área lateral del prisma?
(e) Cuál es el área total del prisma?

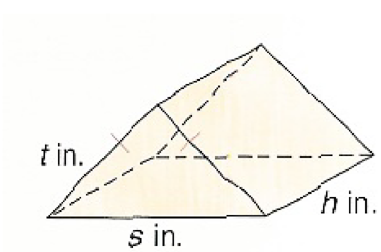


5.- Encontrar el área total del prisma recto triangular para cada conjunto de medidas. Redondear las cifras:

(a) $t = 8,0; s = 14,0; h = 7,0$

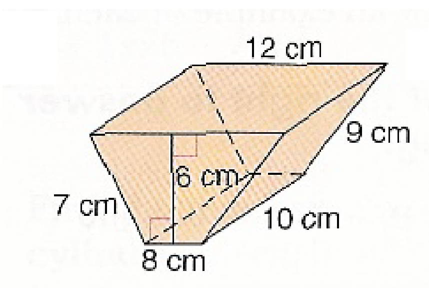
(b) $t = 10,0; s = 8,0; h = 20,4$

© $t = 14,0; s = 18,0; h = 30,5$

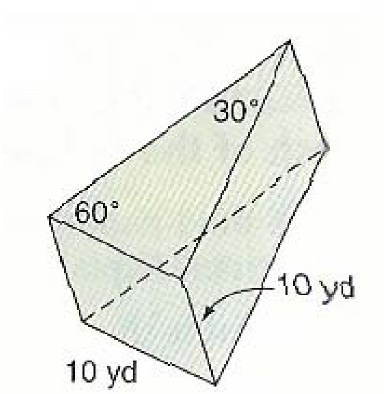


6.- Encontrar el área lateral y el área total de cada uno de los siguientes prismas rectos. Redondear las cifras:

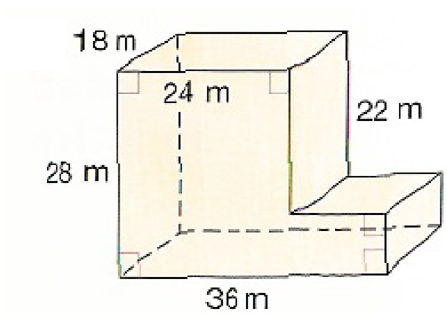
(a)



(b)



©

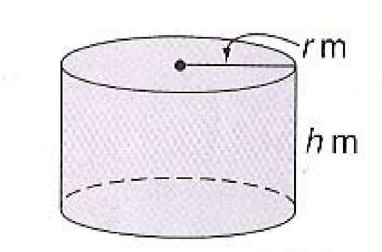


7.- Encontrar el área total del cilindro mostrado, con cada conjunto de datos:

(a) $r = 11,0; h = 11,0$

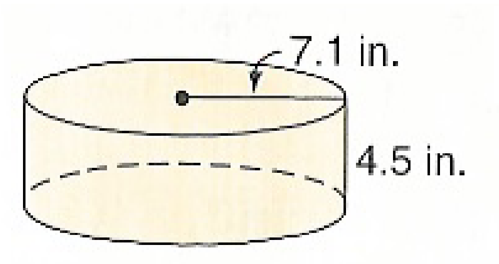
(b) $r = 13,0; h = 15,8$

© $r = 6,8; h = 1,9$

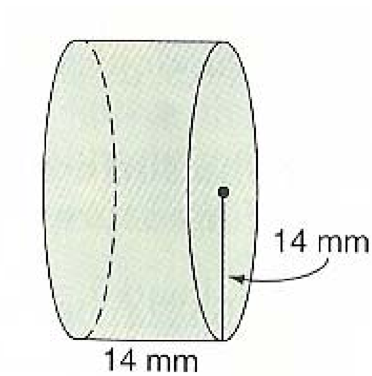


8.- Encontrar el área lateral y el área total de cada uno de los siguientes cilindros rectos:

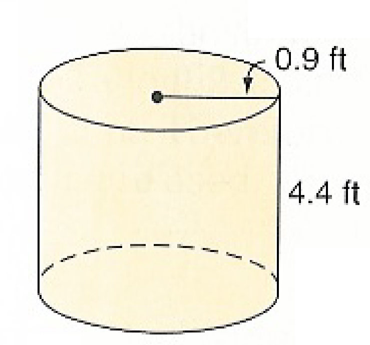
(a)



(b)

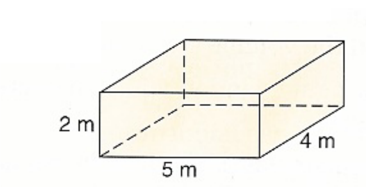


©

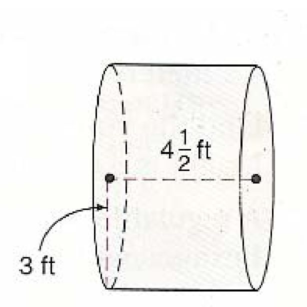


9.- Encontrar los volúmenes de cada uno de los prismas o cilindros rectos mostrados a continuación:

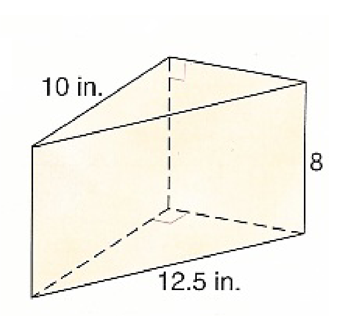
(a)



(b)



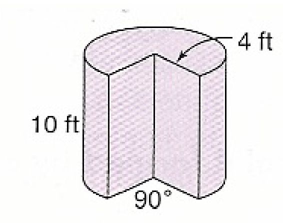
©



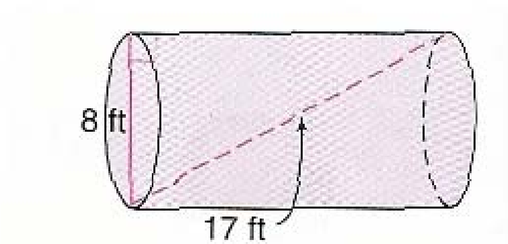
10.- Cuál es el volumen de un cilindro recto cuyo diámetro de base es 12,0 m. y su altura es de 15,0 m.?.

11.- Encontrar el volumen de un prisma recto cuya base es un hexágono regular con lados de 6,0 cm. de longitud y su altura es de 10,0 cm.

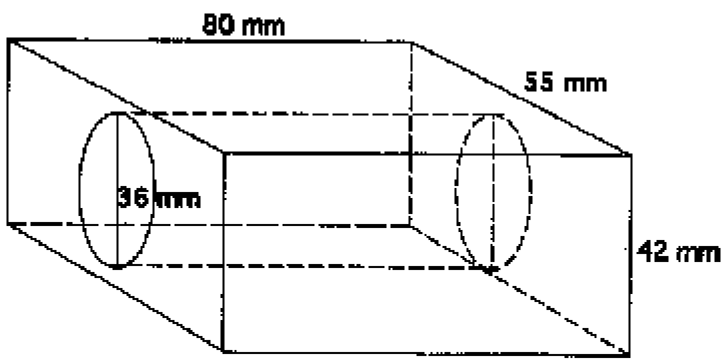
12.- Encontrar el volumen del cilindro recto, parcial mostrado en la figura de abajo:



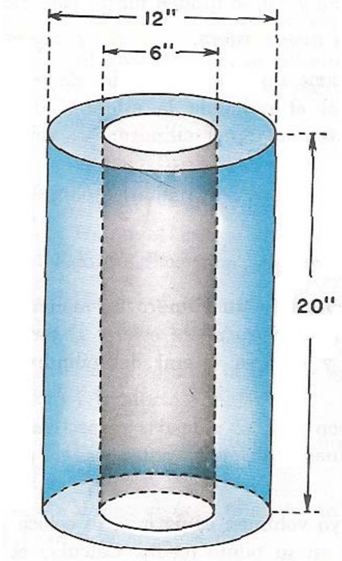
13.- Encontrar el volumen del cilindro recto de la figura mostrada a continuación:



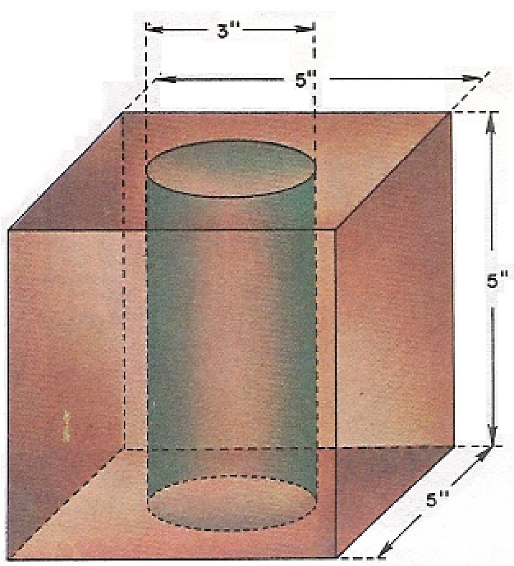
14.- Encontrar el volumen de la figura mostrada a continuación:



15.- Calcular el volumen del espacio que queda entre los dos cilindros de acuerdo con las medidas indicadas en la figura siguiente:



16.- De un cubo de 5,0 pulgadas de arista se taladra un cilindro de 3,0 pulgadas de diámetro. Calcular el volumen de la porción del cubo que queda.



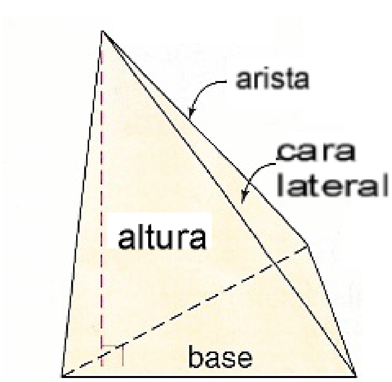
GUIA DE TRABAJO
Materia: Matemáticas.
Tema: Geometría 17 – Explorando figuras tridimensionales-#2. Pirámides y conos.
Fecha:_______________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

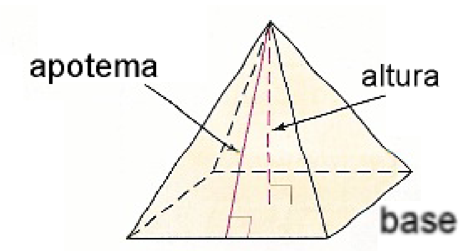
CONDICIONES:
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco teórico:

Pirámides: Una pirámide tiene las siguientes características:
- Todas las caras excepto una se interceptan en un punto llamado vértice.
- La cara que no se intercepta con la otra en el vértice es la llamada base, la cual es siempre un polígono.
- Las caras que se interceptan en el vértice son llamadas caras laterales y tiene la forma de triángulos. Los bordes de las caras laterales, los cuales tienen al vértice como un extremo, son las aristas.
- La altura es el segmento que va desde el vértice, perpendicularmente hasta la base.



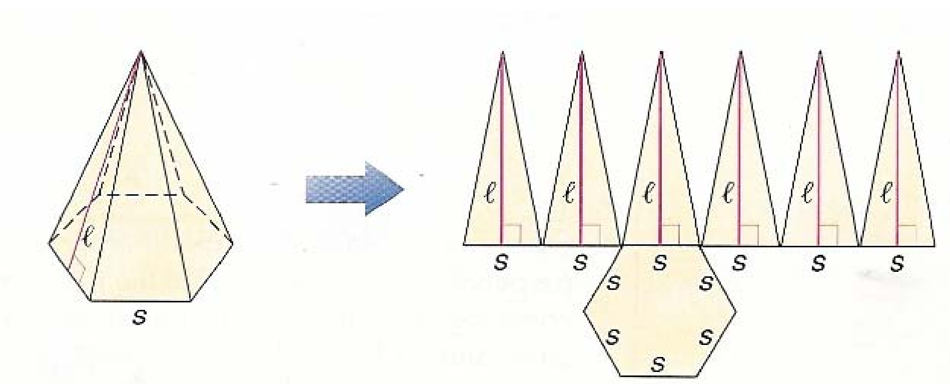
Si la base de la pirámide es un polígono regular y el segmento cuyos extremos son el centro de la base y el vértice es perpendicular a la base, ***o sea su altura***, entonces, esta pirámide es llamada ***pirámide regular***.



Pirámide Regular

Como se puede ver en la figura anterior, todas las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes. La altura de cada cara lateral, o sea, de cada triángulos isósceles, es llamada ***apotema.***

Area lateral, L de una pirámide regular: El área lateral L de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del perímetro P de la base por la apotema l de cualquiera de las caras congruentes, o sea: $L = \frac{1}{2} P \cdot l$ La figura que se muestra a continuación es una pirámide regular hexagonal. Su área lateral L puede ser encontrada sumando las áreas de todos los triángulos congruentes, como sigue:

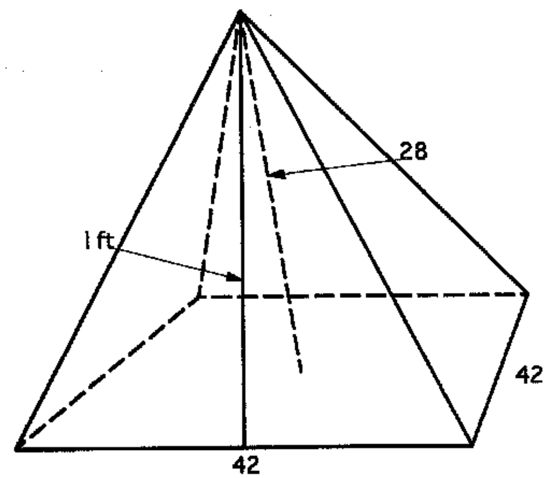


Llamando P al perímetro de la base y l la apotema, la cual es igual para todas las caras:

$$L = \frac{1}{2}sl + \frac{1}{2}sl + \frac{1}{2}sl + \frac{1}{2}sl + \frac{1}{2}sl + \frac{1}{2}sl =$$

$$L = \frac{1}{2}\left(s + s + s + s + s + s\right) \cdot l = \frac{1}{2} P \cdot l$$

Ejemplo #1: Encontrar el área lateral de la pirámide mostrada a continuación. La base de esta pirámide es un cuadrado perfecto de 42 pies de longitud en cada lado. La altura de la pirámide es de 28 pies.



Solución:

La apotema de una cara lateral cualquiera, *porque todas son iguales*, viene a ser la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura y la mitad del lado de la base correspondiente. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$l^2 = 28^2 + \left(\frac{42}{2}\right)^2 = 1225,0$$

$$l = \sqrt{1225} = 35,0\left(pies\right)$$

El área lateral de la pirámide será entonces:

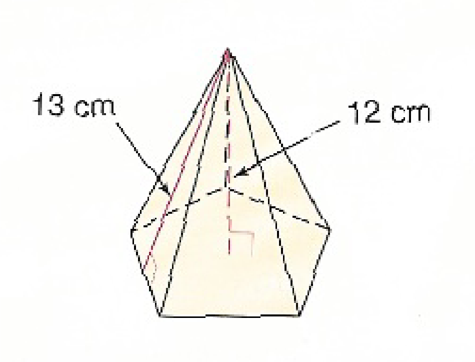
$$L = \frac{1}{2}P \cdot l = \frac{1}{2}4 \cdot \left(42\right) \cdot \left(35\right) = 1890,0\left(pies^2\right)$$

Area total T de una pirámide regular: Una pirámide regular con una apotema l y una base poligonal con un perímetro ***P*** y un área ***B***, tiene la siguiente área total

$$T = \frac{1}{2}P \cdot l + B = 1890 + 42 \cdot 42 = 1890 + 1764 = 3654,0\left(pies^2\right)$$

Ejemplo #2: Una pirámide regular tiene una apotema de 13,0 centímetros de longitud en cada cara lateral y una altura de 12,0 centímetros. Si la base es un pentágono regular, se pide encontrar el área total de la pirámide.

Solución: La apotema ***l*** de la cara lateral, la apotema ***a*** del pentágono y la altura ***h*** de la pirámide conforman un triángulo rectángulo, donde se puede aplicar el Teorema de Pitágoras, como sigue:

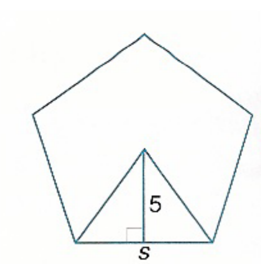


$$13^2 = 12^2 + a^2$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

Ahora, se encuentra la longitud de los lados del pentágono que sirve como base de la pirámide:



El ángulo central del pentágono vale: $\frac{360°}{5} = 72°$. Llamando α al ángulo de cada triángulo rectángulo que tiene como cateto a la apotema y usando ahora trigonometría:

$$tg\alpha = \frac{\left(\frac{1}{2}s\right)}{5} = tg\,\frac{72°}{2} = tg36°$$

$$5tg36° = \frac{1}{2}s$$

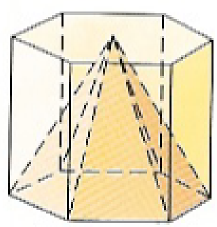
$$s = 10tg36° = 7,3$$

Ahora se puede usar la fórmula para el área total de una pirámide regular:

$$T = \frac{1}{2}P \cdot l + B = \frac{1}{2}(5 \cdot 7,3) \cdot (13) + \frac{1}{2}(5 \cdot 7,3) \cdot 5 =$$

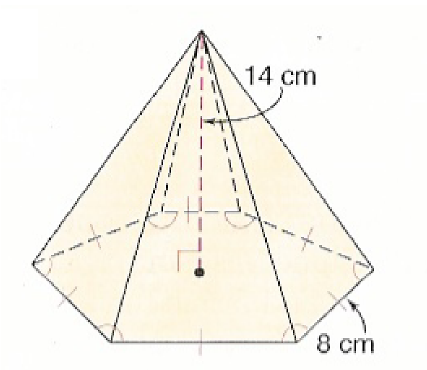
$$T = 328,5$$

Volumen de una pirámide recta: Como se puede ver en la figura siguiente, una pirámide tiene la misma base que el prisma que la contiene y tiene también la misma altura.



Entonces podemos asegurar que la pirámide tiene la tercera parte del volumen del prisma que la contiene, o sea: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$; siendo ***B*** el área del polígono que hace de base y ***h*** la altura.

Ejemplo #3: Encontrar el volumen de la siguiente figura:



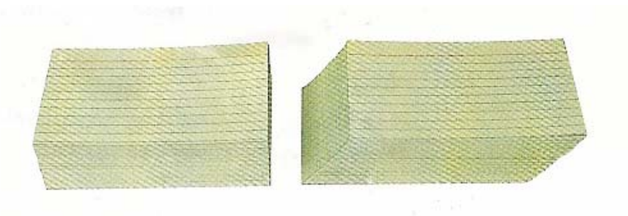
Solución:

Del teorema anterior se sabe que:

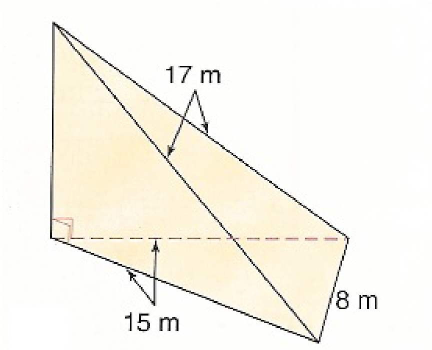
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}P \cdot a\right) \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 4\sqrt{3}\right) \cdot 14 =$$

$$V = 448\sqrt{3} = 776,0\left(cm^3\right)$$

Principio de Cavalieri: Si dos sólidos tienen la misma altura y la misma área transversal en cada nivel considerado, entonces ellos tienen el mismo volumen.



Ejemplo #4: Encontrar el volumen de la pirámide oblicua mostrada a continuación:



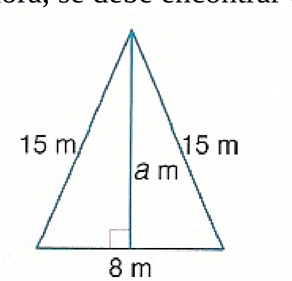
Solución: Primero se debe encontrar la altura de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 15^2 = 17^2$$

$$h^2 = 64$$

$$h = 8,0$$

Ahora, se debe encontrar el área de la base:



$$a^2 + 4^2 = 15^2$$

$$a^2 = 209$$

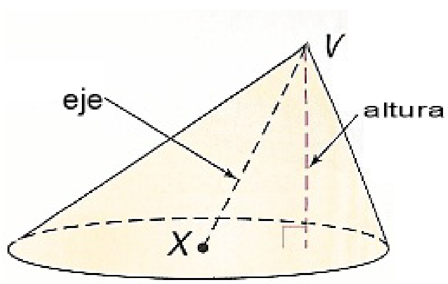
$$a = \sqrt{209}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{209}$$

Finalmente, se encuentra el volumen:

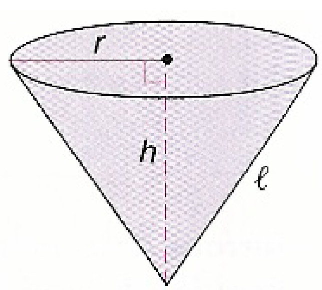
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{209}\right) \cdot 8 = 154,2\left(cm^3\right)$$

Conos: La figura mostrada a continuación es un cono circular. Su base es un ***círculo*** y su *vértice* está identificado como **V.** Su ***eje*** $\overline{VX}$ es el segmento de línea recta cuyos extremos son el vértice y el centro de la base y es llamado ***directriz***. El segmento que tiene un extremo en el vértice y a su vez es perpendicular al plano de la base es llamado ***altura del cono***.



Cono oblicuo

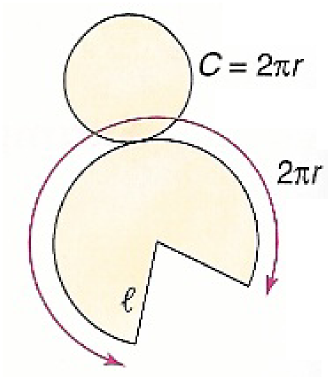
El cono cuya longitud de eje es igual a su altura es llamado cono recto. De cualquier otra manera, es llamado cono oblicuo. La dimensión del segmento uniendo al vértice con el borde exterior de la base circular es llamada ***generatriz*** y designada por ***l.*** La altura del cono es designada por ***h.*** El cono circular recto puede considerarse engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



Cono recto

Area lateral del cono Si con radio l construimos: el sector circular del arco igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono, se obtiene el desarrollo de la superficie lateral del cono:

En la figura mostrada a continuación podemos establecer la relación entre el área del sector circular de radio l y el área del círculo de la base de radio l, como sigue:



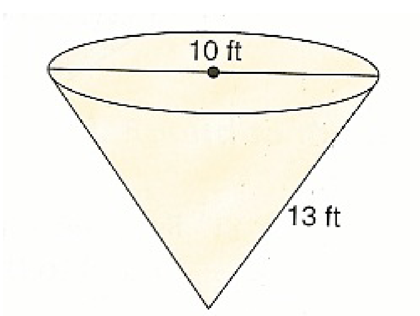
$$\frac{Area_{sector}}{Area_{círculo}} = \frac{mArco}{mCircunferencia}$$

$$\frac{Area_{sector}}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$$

De donde: Area del sector de círculo sombreado, o sea, ***área lateral del cono***, será igual a: $L = \pi r l$

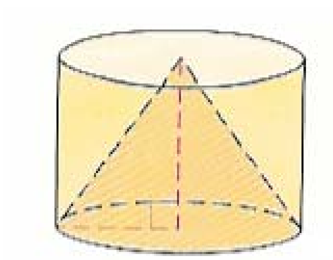
Area total de un cono recto circular: El área total en este caso es el área lateral antes calculada más el área de la base circular, o sea: $T = \pi r l + \pi r^2$ ..

Ejemplo #5: Encontrar el área lateral y el área total del cono mostrado abajo, si la generatriz es de 13,0 pies de largo y el diámetro de la base es 10,0 pies.

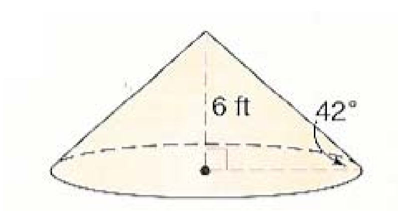


Solución: Dados los datos del problema el radio de la base es 5,0 pies; luego, el área total será: $T = \pi rl + \pi r^2 = \pi \cdot (5) \cdot (13) + \pi \cdot (5)^2 = 282,7\left(pies^2 \right)$

Volumen de un cono recto circular: El volumen de un cono recto es un tercio del volumen del cilindro recto que lo contiene; por lo tanto siendo el área de la base ***B*** y la altura ***h,*** el volumen buscado responde a la fórmula: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$



Ejemplo #6: Encontrar el volumen del sólido mostrado a continuación:



Solución: Usando trigonometría se puede calcular el radio de la base:

$$tg\,42° = \frac{6}{r}$$

$$r = \frac{6}{tg\,42°} = 6,7$$

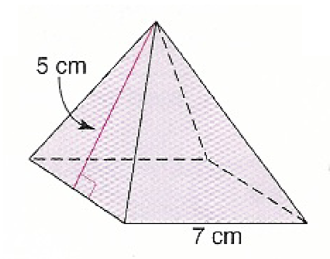
Ahora se puede calcular el volumen buscado:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3}\pi (6,7)^2 \cdot (6) = 282,1\left(pies^2 \right)$$

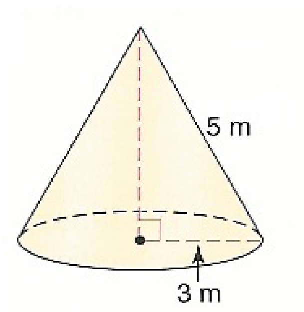
PROBLEMAS:

1.- Encontrar el área lateral y el área total de cada sólido:

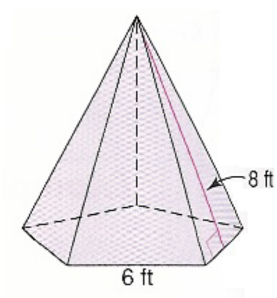
(a)



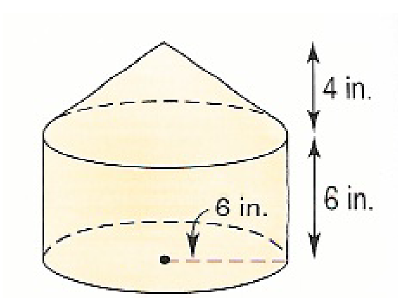
(b)



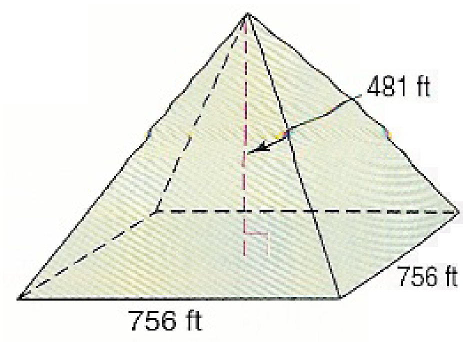
©



2.- Encontrar el área total del sólido mostrado a continuación:

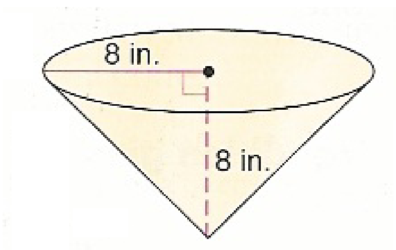


3.- Encontrar el área toral del sólido mostrado a continuación:

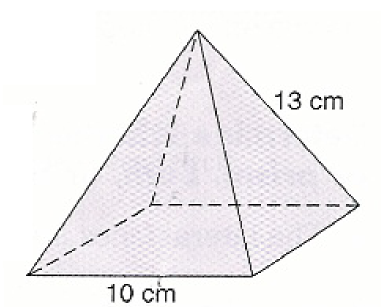


4.- Encontrar el área lateral y el área total de cada uno de los siguientes sólidos:

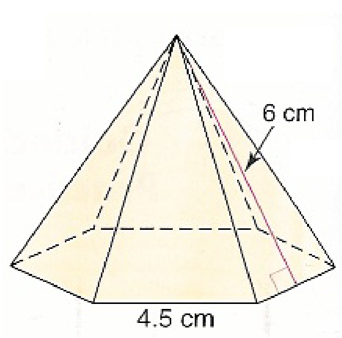
(a)



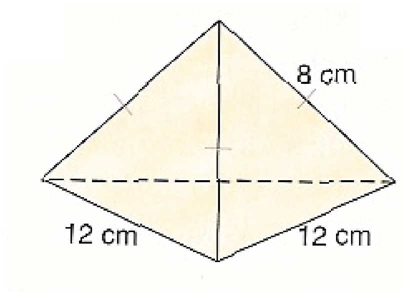
(b)



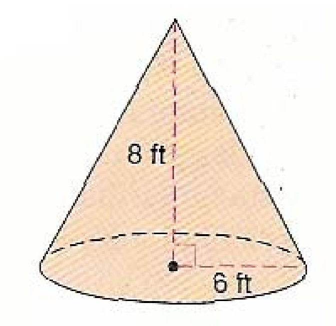
©



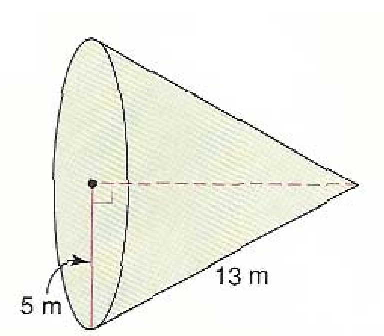
(d)



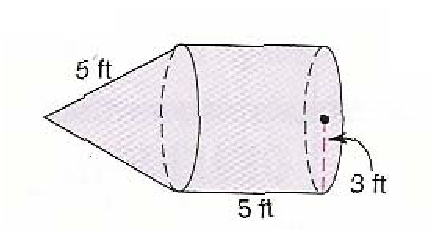
(e)



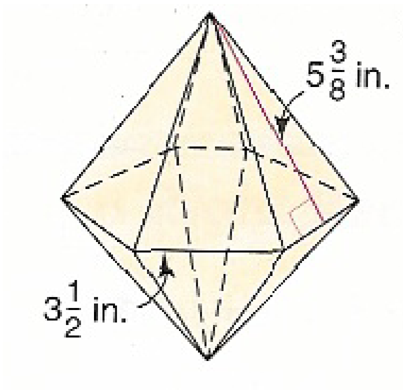
(f)



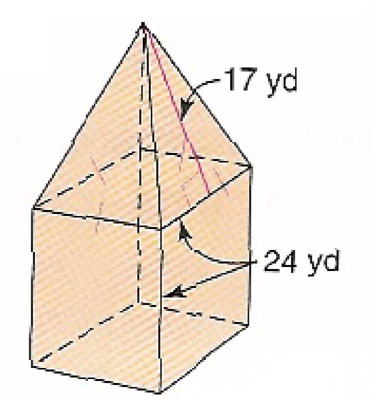
(g)



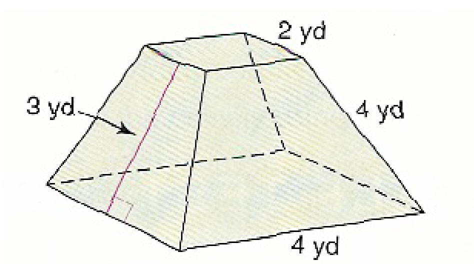
(h)



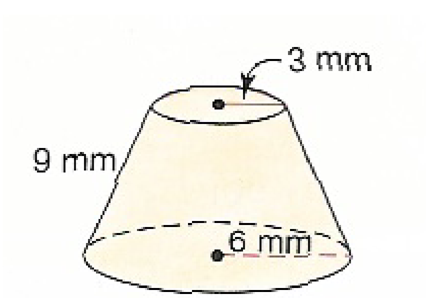
(i)



(j)

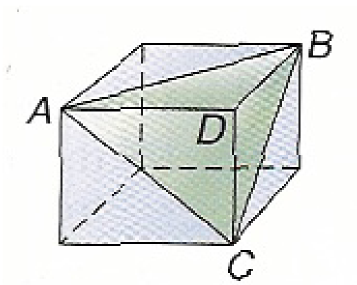


(k)



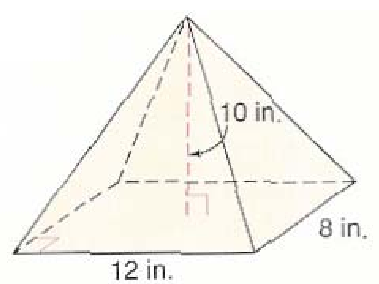
5.- Una pirámide regular tiene una apotema de sus caras laterales igual a 13,0 centímetros. El área de de su base en forma de cuadrado perfecto es de 100,0 centímetros cuadrados. Encontrar su área total.

6.- En el cubo mostrado a continuación, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son vértices de la base de la pirámide cuyo vértice es $\boldsymbol{D}$. Si cada arista del cubo tiene 8,0 centímetros de longitud, encontrar el área lateral y el área total de la pirámide.

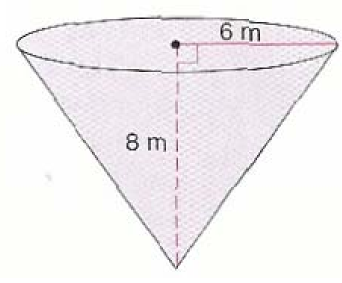


7.- Encontrar el volumen de cada sólido mostrado a continuación:

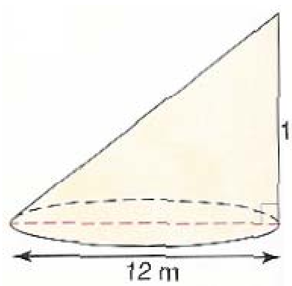
(a)



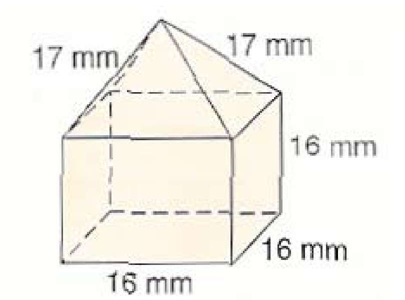
(b)



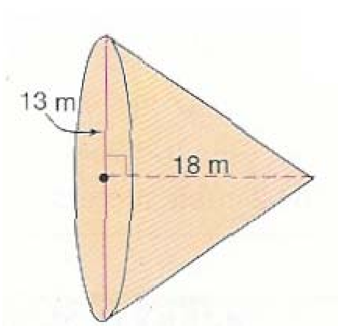
©



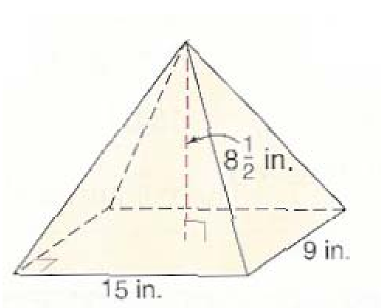
(d)



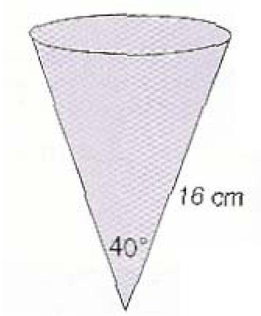
(e)



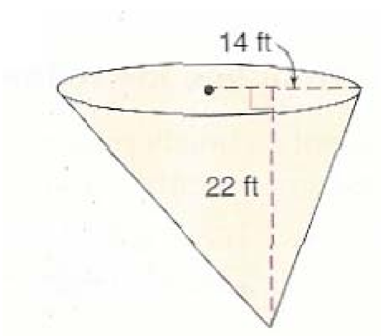
(f)



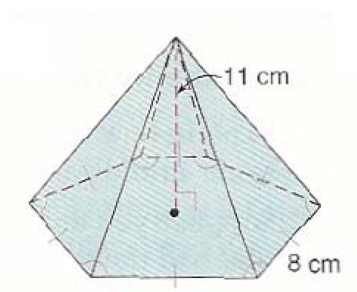
(g)



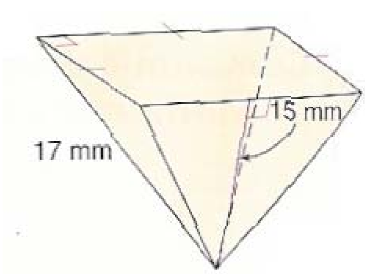
(h)



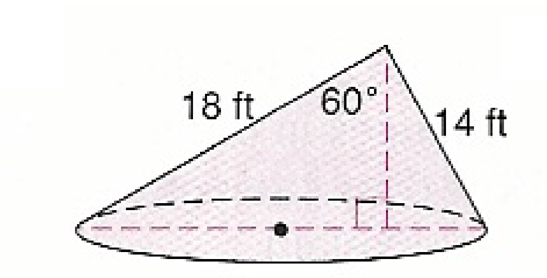
(i)



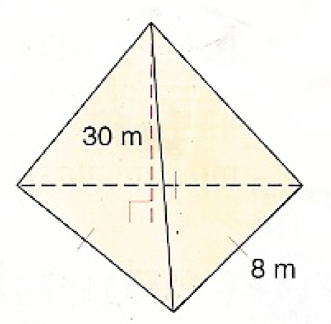
(j)



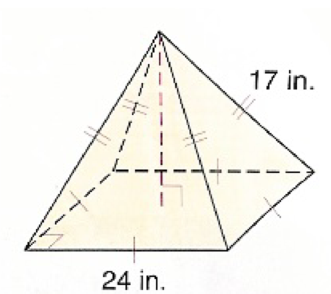
(k)



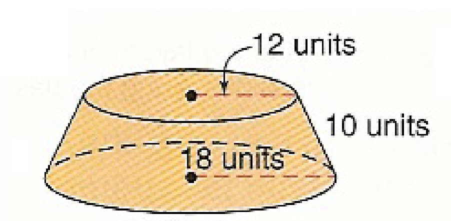
(l)



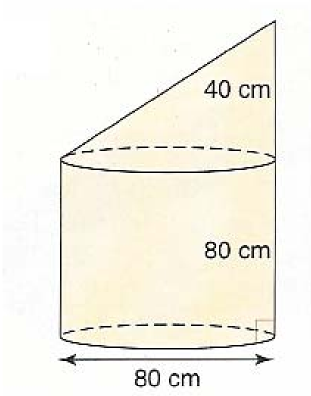
(m)



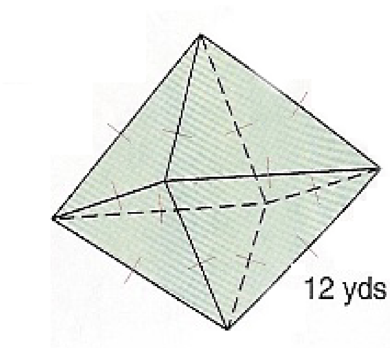
(n)



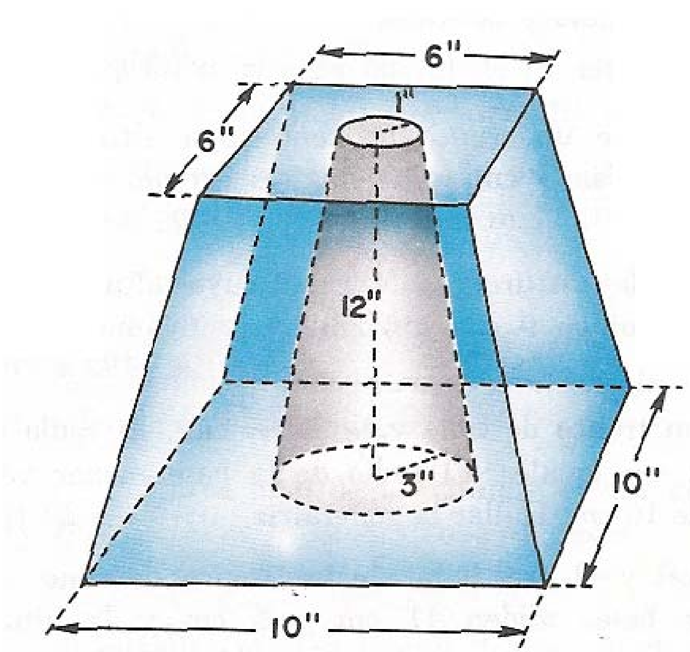
(o)



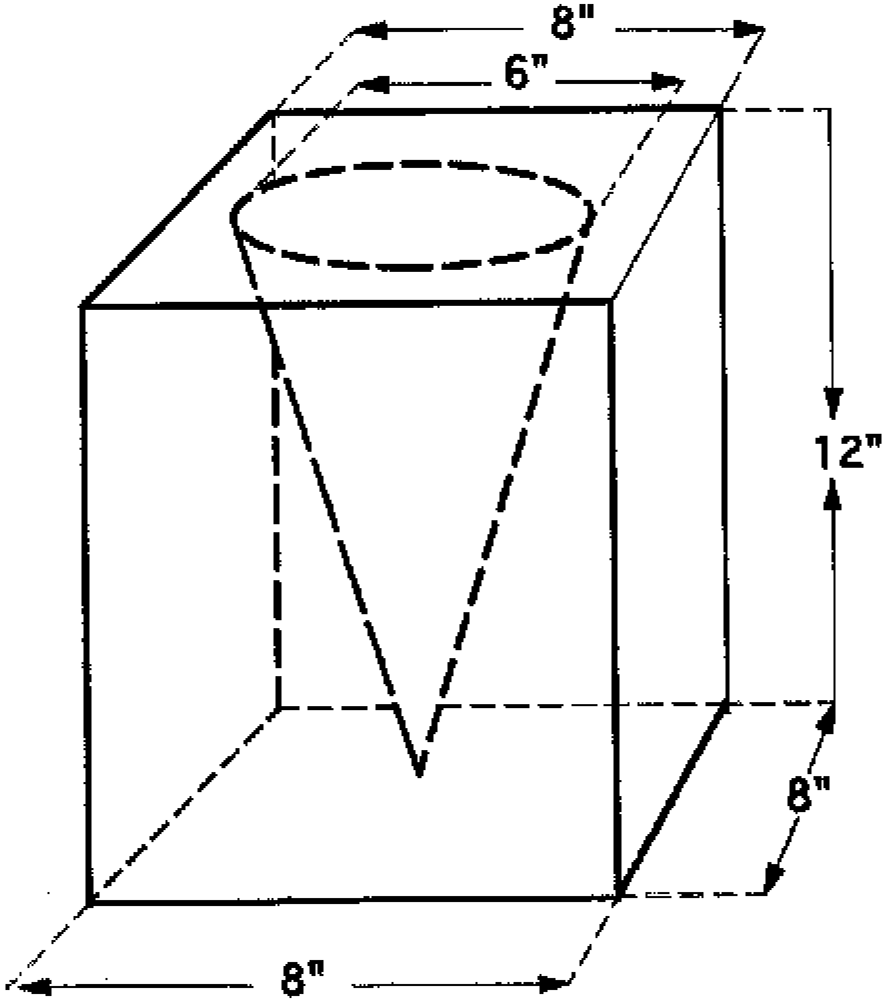
(p)



8.- Hallar el volumen del espacio limitado por los troncos de pirámide y de cono, de acuerdo con las medidas indicadas en la figura siguiente:



9.- Hallar el volumen del espacio limitado entre el cono y el ortoedro, de acuerdo con las medidas indicadas en la figura siguiente:


8"
6"
12"
8"
8"

GUIA DE TRABAJO
Materia: Matemáticas.
Tema: Geometría 18– Explorando la esfera-1.
Fecha:______________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

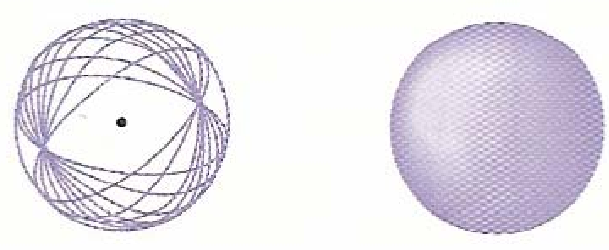
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

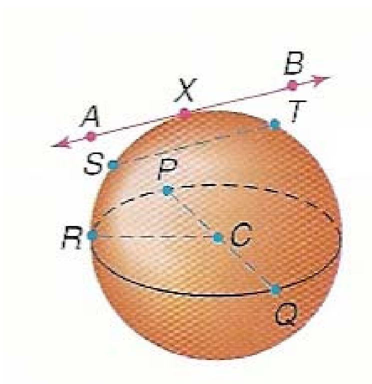
Eratosthenes (275-194, después de Cristo) fué director de la Biblioteca de Alejandría que para entonces era el centro académico de la antigüedad. ***Eratosthenes*** utilizó la posición del Sol y la distancia entre dos ciudades para calcular que la circunferencia de la Tierra era cerca de 39.375,0 Kms., lo cual es bastante aproximado al valor aceptado hoy día de 40.075,0 Kms.

La forma geométrica de la Tierra se aproxima bastante a una esfera. Para visualizar una esfera, es recomendable imaginarse una cantidad infinita de círculos en el espacio, todos con el mismo centro. Si se consideran todos los círculos al mismo tiempo, forman lo que conocemos como una esfera. Entonces, ***podemos definir una esfera como el lugar geométrico de los puntos en el espacio que equidistan de un punto llamado centro.***

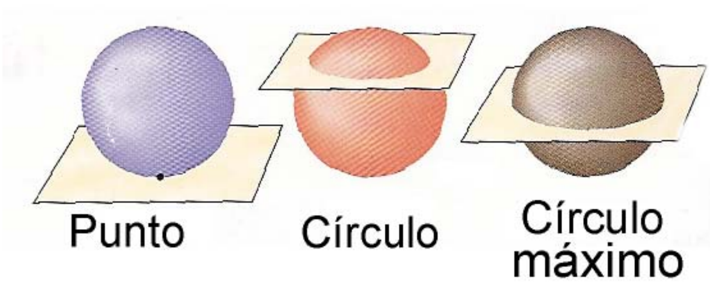


Cuerdas y segmentos en una esfera:

- ***Radio***: Es un segmento cuyos extremos son el centro de la esfera y un punto de la superficie exterior de la misma esfera. En la figura mostrada abajo, los segmentos $\overline{CR};\overline{CP};\overline{CQ}$ son todos radios de la esfera.
- ***Cuerda***: Es un segmento cuyos extremos son puntos de la superficie exterior de la esfera. En la figura de abajo, $\overline{TS};\overline{PQ}$ son cuerdas de la esfera.
- ***Diámetro:*** Es una cuerda de la esfera que pasa por el centro de la misma. En la figura de abajo, $\overline{PQ}$ es un diámetro de la esfera.
- ***Tangente:*** Es una línea recta que intercepta a la esfera en exactamente un punto. En la figura de abajo, $\overline{AB}$ es tangente a la esfera en el punto X .



Plano cortando a una esfera: Un plano puede interceptor una esfera en un punto o en un círculo.



Cuando un plano intercepta una esfera, de manera tal que el plano contiene al centro de la esfera, el círculo que queda como resultado de la mencionada intercepción es llamado ***círculo máximo***. Este círculo máximo tiene el mismo centro que la esfera y su radio es el mismo radio de la esfera. En la superficie de la esfera, la distancia entre dos puntos, es la longitud del arco del círculo máximo que pasa por esos dos puntos. Cada círculo máximo separa la esfera en dos partes iguales llamadas ***hemisferios***.

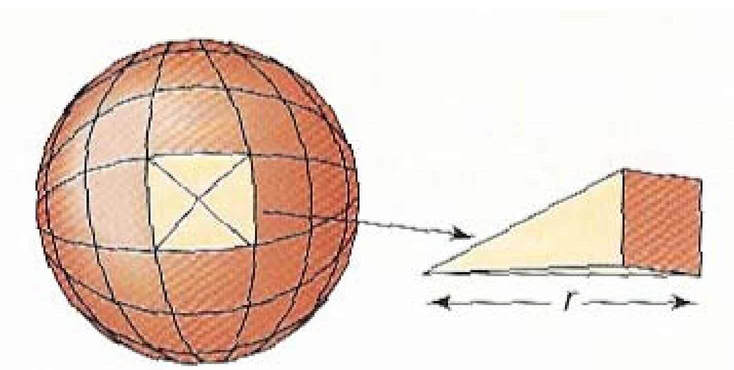
Area de la superficie exterior de una esfera: El área de la superficie exterior de una esfera de radio ***r,*** denominada ***T***, es igual a: $T = 4\pi r^2$.

Ejemplo #1: Encontrar el área de la superficie exterior de una pelota de *Volleyball* cuyo longitud de circunferencia es igual a 27,0 pulgadas.

Solución:

$$C = 2\pi r$$
$$27 = 2\pi r$$
$$r \approx 4,3$$
$$T = 4\pi r^2 = 4\pi\left(4,3\right)^2 = 232,4\left(pu\lg.^2\right)$$

Volumen de una esfera: El cálculo del volumen de una esfera puede ser relacionado a encontrar el volumen de una pirámide recta y su relación con el área de la superficie exterior de la esfera.



Hay que imaginarse el separar el espacio dentro de una esfera en una cantidad infinitamente grande de pirámides muy pequeñas cuyos vértices están todos localizados en el centro de la esfera, tal y como se muestra en la figura de arriba. Se debe observar que la altura de absolutamente cada una de estas pirámides muy pequeñas es igual al radio ***r*** de la esfera. ***La suma de las bases de todas estas pirámides pequeñas es igual al área de la superficie exterior de la esfera***.

Cada pirámide tiene un volumen de $\frac{1}{3}\left(B \cdot h\right)$ donde ***B*** es el área de la base y ***h*** es la altura. El volumen de la esfera será entonces la sumatoria del infinito número de volúmenes de todas las pequeñas pirámides; de modo tal que, el volumen ***V*** de la esfera puede ser representado por:

$$V=\frac{1}{3}B_1h_1+\frac{1}{3}B_2h_2+\frac{1}{3}B_3h_3+.....+\frac{1}{3}B_nh_n$$

$$=\frac{1}{3}B_1r+\frac{1}{3}B_2r+\frac{1}{3}B_3r+......+\frac{1}{3}B_nr=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(B_1+B_2+B_3+......+B_n\right)=$$

Ahora recordando que la sumatoria de todas las bases de las pirámides pequeñas es igual a la superficie exterior de la esfera, podemos entonces escribir:

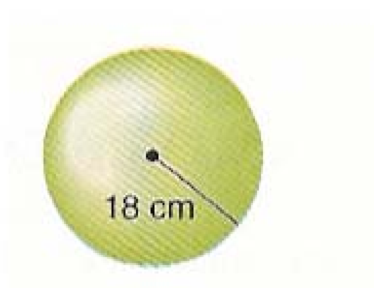
$$V=\frac{1}{3}r\left(4\pi r^2\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Luego, podemos afirmar que el volumen de una esfera de radio ***r*** es igual a:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Ejemplo #2: Encontrar el volumen de cada esfera:

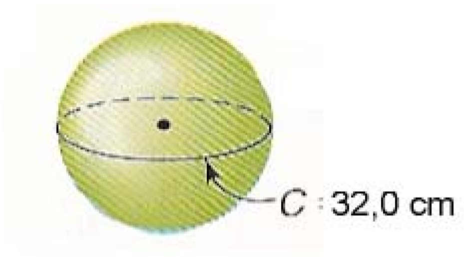
(a)



Solución:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(18\right)^3=24.429,0\left(cm^3\right)$$

(b)



Solución:

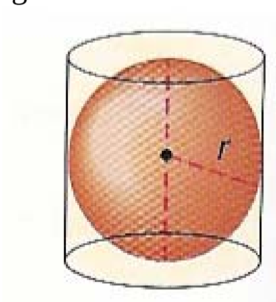
Primero se debe encontrar el radio de la esfera:

$$C = 2\pi r$$
$$32,0 = 2\pi r$$
$$r = \frac{16}{\pi}(cm)$$

Ahora se puede encontrar el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{16}{\pi}\right)^3 = 553,3\left(cm^3\right)$$

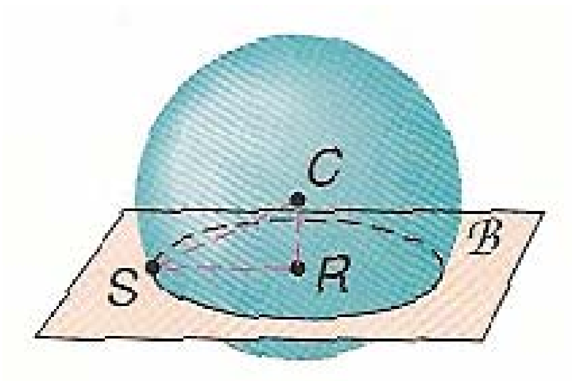
Hace aproximadamente 2200 años, el matemático griego Arquímedes descubrió la relación que existe entre el volumen de un cilindro y la esfera inscrita en el mismo.. Si el radio de la esfera es ***r***, el radio del cilindro será también ***r.*** La altura del cilindro será igual al diámetro de la esfera, o sea ***2r.***



$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\pi r^2 h} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\pi r^2(2r)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$$

PROBLEMAS:

1.- En la figura siguiente, C es el centro de la esfera y el plano β intercepta la esfera generando el círculo R.



(a) Cuál es la longitud del radio de la esfera si $CR = 4,0; SR = 3,0$.
(b) Si el radio de la esfera es 13,0 centímetros, y el radio del □ R es 12,0 centímetros, encontrar ***CR***.

2.- Encontrar la superficie exterior y el volumen de cada una de las siguientes esferas:

(a) El radio es 25,0 centímetros.
(b) El radio del círculo máximo es 14,5 centímetros.
(c) El diámetro es 450,0 metros.
(d) El círculo máximo tiene una circunferencia de 43,96 centímetros.

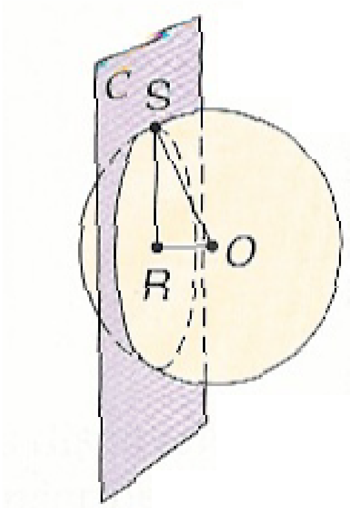
3.- Encontrar el volumen de una esfera si la superficie exterior es 16π cm.

4.- Una esfera está circunscrita alrededor de un cubo que tiene un volumen de 1728 centímetros cúbicos. Encontrar el área de la superficie exterior y el volumen de la esfera.

5.- Encontrar la relación matemática de los radios de dos esferas si el área de la superficie exterior de una es 4 veces el área de la superficie exterior de la otra.

6.- En la figura mostrada a continuación, O es el centro de la esfera y el plano C la intercepta conformando el □ R .

(a) Si $OR = 9,0; SR = 12,0$, encontrar ***OS***.
(b) Dados: $OS = 16,0; RS = 12,8$, encontrar ***OR.***
(c) Si el radio de la esfera es 15,0 unidades y el radio del círculo es 10,0 unidades, encontrar el valor de ***OR.***
(d) Si O y R son puntos diferentes, se puede afirmar que □ R es un círculo máximo?


C
S
O
R

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 19– Explorando la esfera-2.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

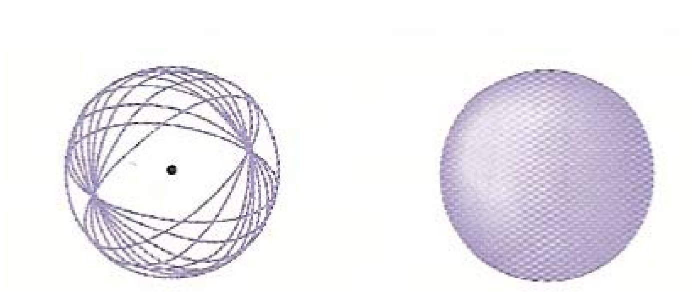
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Eratosthenes (275-194, después de Cristo) fué director de la Biblioteca de Alejandría que para entonces era el centro académico de la antigüedad. ***Eratosthenes*** utilizó la posición del Sol y la distancia entre dos ciudades para calcular que la circunferencia de la Tierra era cerca de 39.375,0 Kms., lo cual es bastante aproximado al valor aceptado hoy día de 40.075,0 Kms.

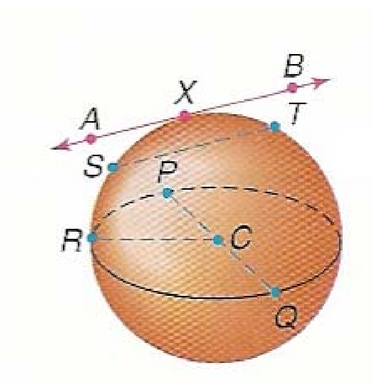
La forma geométrica de la Tierra se aproxima bastante a una esfera. Para visualizar una esfera, es recomendable imaginarse una cantidad infinita de círculos en el espacio, todos con el mismo centro. Si se consideran todos los círculos al mismo tiempo, forman lo que conocemos como una esfera. Entonces, ***podemos definir una esfera como el lugar geométrico de los puntos en el espacio que equidistan de un punto llamado centro.***



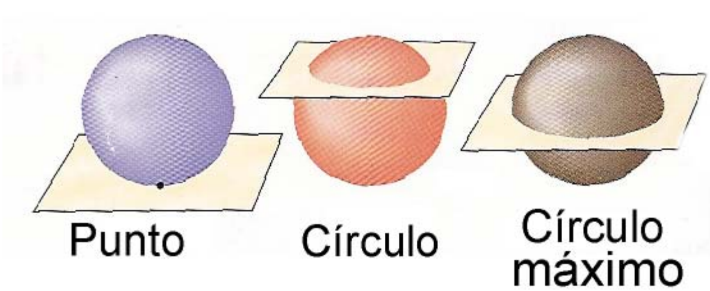
También se puede considerar que una superficie esférica es la superficie de revolución engendrada por la rotación de una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros. El cuerpo engendrado por la rotación de un círculo es la esfera.

Cuerdas y segmentos en una esfera:

- ***Radio***: Es un segmento cuyos extremos son el centro de la esfera y un punto de la superficie exterior de la misma esfera. En la figura mostrada abajo, los segmentos $\overline{CR};\overline{CP};\overline{CQ}$ son todos radios de la esfera.
- ***Cuerda***: Es un segmento cuyos extremos son puntos de la superficie exterior de la esfera. En la figura de abajo, $\overline{TS};\overline{PQ}$ son cuerdas de la esfera.
- ***Diámetro:*** Es una cuerda de la esfera que pasa por el centro de la misma. En la figura de abajo, $\overline{PQ}$ es un diámetro de la esfera.
- ***Tangente:*** Es una línea recta que intercepta a la esfera en exactamente un punto. En la figura de abajo, $\overline{AB}$ es tangente a la esfera en el punto X .



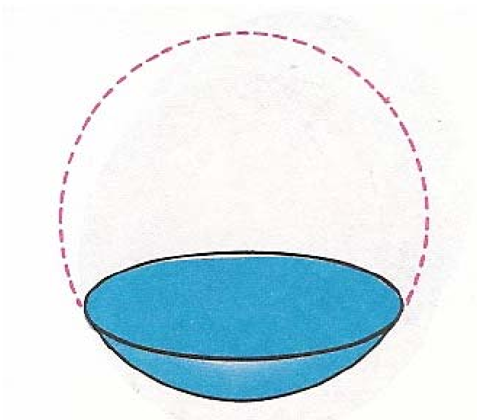
Plano cortando a una esfera: Un plano puede interceptor una esfera en un punto o en un círculo.



Cuando un plano intercepta una esfera, de manera tal que el plano contiene al centro de la esfera, el círculo que queda como resultado de la mencionada intercepción es llamado ***círculo máximo***. Este círculo máximo tiene el mismo centro que la esfera y su radio es el mismo radio de la esfera. En la superficie de la esfera, la distancia entre dos puntos, es la longitud del arco del círculo máximo que pasa por esos dos puntos. Cada círculo máximo separa la esfera en dos partes iguales llamadas ***hemisferios***.

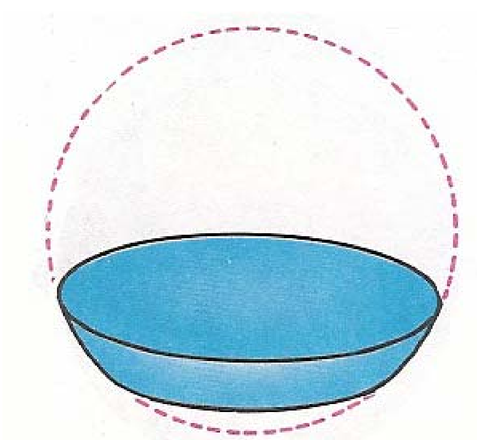
Figuras en la superficie esférica y en la esfera:

1.- Si una esfera es cortada por un plano secante se tendrá la esfera dividida en dos porciones siendo cada una llamada casquete esférico, aunque en la práctica así se denomina al menor de los dos. En el caso especial en que el plano pase por el centro de la esfera, se tendrán dos hemisferios.



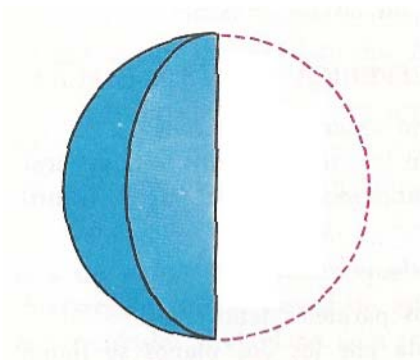
Cada porción de esfera se llama segmento esférico de una base.

2.- Si s una esfera es cortada por dos planos paralelos se tiene una superficie esférica limitada por dos planos, la cual es llamada ***zona esférica.***



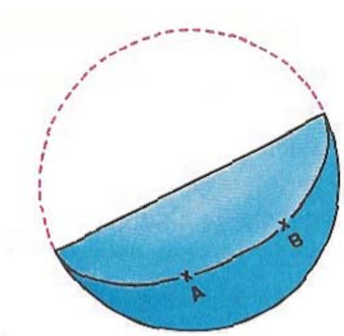
La porción de esfera limitada por los dos planos se llama zona esférica de dos bases.

3.- Si se consideran dos semicírculos máximos del mismo diámetro se obtiene una porción de superficie esférica limitada por los dos semicírculos la cual se llama ***huso esférico***.

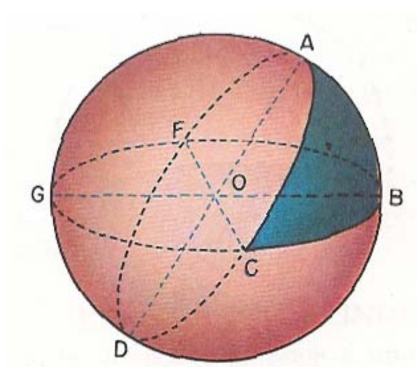


La porción de esfera limitada por los dos semicírculos se llama cuña esférica.

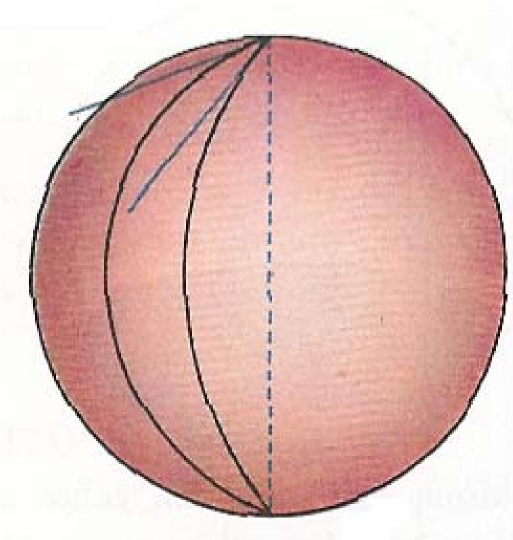
4.- Se llama ***distancia esférica*** entre dos puntos de una superficie esférica al menor de los arcos de círculo máximo que pasa por ellos. Es la distancia más corta entre dos puntos medida sobre la superficie esférica.



5.- Se llama ***triángulo esférico*** la porción de superficie esférica limitada por tres arcos de círculo máximo. Esto arcos o lados del triángulo son menores que una semicircunferencia.



6.- Se llama ***ángulo esférico*** en un punto el formado por dos arcos de círculo máximo. Se mide por el ángulo formado por las tangentes a los arcos ene. Punto.



Area de figuras esféricas:

Area de un casquete esférico o de una zona esférica: Es el límite del área engendrada por un polígono regular inscrito en el arco, al crecer infinitamente el número de lados. Entonces se puede escribir que:

$A = 2\pi rh$ donde:

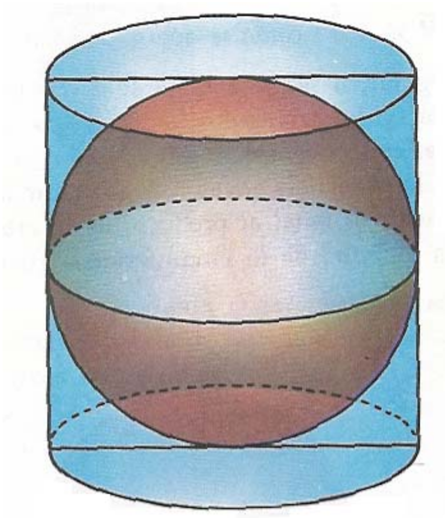
- $r =$ Radio de la esfera.
- $h =$ Proyección del polígono regular sobre el diámetro perpendicular a la base del casquete o bases de la zona, es decir, la altura del casquete o zona.

Area de un huso esférico: Si el huso tiene un número de grados designados por n°, el área se calcula por la proporción:

$$\frac{360^{\circ}}{4\pi r^2} = \frac{n^{\circ}}{X}$$

$$X = \frac{\pi r^2 n^{\circ}}{90^{\circ}}$$

Relación entre el área de una esfera y el área lateral del cilindro circunscrito:



Si se considera que el cilindro circunscrito está limitado por dos planos tangentes paralelos, su área lateral es:

$A = 2\pi r \cdot (h) = 2\pi r \cdot (2r) = 4\pi r^2$ como se puede ver éste es exactamente el área de la superficie esférica, por lo tanto, son iguales.

PROBLEMAS:

1.- Dos esferas de de radios $\boldsymbol{2a}$ y $\boldsymbol{3a}$, se funden juntas para hacer una esfera mayor. Calcular el radio de la nueva esfera.

2.- En una esfera de radio $\boldsymbol{r}$ se tiene inscrito un cilindro de manera tal que el radio de la esfera es igual al diámetro del cilindro. Calcular:

(a) El área lateral del cilindro.
(b) El área total del cilindro.
(c) El volumen del cilindro.

3.- Se tiene una esfera situada dentro de un cilindro de manera que el cilindro tiene la altura y el diámetro iguales al diámetro de la esfera. Determinar la relación matemática entre el área de la esfera y el área lateral del cilindro.

4.- os esferas cuyos diámetros son 8 y 12 centímetros respectivamente están tangentes sobre una mesa. Determinar la distancia entre los dos puntos donde las esferas tocan la mesa.

5.- Dentro de una caja cúbica cuyo volumen es de $64,0\left(cm^3\right)$, se coloca una pelota que toca a cada una de las caras en su punto medio. Calcular el volumen de la pelota.

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.
Tema: Geometría 20 – Sólidos semejantes.
Fecha:_______________
Profesor: Fernando Viso

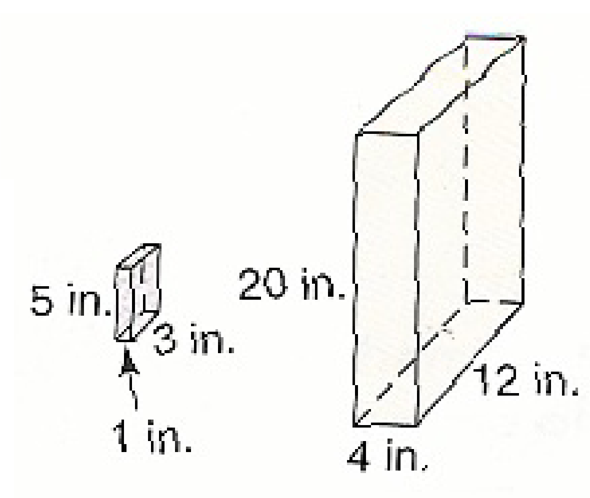
Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

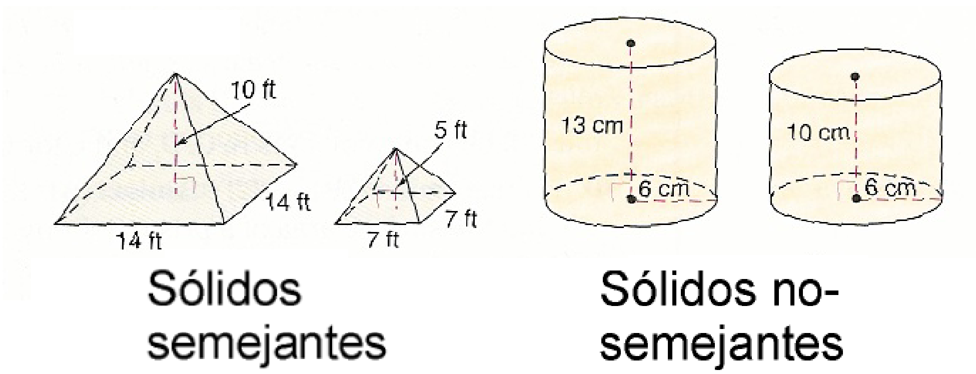
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Sólidos semejantes son sólidos que tienen exactamente la misma forma geométrica exterior; pero, diferentes medidas. Se puede determinar si dos sólidos son semejantes al comparar las proporciones de sus correspondientes dimensiones lineales. Por ejemplo, en los sólidos semejantes mostrados en la figura siguiente las proporciones de las medidas correspondientes son: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$



La relación proporcional mostrada es llamada razón proporcional, o escala, o factor de escala.

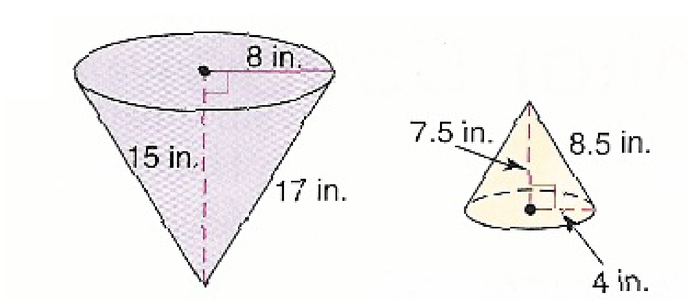


Si dos poliedros son semejantes, todas las caras correspondientes son semejantes y todas las aristas correspondientes tienen la misma razón proporcional o escala. Si la razón proporcional de medidas correspondientes es $1:1$, entonces, los dos sólidos son congruentes. En definitiva, dos sólidos son congruentes si se cumplen las siguientes condiciones:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.
- Las aristas correspondientes son congruentes.
- Las áreas de caras correspondientes son congruentes.
- Los volúmenes son congruentes.

Ejemplo #1: Determinar si los siguientes pares de sólidos son semejantes :

(a)



Solución: Al encontrar las razones proporcionales de partes correspondientes del cono grande $\boldsymbol{G}$ y cono pequeño $\boldsymbol{P}$, se tiene:

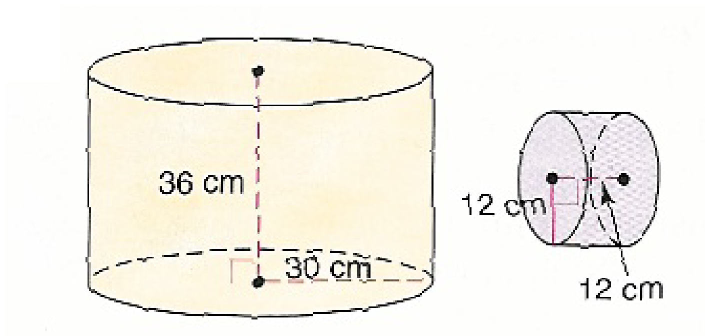
Para los radios de las bases $$\frac{r_G}{r_P} = \frac{8}{4} = 2$$

Para las alturas de los conos: $\dfrac{h_G}{h_P} = \dfrac{15}{7,5} = 2$

Para las generatrices de los conos: $\dfrac{l_G}{l_P} = \dfrac{17}{8,5} = 2$

Como las razones proporcionales de las partes correspondientes son iguales, estos conos son semejantes.

(b)



Comparando las razones proporcionales entre partes correspondientes del cilindro grande ***G*** y el cilindro pequeño ***P***, se tiene:

Para los radios de las bases: $\dfrac{r_G}{r_P} = \dfrac{36}{12} = \dfrac{3}{1}$

Para las alturas de los cilindros: $\dfrac{h_G}{h_P} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2}$

Como las razones proporcionales no son las mismas, los cilindros no son semejantes.

Teorema #1: Si dos sólidos son semejantes con una razón de proporcionalidad (o escala) de $\dfrac{a}{b}$, entonces las correspondientes áreas de las superficies tienen una razón de proporcionalidad de $\frac{a^2}{b^2}$ y los correspondientes volúmenes tienen una razón de proporcionalidad de $\frac{a^3}{b^3}$.

Ejemplo #2: Un agricultor de *Hawkeye, Iowa, USA*, construyó un monumento de cemento en forma de mazorca de maíz (***M)***, con el objeto de atraer turistas a su finca. El monumento en forma de mazorca tenía 32,0 pies de largo y un radio de 12 pies. Cada remedo de grano de maíz del monumento tenía un volumen de 231,0 pulgadas cúbicas. (a) Cuál es la razón de proporcionalidad entre el monumento y una mazorca real ***(R)*** de 14,0 pulgadas de largo. (b) Basado en las proporciones obtenidas comparando las dos mazorcas, la del monumento y la real, se deberá estimar el volumen de un grano de maíz real de la mazorca de 14,0 pulgadas de largo.

Solución:

(a) La razón de proporcionalidad es: $\frac{longitd_M}{longitud_R} = \frac{32 \cdot 12}{14} = \frac{192}{7}$

(b) Siguiendo las afirmaciones del teorema anterior y dado que la razón de proporcionalidad es $\frac{192}{7}$ se puede calcular el volumen de un grano de maíz real::

$$\frac{Volumen_M}{Volumen_R} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{(192)^3}{7^3} = \frac{7.077.888,00}{343}$$

Conocida la razón se puede ahora calcular el volumen buscado por medio de una proporción:

$$\frac{7.077.888,00}{343} = \frac{231}{x}$$

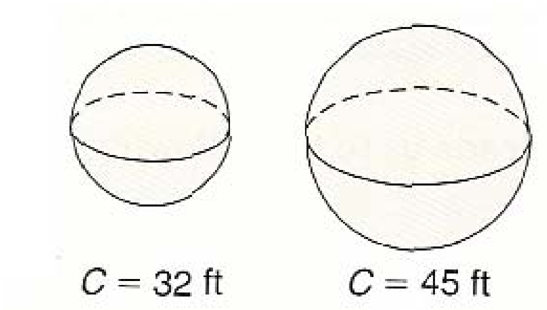
$$x \cdot 7.077.888,00 = 79.233,0$$

$$x = 0,011\left(pu\lg adas^3 \right)$$

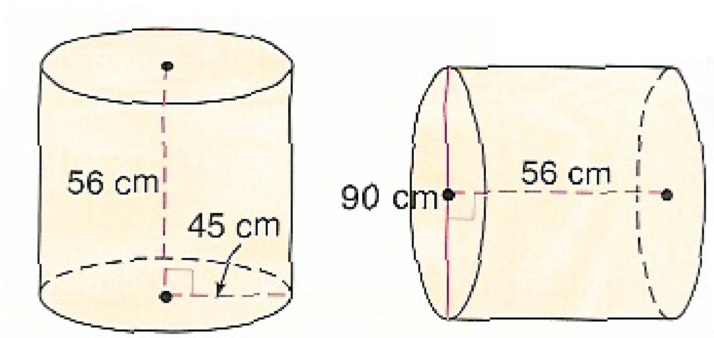
PROBLEMAS:

1.- Determinar si cada par de los siguientes sólidos son semejantes, congruentes, o ninguno de los dos casos anteriores:

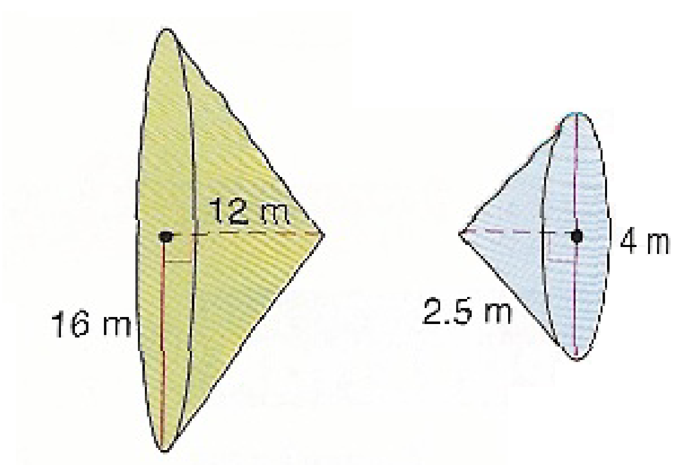
(a)



(b)



2.- En los conos de la figura mostrada a continuación, encontrar lo siguiente:



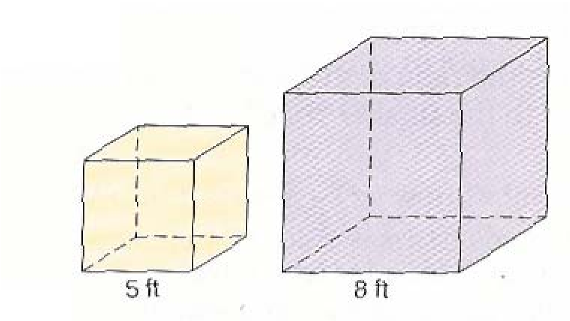
(a) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre la altura del cono más grande y la correspondiente del cono más pequeño?
(b) Encontrar la razón de proporcionalidad entre las áreas de las dos superficies.
(c) Cuál es la razón entre las dos circunferencias?
(d) Si el volumen del cono mayor es $\boldsymbol{X}$ metros cúbicos, encontrar cuál es el volumen del cono más pequeño.

3.- Marque verdadero o falso cada una de las siguientes aseveraciones:

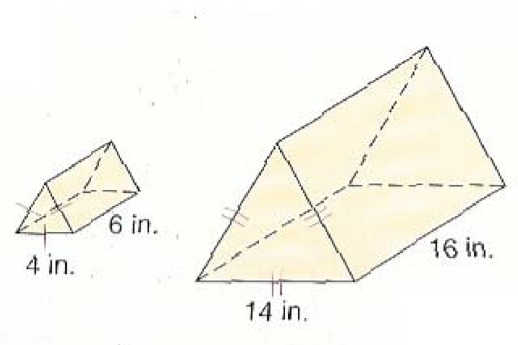
- Todas las esferas son semejantes.
- Si dos pirámides tienen bases cuadradas, entonces ellas son semejantes.
- Si la arista de un cubo es dos veces la arista de otro cubo, entonces su área total es dos veces el área total de la del cubo menor.

4.- Encuentre si cada uno de los pares de sólidos mostrados son semejantes, congruentes, o ninguno de los dos casos: anteriores:

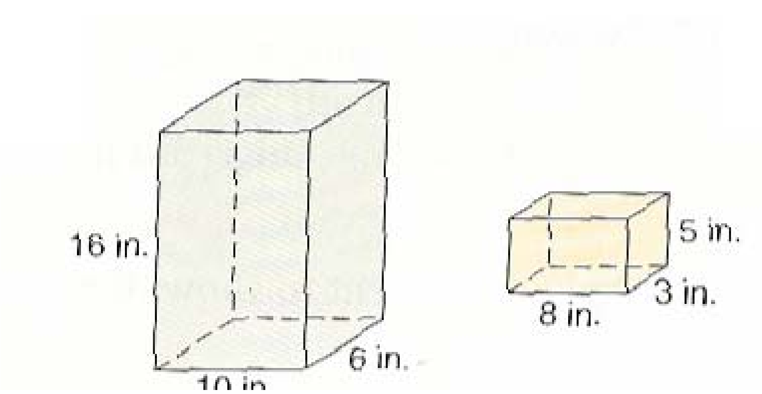
(a)



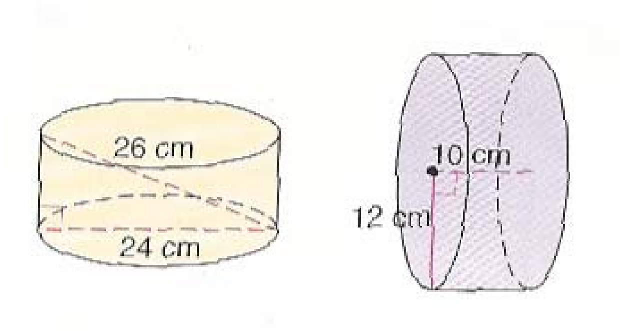
(b)



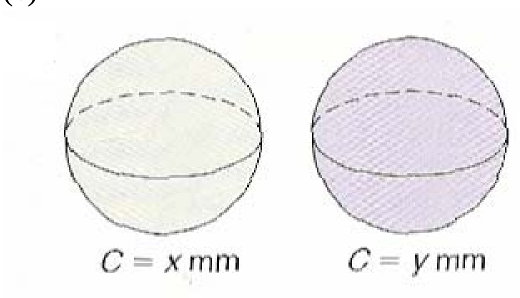
©



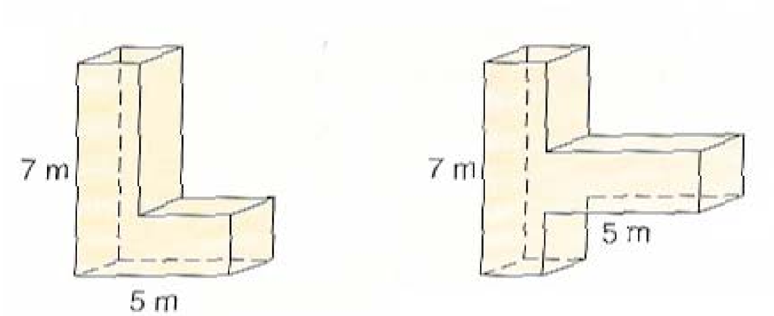
(d)



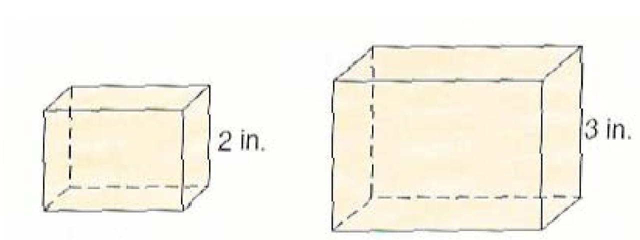
(e)



(f)



5.- Dado los dos prismas rectos rectangulares de la figura mostrada a continuación, son semejantes, encontrar lo siguiente



(a) Encontrar la razón de los perímetros de las bases.
(b) Cuál es la razón de los dos volúmenes?
(c) Suponiendo que el volumen del prisma mayor es ***54,0 cm³***, cuál es el volumen del prisma de menor tamaño?

6.- Los diámetros de dos cilindros semejantes tienen la razón $\frac{4}{5}$. ¿Si el volumen del cilindro de menor tamaño es igual a $48\pi\left(cm^3\right)$, cuál es la altura del cilindro de mayor tamaño?

7.- Encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ de manera tal que los dos prismas rectos mostrados abajo sean semejantes: