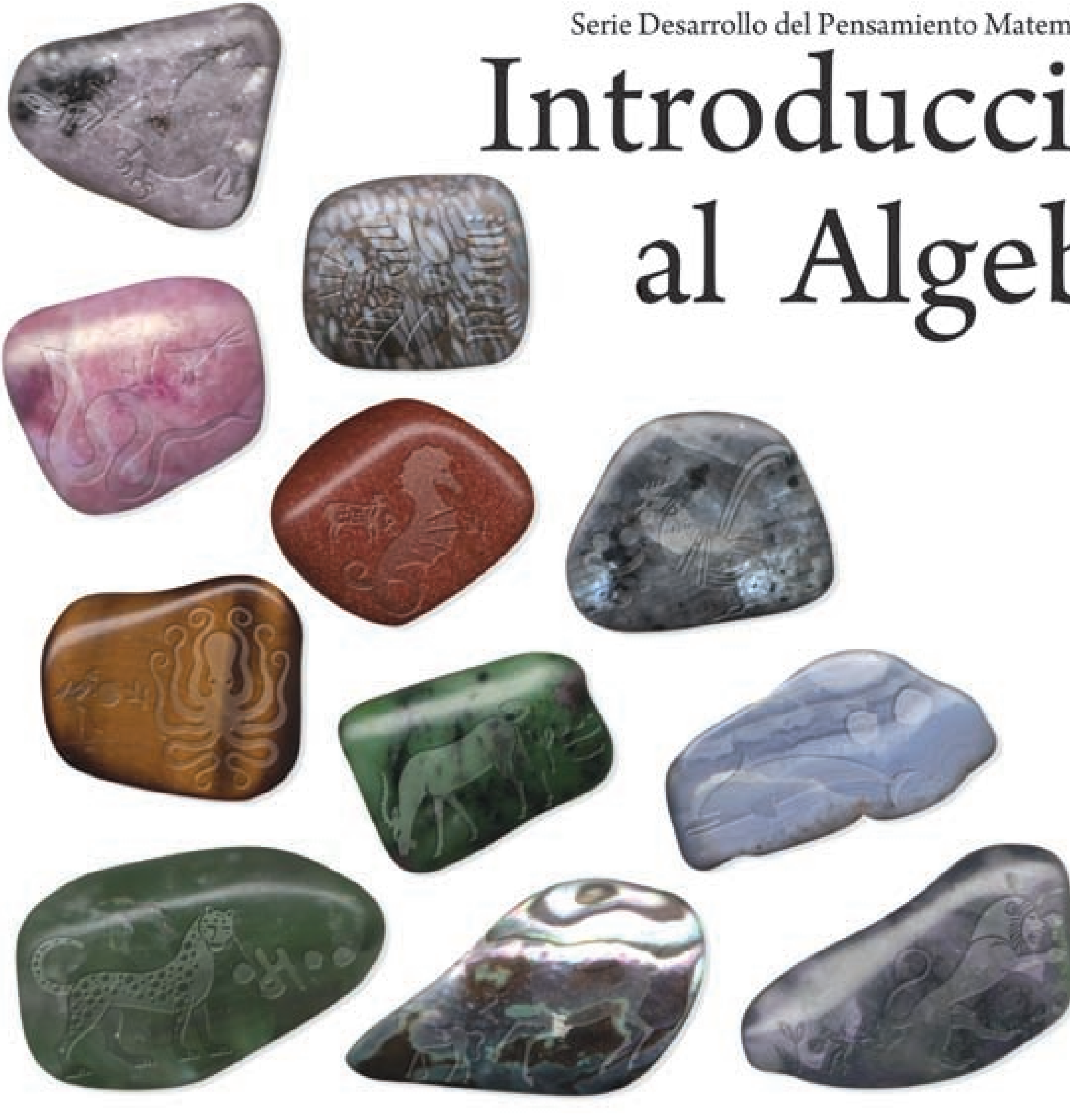
Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 19

Introducción al Algebra



Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 19

Introducción al Algebra

por Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Cuaderno Nº 19
Introducción al Algebra
Federación Internacional Fe y Alegría,
Julio 2007
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-6418-96-7
Matemáticas, Álgebra

"El maestro tira y eleva, hace que cada uno se vuelva a sí mismo y vaya más allá de sí mismo, que cada uno llegue a ser lo que es... Quizá el arte de la educación no sea otro que cada uno llegue hasta sí mismo, hasta su propia altura, hasta la mejor de sus posibilidades."

Jorge Larrosa

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno Nº 19
Introducción al Álgebra
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del ***Programa Internacional de Formación de Educadores Populares*** *desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

Diseño y Diagramación: ***Nubardo Coy***
Ilustraciones: ***Corina Álvarez***
Concepto gráfico: ***Juan Bravo***
Corrección de textos: ***Carlos Guédez*** *y* ***Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 60320075122630
Caracas, Julio 2007

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) – Corporación Andina de Fomento (CAF)

introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la introducción al Algebra.

1. ¿Necesitamos ir más allá de la Aritmética?

Esta es una buena pregunta porque si, como nos sugiere el título de este Cuaderno, aparentemente nos vamos a introducir en otro campo de la matemática, debemos detenernos y observar dónde estamos parados, de dónde venimos y qué hemos recorrido hasta ahora. Y si hemos de avanzar, necesitamos saber qué nos puede aportar este nuevo campo, en términos de nuevos conocimientos y, también, de profundización y extensión de los conocimientos anteriores.

Así que para empezar a responder la pregunta inicial, recordemos parte de lo que hemos presentado hasta ahora. En los Cuadernos 2 al 11 trabajamos con los números, con las operaciones entre ellos, con las propiedades de tales operaciones, con las relaciones que pueden descubrirse y construirse entre los números, con ciertas regularidades que pueden presentarse, y con patrones que rigen secuencias de números.

Descubrimos, además, que todo lo anterior nos ayudaba a resolver multitud de problemas de naturaleza y contextos muy diversos, ya que el mundo de los números, de sus operaciones y de sus relaciones, se nos presentaba como una colección muy rica de modelos utilizables para esta tarea de resolver problemas, algunos de éstos generados en nuestro entorno y otros de carácter más lúdico, pero siempre como un reto a nuestra capacidad de hallar soluciones a los problemas. Y además aprendimos a resolverlos por vías muy particulares, entre las que destacamos la del ensayo y ajuste.

El mundo de los números, de sus operaciones y de sus relaciones, de sus regularidades y patrones, de la resolución de problemas con modelos y métodos propios... Estamos hablando de la Aritmética.

Y volviendo a la tarea de responder la pregunta inicial, vamos a recordar algunos puntos en los que dimos algunos pasos hacia un más adelante que no llegamos a identificar en su momento, pero que bien podemos mirar y valorar ahora como un nuevo campo, extensión espontánea de la Aritmética. En lo que sigue trataremos, pues, de resaltar aquellas situaciones o circunstancias ya trabajadas que nos pueden sugerir la necesidad de avanzar a partir de la Aritmética.

2. Las generalizaciones en la Aritmética

2.1. Representación de las propiedades de las operaciones

En los Cuadernos dedicados a las diversas operaciones aritméticas hemos hablado de las propiedades de dichas operaciones. Por ejemplo, la adición de números naturales presenta las propiedades conmutativa, asociativa, y de existencia de un elemento neutro. Así presentábamos, por ejemplo, la primera de estas propiedades (Cuaderno 3, p. 13):

"*Conmutativa*: El orden en que se consideran dos sumandos no modifica su suma.
Por ejemplo, sumar 5 a 8 ó sumar 8 a 5 produce el mismo resultado."

5 + 8 = 8 + 5
a + b = b + a

En el caso anterior, hubiéramos podido representar la propiedad escribiendo: 5 + 8 = 8 + 5. Pero, evidentemente, la propiedad no se restringe al ejemplo indicado; sirve ***para cualquier par de números naturales***. ¿Cómo escribimos, representamos, esta última afirmación?

Una manera sencilla de hacerlo es ***utilizar letras***, bajo el supuesto compartido por todos (escritor y lectores) de que tales letras esconden, representan, números naturales. Y así, si convenimos en llamar *a* y *b* a dos números naturales cualesquiera, la propiedad asociativa de la adición se representaría:

Conmutativa: Para todo par de números naturales *a* y *b*, se verifica: $a + b = b + a$.

¿Qué hemos ganado con esta forma de representación de la propiedad mencionada? ***Hemos ganado en generalidad***. Ahora tenemos una forma de representación que puede referirse a cualquier número natural, a cualquier par de números naturales, etc.

Y lo mismo ocurre si se trata de otro tipo de números. Por ejemplo, la misma propiedad conmutativa de la adición puede referirse a las fracciones, en cuyo caso escribiremos:

Conmutativa: Para todo par de fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se verifica: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

Análogamente, si nos hubiéramos referido a la propiedad asociativa de la adición de números naturales, expresada así en el Cuaderno 3 (p. 13):

"*Asociativa:* Si hay más de dos sumandos, el orden progresivo en que "entran" en la suma es indiferente: el resultado siempre es el mismo. Por ejemplo, si hay que sumar 15, 37 y 25, puede hacerse en cualquier orden: 15 más 37 y luego más 25, ó 37 más 25 y luego más 15, ó 25 más 15 y luego más 37", el uso de letras nos llevaría a esta representación generalizada:

Asociativa: Para cualesquiera tres números naturales, a, b y c, se verifica: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Y la conjunción de las propiedades conmutativa y asociativa nos permitiría extender la representación anterior a:

Para cualesquiera tres números naturales, a, b y c, se verifica: $(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$.

Otra situación en la que el uso de letras resulta prácticamente necesario para ganar en generalidad, es la referente a las propiedades de las operaciones con potencias de los números naturales. Al respecto, en el Cuaderno 6 (p. 19) escribíamos (adelantándonos a lo que estamos diciendo ahora):

"Al multiplicar, por ejemplo, $2^5 \times 2^3$ se obtiene: $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$. Análogamente, se comprueba que $5^2 \times 5^4 = 5^6$. Y así con cualquier otro ejemplo. No es, pues, difícil generalizar la propiedad: *El producto de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.* Simbólicamente (a, n y m son números naturales): $a^n \times a^m = a^{n+m}$".

De modo que ***el uso de las letras nos permite generalizar la representación de las propiedades de las operaciones aritméticas aplicables a los números naturales***.

Si observamos bien el proceso de generalización que acabamos de mostrar, nos daremos cuenta de que hemos sustituido unos símbolos abstractos (los números) por otros ***símbolos más abstractos*** todavía (las letras). En efecto, las letras son una abstracción de los números, que ya son una abstracción de realidades de nuestro entorno.

Con el uso de las letras ganamos en generalidad, pero se nos plantea una cuestión: así como las expresiones con los números debían guardar ciertas reglas de escritura, lo mismo debe ocurrir para las expresiones que se escriben con las letras como símbolos. En otras palabras, debemos conocer y manejar la ***nueva sintaxis simbólica***.

2.2. La sintaxis simbólica literal

Ya hemos establecido que las letras serán los símbolos que representarán a los números naturales de una forma generalizada. Estos ***símbolos literales*** reciben el nombre genérico de ***indeterminadas***, por cuanto su valor numérico no está determinado en principio; es decir, puede adoptar cualquier valor.

Las operaciones expresadas con las indeterminadas se representan así:

Operación	Representación literal	Ejemplos de situaciones numéricas representadas	Ejemplos de expresiones literales o numérico-literales
Adición	$a + b$	3 + 5	$y + z$; $n + 1$; $12 + x$; $c + d + 1$
Sustracción	$a - b$	15 – 3	$r - s$; $m - 1$; $10 - b$; $x - y - 2$
Multiplicación	ab; $a.b$	3 x 5	mn; $2x$; $5ab$; $2z.3y$
Potenciación	a^n	5^3	x^y; a^2; 3^n
División	$a : b$; a / b $(b \neq 0)$	8 : 4; 15/3	$z : y$; $x / 2$; $1/n$

Como se puede apreciar, el cambio más significativo se halla en la representación de la multiplicación, en la que se omite el signo (x) utilizado en el terreno aritmético; ahora podemos utilizar un punto (.) entre los números y variables que se multiplican, o no colocar nada. De este modo, si en una expresión como $3yz$, se asigna a y el valor 5 y a z el valor 4, no se obtiene como resultado el número 354, sino el producto de 3 x 5 x 4, es decir, 60.

Un objeto como $3yz$, ó $2x$, ó n, recibe el nombre de ***término***; el número que acompaña a la ***parte literal*** se denomina ***coeficiente***: 3 en $3yz$, 2 en $2x$, ó 1 en n. Cuando varios términos se ligan mediante signos de operaciones, se forma una ***expresión algebraica***. Ejemplos de esta última pueden ser: $a + b$; $x - y + 5$; $5ab - a^2 + b^2$; etc.

Otro elemento a considerar es el ***orden en que deben efectuarse las operaciones***. Por ejemplo, la expresión $a + bc$ indica que primero debería efectuarse la multiplicación de b y c, para agregar después al producto el valor de a. Análogamente, la expresión $a/b - c$ indica que primero debería efectuarse la división de a entre b, para restar después el valor de c.

Ahora bien, ¿cómo escribiríamos la expresión que recoja la operación de "dividir a entre la diferencia de b y c"? Indudablemente, no se trata de la expresión anterior, $a/b - c$, ya que ahora no puedo proceder a la división hasta que no tenga la diferencia de b y c; debo calcular primero esta diferencia.

Debemos contar con unos símbolos y unas reglas que nos señalen cómo hacerlo. Pues bien, para ello disponemos de los paréntesis –del tipo ( ), [], {}- como elementos auxiliares. Así, la operación de "dividir a entre la diferencia de b y c" se expresaría: $a / (b - c)$.

En general, éste es el ***orden de aplicación de las operaciones indicadas en las expresiones literales o numérico - literales***:

1. Operaciones indicadas dentro de los paréntesis. Si hay paréntesis dentro de otros paréntesis, se procede a resolverlos de adentro hacia fuera.
2. Potencias.
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de estas reglas:

Ejemplo	Aplicación de las reglas	Caso numérico
$2cd$	Se efectúa la multiplicación de los tres factores: $2, c, d$	Si $c = 3$, $d = 5 \rightarrow$ $2cd = 2 \times 3 \times 5 = 30$
$6x - 3y$	Se efectúan primero las multiplicaciones $6x$ y $3y$; luego se restan ambos productos	Si $x = 3$, $y = 1 \rightarrow$ $6x - 3y = 18 - 3 = 15$
$2n + 1$	Se efectúa la multiplicación $2n$; luego se suma 1 al producto	Si $n = 3 \rightarrow$ $2n + 1 = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$
$2(n + 1)$	Se suma 1 a n; luego se multiplica la suma por 2	Si $n = 3 \rightarrow$ $2(n + 1) = 2 \times (3 + 1) = 2 \times 4 = 8$
$3(2x - y)$	Se efectúa la multiplicación $2x$; se resta el valor de y; se multiplica la diferencia anterior por 3	Si $x = 5$, $y = 9 \rightarrow$ $3(2x - y) = 3 \times (10 - 9) = 3 \times 1 = 3$

$5(a+b)-3a$	Se efectúa la suma de a y b y se multiplica esta suma por 5; se efectúa la multiplicación $3a$; se restan ambos productos	Si $a = 1$, $b = 0 \rightarrow$ $5(a+b) - 3a =$ $5 \times (1+0) - 3 \times 1 =$ $5 \times 1 - 3 \times 1 = 5 - 3 = 2$
$3b^2$	Se calcula la potencia b^2; se multiplica su valor por 3	Si $b = 5 \rightarrow$ $3b^2 = 3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$
$(3b)^2$	Se efectúa la multiplicación $3b$; este producto se eleva al cuadrado	Si $b = 5 \rightarrow$ $(3b)^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$
$m^2 - n^2$	Se calculan las potencias m^2 y n^2; se restan ambos valores	Si $m = 4$, $n = 3 \rightarrow$ $m^2 - n^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
$(m-n)^2$	Se efectúa la resta de m y n; se eleva al cuadrado la diferencia	Si $m = 4$, $n = 3 \rightarrow$ $(m-n)^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$
$\frac{2a^2}{3a+1}$	Se calcula la potencia a^2 y se multiplica su valor por 2 (resultado 1). Se efectúa la multiplicación $3a$ y se agrega 1 al producto (resultado 2). Se dividen ambos resultados	Si a = 3 $\rightarrow$ $\frac{2a^2}{3a+1} = \frac{2x3^2}{3x3+1} = \frac{2x9}{9+1} = \frac{18}{10}$

1. En cada uno de estas expresiones, aplique ordenadamente los pasos a seguir y halle su valor numérico para los valores de la(s) indeterminada(s) que se indican:

a) $3y + 5$; $y = 1$

b) $3(y + 5)$; $y = 1$

c) $2a^2 + 2$; $a = 10$

d) $3b + 4(c/2)$; $b = 1$, $c = 2$

e) $(16m - n^2) / 4$; $m = 1$, $n = 4$

f) $\sqrt{25 - x^2} + \frac{x}{3}$; $x = 3$

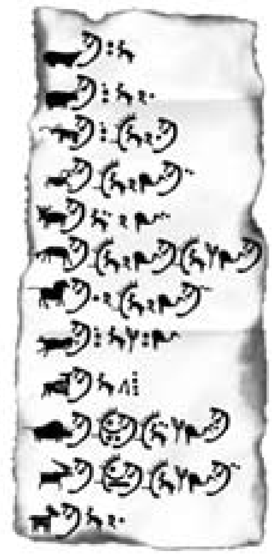
g) $2(3 + 5z)^2 - (z + 3)$; $z = 1$

h) $[15 - (m - n)^3]^2$; $m = 5$, $n = 3$

i) $8[2(y - 3) + 4(7 - y)]$; $y = 5$

2. Escriba las expresiones correspondientes a cada uno de los enunciados siguientes [utilice las letras de las indeterminadas así: *a*, si hay una sola indeterminada; *a*, *b*, si hay dos indeterminadas; etc.]:

a) el doble de un número (es decir, el doble de *a*)
b) el triple de un número, más 1
c) el triple de “un número más 1”
d) el cuadrado de la suma de dos números
e) la suma de los cuadrados de dos números
f) la suma de dos números multiplicada por su diferencia
g) 1 más el cubo de la suma de dos números
h) el triple de un número menos el doble de otro número
i) la cuarta parte de un número
j) la mitad de la diferencia de los cuadrados de dos números
k) la quinta parte del cuadrado de la diferencia de dos números
l) el número siguiente a uno dado



Al igual que en Aritmética, ahora también puede hablarse de (y representar) la ***igualdad de dos expresiones simbólicas literales***; por ejemplo, $4a + b = 3c - 2d$. Esto significa que para algunos números, el cuádruple del primero más el segundo, toma el mismo valor que el triple del tercero menos el doble del cuarto. Puede verificarse esta igualdad para muchos grupos de cuatro números naturales, debidamente seleccionados.

En este punto, conviene llamar la atención respecto al manejo del signo igual. En Aritmética, estamos acostumbrados a ver el signo igual “detrás” de una operación indicada, a la espera de colocar “a la derecha” del signo el resultado de la operación. Así por ejemplo, “5 + 7 =” invita a colocar 12 a la derecha: “5 + 7 = 12”.

Ahora, en el caso de las expresiones simbólicas literales, el signo de igualdad no es una invitación para obtener el resultado numérico de una operación; simplemente indica un “equilibrio”, una “simetría”, entre las expresiones que se hallan a ambos lados del signo: ambas tienen el mismo valor.

Ya nosotros utilizamos este tipo de igualdad en algunos temas de Aritmética; por ejemplo, al hablar de la potenciación (Cuaderno 6, p. 17) escribíamos igualdades como éstas para representar algunas regularidades referentes a los números naturales:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$(n+m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$$

Ahora vamos a referirnos particularmente al caso de estas y otras regularidades.

2.3. La representación de regularidades referidas a los números naturales

Así como hemos descubierto la necesidad de introducir expresiones simbólicas literales, con su sintaxis propia, para representar las propiedades de las operaciones con números naturales y, de este modo, ganar en generalidad, lo mismo ocurre para la representación de regularidades que conciernen también a los números naturales.

Esta necesidad de generalización, de expresar la generalidad, es tan sentida que, como acabamos de recordarlo, no pudimos resistir la “tentación” de utilizar expresiones simbólicas literales en algunos de los Cuadernos anteriores. Así que, “sin querer queriendo”, ya hemos justificado el uso de estas expresiones para representar regularidades propias de los números naturales.

El uso de la expresión simbólica literal de una regularidad [por ejemplo, $(n + 1)^2 - n^2 = n + (n + 1)$] abarca todos los casos numéricos particulares y “dice” la regularidad de una manera más resumida que su expresión verbal (“*la diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es igual a la suma de dichos números consecutivos*”). Sin embargo, quien lee $(n + 1)^2 - n^2 = n + (n + 1)$ debe estar siempre en capacidad de interpretar su contenido, es decir, de saber formular su expresión verbal.

Si n y m representan a dos números naturales cualesquiera, interprete las siguientes igualdades simbólicas literales:

a) $(n - m)^2 = n^2 - 2nm + m^2$

b) $(n + m) + (n - m) = 2n$

c) $(n + 1)\ (n + 3) = n^2 + 4n + 3$

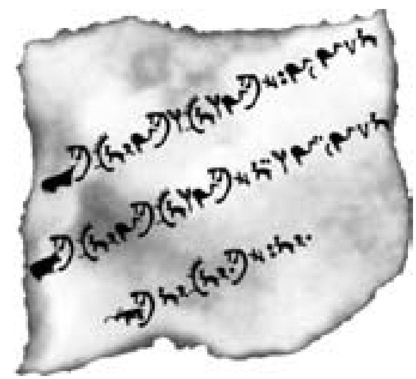
d) $n^3 - 1 = (n^2 + n + 1)(n - 1)$

3. Escriba la igualdad simbólica literal correspondiente a los siguientes enunciados (utilice n y m para designar las indeterminadas):

a) La suma de dos números menos la diferencia de ambos, es igual al doble del número menor.

b) La suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual al cuadrado del número mayor, menos el cuadrado del número menor.

c) La suma de dos números seguidos es igual al doble del primero, más 1 unidad.



2.4. La representación de patrones o términos generales de una sucesión de números

En los Cuadernos de Aritmética hemos planteado algunos ejercicios en los que se daban algunos términos de una sucesión de números y se pedía averiguar algún número omitido, o el siguiente de la sucesión. Un ejercicio de esta especie puede ser: *¿Cuál es el número que ocupa la posición 15 en esta sucesión de números: 2, 4, 6, 8, 10,...?*

Resolver este ejercicio implica averiguar cuál es la ley o regla que se aplica para generar cada uno de los números de la sucesión. Al intentar hacerlo nos percatamos enseguida de que estamos tratando con dos tipos de números: uno, el que indica la posición en que se halla cada número (n); y dos, el número que ocupa esa posición (a_n). Para el ejemplo dado:

Posición ocupada (n)	Número que ocupa esa posición (a_n)
$n = 1$	$a_1 = 2$
$n = 2$	$a_2 = 4$
$n = 3$	$a_3 = 6$
etc.	etc.

Pues bien, lo que tenemos que hacer es descubrir la relación que existe entre cada par de números: "posición ocupada" y "número que ocupa esa posición" (1 y 2; 2 y 4; 3 y 6; etc.); es decir, debe tratarse de una relación constante, la misma para cada par de números relacionados. En nuestro caso es sencillo: el número que ocupa una posición es el doble del número que indica la posición ocupada: a_n es el doble de n.

Ahora resulta sencillo representar esta relación: el ***término general de la sucesión*** es $a_n = 2n$. Ahora estamos listos para contestar la pregunta: el número que ocupa la posición 15 ($n = 15$) en esta sucesión es $a_{15} = 2 \times 15 = 30$. Y, además, podemos saber qué número ocupa cualquier otra posición en la sucesión, así como la posición que ocupa cualquier número; por ejemplo, el número 628 está en la posición 314 de esa sucesión (¿por qué?).

La sucesión que hemos presentado es la de los ***números pares*** positivos (> 0). Nos interesa destacar que, además de servirnos para averiguar cuál es el número par positivo que ocupa una determinada posición en la sucesión o, al revés, la posición que ocupa cualquier número par en ella, la expresión del término general se convierte en la expresión de cualquier número par; ***todo número par puede representarse mediante la expresión 2n***, en la que n denota cualquier número natural (de esta forma se incluye también el 0, que es un número par).

En este caso se dice que $2n$ representa cualquier número par, siendo n cualquier número natural. Esta última condición puede escribirse simbólicamente: para todo $n \in \mathbf{N}$ (el símbolo $\in$ se lee "que pertenece a"; **N** representa al conjunto de los números naturales); también suele decirse: para $n = 0, 1, 2,...$

He aquí algunos otros ejemplos:

Representación simbólica del término general	Tipo de número representado	Valores numéricos
$5n,\ n \in \mathbf{N}$	Múltiplos de 5	0, 5, 10, 15,...
$na,\ n \in \mathbf{N}$	Múltiplos de a	0, a, $2a$, $3a$,...
$2n + 1,\ n \in \mathbf{N}$	Números impares	1, 3, 5, 7,...
$10^n,\ n \in \mathbf{N}$	Potencias de 10	1, 10, 100, 1.000,...
$n^2 + 1,\ n \in \mathbf{N}$	Cuadrados de números naturales, más 1 unidad	1, 2, 5, 10, 17,...
$(n + 2)^2,\ n \in \mathbf{N}$	Cuadrados de los números naturales, a partir de 4	4, 9, 16, 25, 36,...
$n^2,\ n = 2, 3, 4,...$	Cuadrados de los números naturales, a partir de 4	4, 9, 16, 25, 36,...
$6n + 3,\ n \in \mathbf{N}$	Múltiplos de 6, más 3 unidades (números que, al dividirse entre 6, dan 3 como resto)	3, 9, 15, 21, 27,...
$\frac{2n+1}{2n-1},\ n = 1, 2, 3,...$	Fracciones de esa forma	$\frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7},...$
$(0,1)^n,\ n \in \mathbf{N}$	Potencias de 0,1	1; 0,1; 0,01; 0,001;...

4. Halle la representación simbólica del término general de las siguientes sucesiones (indique también los valores de n para los que se cumple):

a) 1, 5, 9, 13, 17, 21,...

b) 11, 13, 15, 17, 19,...

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64,...

d) 0, 2, 6, 12, 20, 30,...

e) 0,2; 0,04; 0,008; 0,0016;...

f) 1, 11, 21, 31, 41,...

g) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16},...$

h) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5},...$

i) 2, 7, 12, 17, 22, 27,...

2.5. La representación y prueba de conjeturas relativas a los números

En el Cuaderno dedicado a la divisibilidad (nº 8, pp. 10 y 11) se hablaba de las conjeturas, proposiciones que tienen que ver con números y que se cumplen para distintos valores numéricos. Por ejemplo, ésta: "Todo número par mayor que 4 es suma de dos números primos impares (conjetura formulada por Goldbach, un matemático alemán que vivió en el siglo XVIII)".

Las conjeturas se establecen a partir de una observación atenta de los que pasa con ciertos números. Una vez formuladas, se desea saber si se cumplen para todos los números. Es decir, se desea establecer su generalización. Esto no siempre es fácil y, como decíamos en el Cuaderno 8, hay algunas conjeturas "abiertas", que no han fallado hasta ahora, pero cuya generalización no se ha establecido todavía. Otras son más sencillas de verificar.

¿Y qué importancia tienen las conjeturas para el desarrollo de la matemática y para nosotros? Lo decíamos también en el Cuaderno 8 (p. 11): "...la curiosidad, la búsqueda, el planteamiento de conjeturas, el intento por verificarlas (o por refutarlas), el hacerse nuevas preguntas…, todo esto forma parte de la historia y del "ser" de la matemática, la manera como se construye por dentro [...], todo esto forma parte del clima en que debemos trabajar la matemática, parcela por parcela, nosotros y con nuestros alumnos".

El primer paso para intentar establecer la generalización de una conjetura, es decir, para verificar que se cumple para todos los números naturales, es expresarla en términos simbólicos literales. Y luego, trabajar con este tipo de expresiones para intentar llegar al resultado; esta segunda parte se denomina la prueba o demostración de la conjetura.

Veamos algunos ejemplos de prueba de conjeturas, a cuyos enunciados se ha llegado por observaciones atentas de lo que ocurre con los números.

La suma de dos números, más su diferencia, es igual al doble del número mayor.

Si representamos los números como a y b ($a > b$), la conjetura se expresa como: $(a + b) + (a - b) = 2a$, con $a, b \in \mathbf{N}$. Y su prueba es muy sencilla: $(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = a + a = 2a$.

La suma de dos números impares seguidos es múltiplo de 4.

Un número impar cualquiera puede ser representado, según vimos, como $2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. El número impar siguiente será $2(n + 1) + 1$, que puede escribirse como $2n + 2 + 1 = 2n + 3$. Si sumamos ambos números tenemos: $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n + 1)$. La suma es, pues, un múltiplo de 4, ya que es el producto de 4 por el número $(n + 1)$.

Tome un número de dos cifras (p. ej., 37); forme otro número con las cifras del anterior en orden invertido (73); obtenga la diferencia positiva entre ambos números (73 – 37 = 36). Haga lo mismo con otros números y observe bien las diferencias en cada caso. ¿Qué conjetura se le ocurre? ¿Cómo puede estar segura(o) de su enunciado? (Cuaderno 8, p. 11).

Un número de dos cifras como 37 puede descomponerse así: $37 = 3 \times 10 + 7$ (Cuaderno 2). Si ahora queremos generalizar esta expresión para cualquier número de dos cifras de la forma ab (ojo, en este momento no estamos refiriéndonos al producto de a por b), sabemos que su valor es $10a + b$; el número con las cifras en orden invertido, ba, valdrá $10b + a$, con $a, b \in \mathbf{N}$. Supongamos que $b > a$. En este caso, $10b + a$ es mayor que $10a + b$ y la resta entre ambos números dará como resultado: $(10b + a) - (10a + b) = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a = 9(b - a)$. Esta última expresión representa a un múltiplo de 9 (lo mismo ocurre si $a > b$). Luego la conjetura dice que la resta de esos dos números de dos cifras, sean cuales sean, es un múltiplo de 9. Y acabamos de dar su prueba, que nos permite estar seguros de su enunciado, sin necesidad de hacer todas las verificaciones posibles con los números.

Si a todo número impar elevado al cuadrado, se le resta 1 unidad, se obtiene un número múltiplo de 8.

Si tomamos un número impar $2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$, su cuadrado será $(2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1$. Si a este resultado se le resta 1, nos queda $4n^2 + 4n$, que puede expresarse en la forma $4n(n + 1)$. Esta última expresión puede interpretarse como el producto de tres factores: 4, n y $(n + 1)$. Ahora bien, si n es impar, $(n + 1)$ será par; y si n es par, $(n + 1)$ será impar, ya que se trata de dos números seguidos. Y si uno de ellos es par, el producto $n(n + 1)$ será siempre par, y al multiplicarse por 4, la expresión total $4n(n + 1)$ será múltiplo de 8.

Representar simbólicamente una conjetura y probarla, no es una tarea sencilla; sin embargo, le proponemos las siguientes para que intente expresarlas y probarlas:

a) *La suma de dos números, menos su diferencia, es igual al doble del número menor.*
b) *La suma de tres números seguidos es un número múltiplo de tres.*
c) *El producto de dos números impares seguidos, más 1 unidad, es un múltiplo de 4.*
d) *Tome un número de dos cifras, inviértalo como antes, pero ahora sume los dos números. Haga lo mismo con otros números y observe los resultados. Nuevamente, ¿qué conjetura se le ocurre? ¿Cómo puede estar segura(o) de su enunciado?*

Como podemos apreciar, las conjeturas se establecen en el campo de la Aritmética y son un motor para el avance del conocimiento matemático, pero necesitan de las expresiones simbólicas literales para probar su carácter general.

3. Las ecuaciones

Hasta ahora hemos visto la conveniencia y la necesidad de avanzar más allá de la Aritmética, precisamente para dotar de generalidad a la representación de:

las propiedades de las operaciones entre números naturales,
ciertas regularidades que se presentan entre tales números,
los patrones o términos generales de secuencias numéricas,
conjeturas acerca de los números, y para su correspondiente prueba.

Existe otro campo de trabajo fundamental en la Aritmética, que es la resolución de problemas. Hemos trabajado con algunos métodos propios, tales como utilizar las operaciones y sus propiedades como modelos de las situaciones problemáticas; también nos hemos servido del método general de ensayo y ajuste, que sugiere probar con valores particulares de la incógnita del problema y tomar decisiones a partir de los resultados así obtenidos, hasta llegar a la solución.

Pero después de lo desarrollado en este Cuaderno, es lícito preguntarnos: ¿También es posible avanzar hacia procesos más generales de resolución de problemas? ¿Existe algún método general, válido como el de ensayo y ajuste, que permita abordar la resolución de un problema sin tener que ir probando con valores particulares de la incógnita del problema?

Veamos este problema, planteado y resuelto con anterioridad (Cuaderno 3, p.22): "La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuál es el menor de ellos?". La solución dada es la siguiente (p.25): "Basta con aproximarnos por tanteo. Se llega al valor de 25 (25 + 27 + 29 = 81)".

Si en el enunciado se nos hubiera dicho que la suma es 126, el método de tanteo hubiera funcionado igual, pero habría que ensayar con otros números particulares, hasta llegar al ajuste correspondiente.

¿Hay otra forma de plantear la búsqueda de la solución? Sí. Pensemos en el enunciado de esta manera: tengo que sumar al número menor otro que es 2 unidades mayor, y un tercero que es 2 unidades mayor que el anterior, es decir, 4 unidades más que el primero; en total estoy acumulando tres veces el número menor, más 6 unidades; este total debe valer 81.

Podemos abreviar todo ese discurso si al número menor (que es la incógnita del problema) lo designamos... con una letra; por ejemplo, n. Entonces el planteamiento hacia la solución se escribiría: $n + (n + 2) + (n + 4) = 81$. ¿Qué es esta expresión? ¿Qué representa? Desde luego, no representa una propiedad de la suma de números, tampoco una regularidad que se cumple para todos los números, ni tampoco el patrón de una sucesión numérica, ni tampoco una conjetura de carácter general. ***A pesar de que utilizamos un símbolo literal, ya no estamos en el ámbito de las expresiones que representan una generalización...***

Esa es una expresión particular, en la que el símbolo n representa a un número concreto, en un contexto concreto (el de los números impares), que debe satisfacer unas condiciones concretas (que la suma indicada valga 81). Este objeto matemático nuevo recibe el nombre de ***ecuación***.

En lo que sigue vamos a estudiar con detenimiento este nuevo objeto matemático y cómo se trabaja con él para poder llegar a la solución de los problemas, es decir, a obtener el valor de la incógnita de cada problema. Pero lo que nos interesa destacar es que ***llevar el enunciado de un problema a una ecuación es un nuevo método para resolver ciertos problemas***. Y es un método general.

En efecto, si en el problema anterior la suma debe ser 129, la ecuación correspondiente será $n + (n + 2) + (n + 4) = 129$. Cambia ese dato final, pero no la estructura de la ecuación. Más aún, si el enunciado indica que la suma de 5 números impares consecutivos es 405 y hay que hallar el mayor, la ecuación será $(n - 8) + (n - 6) + (n - 4) + (n - 2) + n = 405$; la ecuación tiene una estructura similar a las anteriores. Es decir, ***la estructura de la ecuación está preparada para aceptar diversos casos particulares y representarlos***.

Vamos a aprender a "resolver" ecuaciones para poder resolver problemas. Pero, de suyo, el objeto matemático ecuación es muy importante en sí mismo, así que vamos a estudiarlo con detenimiento.

3.1. Construir ecuaciones

La primera pregunta que tenemos que responder es, indudablemente, ¿qué es una ecuación? Nada mejor para ello que saber construirla: si sabemos "fabricar" una ecuación tendremos asegurada una respuesta a esa pregunta. Vamos a hacerlo. Tomemos, por ejemplo, el número 13 y escribamos algunas expresiones aritméticas que liguen números naturales con operaciones y cuyo resultado sea 13. En seguida se nos vienen a la mente las más sencillas, las que utilizan dos números ligados por un signo de operación; por ejemplo: 9 + 4; 18 – 5; 26 : 2; 5 + 8; etc.

En un segundo paso, seguramente empezamos a manejar expresiones más complejas, con más números o más operaciones implicadas; por ejemplo: 6 + 6 + 1; 8 + 10 – 5; 3 x 4 + 1; 30 : 2 – 2; 2 x 5 + 3; 6 x (4 – 1) – 5; 4^2 + 4 – 7; etc. Como se puede apreciar, la lista de expresiones no tiene fin.

Si ahora tomamos dos cualesquiera de esas expresiones aritméticas y las igualamos estamos construyendo una ***igualdad aritmética***. Por ejemplo: 2 x 5 + 3 = 5 + 8. Bien; supongamos que alguien tapa con el dedo o con un símbolo cualquiera (nos puede servir ♣) el número 5, presente a ambos lados de la igualdad. Nos quedaría a la vista 2 x ♣ + 3 = ♣ + 8.

Desde luego, la expresión resulta extraña; la igualdad indicada ya no es transparente como antes, cuando se podía calcular el valor de las expresiones ubicadas a cada lado del signo = y verificar su igualdad. En lugar de esta sencilla tarea de verificación tenemos otra un poco más compleja: descubrir qué número debe estar escondido tras el símbolo ♣ para que la igualdad vuelva a ser verificable.

Hay que hacer notar que los símbolos que habitualmente se utilizan para "esconder" los números son los de uso más universal: las letras. De este modo, si tomo la letra m (que es la inicial de mi nombre), la expresión anterior será: $2 \times m + 3 = m + 8$ cuya escritura formal, según vimos anteriormente, será: $2m + 3 = m + 8$. Acabamos de construir una ecuación.

También podríamos haber partido de la igualdad aritmética $4^2 + 4 - 7 = 3 \times 4 + 1$ en la que, si escondemos el número 4 tras la letra n (que es la última letra de mi nombre), llegamos a la expresión: $n^2 + n - 7 = 3 \times n + 1$, cuya escritura formal será: $n^2 + n - 7 = 3n + 1$. Hemos construido otra ecuación. Ahora ya podemos responder a la pregunta anterior, qué es una ecuación.

3.2. Conceptos y elementos asociados a una ecuación

Una ***ecuación*** es una igualdad aritmética en la que hay algún número desconocido.

El símbolo (letra) que "esconde" ese número se denomina ***incógnita***.

Resolver una ecuación significa hallar el valor numérico de la incógnita.

Una ecuación está ***bien resuelta*** si al sustituir la incógnita por el valor numérico hallado se hace verificable la igualdad aritmética inicial. En este caso hemos hallado la ***solución*** de la ecuación.

Siguiendo el ejemplo anterior, construya dos ecuaciones para cada uno de los casos siguientes, en los que se da el valor de la igualdad aritmética inicial y el valor que debe tener la incógnita (el número que se escondió):

Valor de la igualdad aritmética inicial	Valor de la incógnita
20	3
5	0
1	4
16	7
0	5
115	25

5. Determine si la solución propuesta para cada ecuación es la solución correcta:

a) $5s - 7 = 2 + 2s$; $s = 2$

b) $7c - 10 = 30 - c$; $c = 5$

c) $18e + 5 = 5$; $e = 0$

d) $3x^2 + 5 = x + 8$; $x = 1$

e) $60 = 85 - 15t$; $t = 5$

f) $3u^2 - 15u = 15u$; $u = 10$

g) $3u^2 - 15u = 15u$; $u = 0$

h) $3m - 9 = 3(m - 3)$; $m = 4$

i) $3m - 9 = 3(m - 3)$; $m = 5$

En una ecuación ya construida encontramos los siguientes ***elementos***:

Los ***miembros*** de la ecuación son las expresiones que se ubican a cada lado del signo =. Así, en $2m + 3 = m + 8$, el miembro ***de la izquierda*** es $2m + 3$, y el ***de la derecha***, $m + 8$. Y análogamente, $n^2 + n - 7$ y $3n + 1$ en $n^2 + n - 7 = 3n + 1$.

En cada miembro encontramos ***términos***, que son las expresiones separadas por los signos + ó –. Por ejemplo, en $n^2 + n - 7$ hay tres términos: n^2, n y 7. Algunos términos tiene su ***coeficiente*** numérico y su ***parte literal***; por ejemplo, en $3n$, 3 es el coeficiente y n la parte literal; y en m, el coeficiente es 1 y m la parte literal. Otros términos se reducen a un número, como por ejemplo, 3, 8, 7, 1.

El ***grado de la ecuación*** viene dado por el mayor exponente que presenta la incógnita respectiva. Así, la ecuación $n^2 + n - 7 = 3n + 1$ es de grado 2 o de segundo grado, mientras que $2m + 3 = m + 8$ es una ecuación de primer grado o de grado 1.

El ***número de incógnitas*** de una ecuación es otro elemento a tomar en cuenta. Así, $2m + 3 = m + 8$ y $n^2 + n - 7 = 3n + 1$ son dos ecuaciones con una sola incógnita cada una. En cambio, $3p + 2r = 16$ es una ecuación con dos incógnitas.

También suele tomarse en cuenta la naturaleza de las soluciones, es decir, el tipo de números que se obtienen al resolver una ecuación. Las ecuaciones cuyas soluciones son exclusivamente números naturales suelen denotarse como “ecuaciones en N” (N designa el conjunto de los números naturales).

En este Cuaderno trabajaremos con ***ecuaciones de primer grado con una incógnita en N***.

¿Por qué la x en nuestras ecuaciones?

Si tomamos cualquier libro de matemática en el que se trate de ecuaciones, encontraremos que casi siempre la incógnita se designa con la letra *x*. ¿De dónde viene esta costumbre? ¿Es muy reciente? Pues no es tan reciente; lo cierto es que tiene unos cuantos siglos de antigüedad. De hecho proviene de los árabes, aunque su fundamentación es anterior. Veámoslo.

Las ecuaciones se plantearon y resolvieron desde las culturas babilónica y egipcia; es decir, quizá desde el cuarto milenio antes de Cristo (Kline, 1992). Claro que no se escribían como hoy en día, en la forma simbólica y reducida que nosotros utilizamos desde hace unos pocos siglos. El planteamiento de una ecuación consistía en “echar el cuento” de lo que había que hacer con el valor desconocido: multiplicarlo por tal cantidad, sumarle tanto, etc., para obtener tanto...

El término para designar este valor desconocido variaba de una cultura a otra, pero a partir de cierto momento fue designado habitualmente como "la cosa" (todavía, en nuestras culturas utilizamos expresiones como ésa para referirnos a objetos de cuyo nombre no nos acordamos o que no queremos mencionar en público...).

"La cosa" en latín se dice "res" (de ahí viene la palabra república, "res publica", "la cosa pública", aunque algunos de nuestros gobernantes la han solido convertir en "la cosa de ellos"...). Y en árabe, *xai*. Pues bien, la letra inicial *x*, como abreviatura de *xai*, pasó a convertirse en el símbolo que representaba a la cosa desconocida, a la incógnita. Estamos hablando del siglo IX de nuestra era, cuando los árabes dominaban buena parte de Asia, el sur de Europa y el norte de África, y se convirtieron en los propagadores de las culturas antiguas... y de la *x* de nuestras ecuaciones.

Esa costumbre de utilizar la letra *x* para designar la incógnita de la ecuación ha trascendido el campo de la matemática y hoy en día sirve para referirse a lo desconocido, lo incógnito. Así, hablamos de rayos X, los expedientes X, los hombres X, la sustancia X, etc.

3.3. Ecuaciones equivalentes

Muchas ecuaciones pueden compartir ***la misma solución***. Las que lo hacen se denominan ***ecuaciones equivalentes***. Por ejemplo y dentro del conjunto de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en N, $2m + 3 = m + 8$ y $20 - 3x = x$ son ecuaciones equivalentes, ya que para ambas la solución es 5.

Nos interesan, en particular, las ecuaciones que se van derivando de una ecuación dada a partir de transformaciones que sean válidas. Como una ecuación es una igualdad aritmética, las transformaciones válidas son aquellas que conservan la igualdad de ambos miembros. Veamos algunas de ellas, aplicadas a la ecuación $2m + 3 = m + 8$ cuya solución es 5.

Transformaciones válidas	Ejemplos	Solución
Cambiar la letra que designa a la incógnita	$2s + 3 = s + 8$ $2c + 3 = c + 8$	$s = 5$ $c = 5$
Cambiar de lado los miembros de la ecuación	$m + 8 = 2m + 3$	$m = 5$
Cambiar el orden de los términos en los miembros de la ecuación	$3 + 2m = m + 8$ $3 + 2m = 8 + m$	$m = 5$ $m = 5$
Sumar el mismo término en ambos miembros de la ecuación	Sumar 7 → $2m + 10 = m + 15$ Sumar $3m$ → $5m + 3 = 4m + 8$	$m = 5$ $m = 5$
Restar el mismo término en ambos miembros de la ecuación	Restar 3 → $2m = m + 5$ Restar m → $m + 3 = 8$	$m = 5$ $m = 5$
Multiplicar ambos miembros de la ecuación (los coeficientes de todos los términos) por el mismo número (≠ 0)	Multiplicar por 3 $6m + 9 = 3m + 24$	$m = 5$
Dividir ambos miembros de la ecuación (los coeficientes de todos los términos) por el mismo número (≠ 0)	Dividir entre 2 → $m + \frac{3}{2} = \frac{m}{2} + 4$	$m = 5$
Combinar algunas de las transformaciones anteriores	Multiplicar por 2 y agregar 5 → $4m + 11 = 2m + 21$ Combinar las tres primeras → $8 + p = 2p + 3$	$m = 5$ $p = 5$

6. Escriba en cada caso la ecuación resultante de las transformaciones que se indican para la ecuación dada:

a) $10 + 4x = 30 - 6x$; dividir los dos miembros entre 2 y restar $2x$ en ambos
b) $13 - 5d = 4 + 4d$; cambiar de lado los miembros de la ecuación, colocar p como incógnita y sumar $5p$ en ambos miembros

c) ; $\frac{3x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5x}{4} + \frac{1}{2}$ multiplicar ambos miembros por 4, sumar 1 y restar $5x$ en cada miembro

d) $7(z + 2) = 14$; dividir los dos miembros entre 7 y restar 2 en ambos

e) $5 = 27 - 2c$; restar 1 en los dos miembros, dividir ambos entre 2, restar 2 en cada miembro y cambiarlos de lado

f) ; $4 + \frac{2x}{3} = 6$ restar 4 en los dos miembros, multiplicar ambos por 3, dividirlos entre 2 y colocar y como incógnita

7. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes a la ecuación $11 - 2x = 7x + 2$ [en los casos afirmativos, trate de precisar la(s) transformación(es) aplicada(s)]:

a) $2 + 7r = 11 - 2r$
b) $15 - 2p = 7p + 8$
c) $11 - m = 2 + 7m$
d) $5s + 2 = 11$
e) $4 + 14n = 22 - 4c$
f) $9 - 5x = 4x$
g) $2 + 5t = 11 - 4t$
h) $6 + 15v = 33 - 12v$
i) $9 = 9x$
j) $22 - 4g = 4 + 7g$
k) $7u + 1 = 11 - u$
l) $33 - 2z = 25z + 6$

8. Construya ahora dos ecuaciones equivalentes y súmelas, miembro a miembro. ¿La ecuación resultante será también equivalente a las dadas?

3.4. Resolución de ecuaciones

Como se indicó anteriormente, resolver una ecuación es encontrar su solución, es decir, el vαlor numérico de la incógnita; este valor, al sustituirse en la ecuación, restituye y hace verificable la igualdad aritmética inicial.

Antes de abordar los diversos procedimientos disponibles para resolver ecuaciones, digamos que éstas pueden presentar varias formas, como ya hemos visto en los ejemplos presentados hasta ahora. La forma $\mathbf{a}\ x \pm \mathbf{b} = \mathbf{c}\ x \pm \mathbf{d}$, en la que a, b, c y d son coeficientes (generalmente, números naturales, alguno de los cuales puede ser eventualmente igual a cero), se denomina ***forma canónica de la ecuación de primer grado con una sola incógnita en N***. Vamos a trabajar en los métodos para su resolución.

a) Los métodos intuitivos

Corresponden a ecuaciones muy sencillas; por ejemplo, para resolver una ecuación como $5 + z = 11$, basta recordar las tablas de la suma o, simplemente, contar desde 5 hasta 11 y deducir que z debe ser igual a 6. O para el caso de $2x + 12 = 5x$, es fácil percibir que, como $2x + 3x$ es igual a $5x$, entonces 12 debe corresponder a $3x$, con lo que x debe valer 4. Igualmente, para ecuaciones como $2u + 15 = 23$, podemos percibir que $2u$ equivale a 8 (para ajustar el resultado de la suma $8 + 15 = 23$), de donde se sigue que u es 4.

En todos estos casos prevalece ***una visión integral de la ecuación como un todo***, como una relación de igualdad que comprende todos los términos de los dos miembros, y no sólo una visión aislada de la incógnita. Por esta razón, estos métodos son perfectamente válidos y no deben desdeñarse, aun cuando en este proceso de resolución no se escriba nada y el resolutor se limite a describir verbalmente el proceso seguido. Es más, esta visión integral de toda ecuación debe ser uno de los objetivos a alcanzar en las tareas de resolución de ecuaciones.

Después de observarlas como un todo, resuelva intuitivamente y sin escribir nada, las siguientes ecuaciones:

a) $7 = 3d + 4$
b) $7c = 15 + 2c$
c) $4m - 5 = 19$
d) $17 = 9n + 17$
e) $y - 18 = 5$
f) $18 - 2c = 4c$

b) El método de ensayo y ajuste (tanteo razonado)

Se trata de asignar un valor inicial a la incógnita, sustituirlo en la ecuación, observar si los dos miembros de la ecuación toman el mismo valor, y decidir en consecuencia. Por ejemplo, intentemos resolver la ecuación $5x - 7 = 3x + 5$.

Damos a x el valor inicial 3; el miembro de la izquierda queda igual a 8 y el de la derecha, a 14; evidentemente, 3 no es la solución requerida ya que $8 \neq 14$; anotamos que la diferencia entre estos valores $14 - 8$ es 6. Damos ahora a x el valor 4; el miembro de la izquierda queda igual a 13 y el de la derecha, a 17; tampoco 4 es la solución requerida, pero observamos que la diferencia entre estos últimos valores $17 - 14$ es 4; es decir, la diferencia se ha acortado (ha pasado de 6 a 4).

Esta última observación significa que el proceso de incrementar el posible valor de x, a partir del valor inicial 3, es correcto: la incógnita vale más que 3. En efecto, si en lugar de 4 hubiéramos dado a la incógnita el valor 2, el miembro de la izquierda hubiera quedado igual a 3 y el de la derecha a 11, y la diferencia entre estos últimos valores $11 - 3$, sería 8; es decir, la diferencia se habría incrementado (pasaría de 6 a 8).

Por consiguiente, después de dar estos dos pasos, es decir, de asignar dos valores a la incógnita, estamos en capacidad de decidir hacia dónde tenemos que ensayar nuevos valores de la incógnita. En el ejemplo que nos ocupa, este valor es mayor que 4. Resta, pues, probar con 5, con 6..., hasta llegar al punto en que los dos miembros de la ecuación alcancen el mismo valor.

En nuestra ecuación $5x - 7 = 3x + 5$ esto ocurre con $x = 6$; en efecto, los dos miembros de la ecuación toman el valor 23 (que es el valor de la igualdad aritmética inicial).

Pudiera alegarse que este método de ensayo y ajuste es muy largo y, por consiguiente poco económico. Aparentemente es así, pero tiene la ventaja de que también toma en cuenta a toda la ecuación de una manera integral, y no sólo a las incógnitas; y además, nos recuerda el origen de las ecuaciones, la igualdad aritmética original, ya que en cada ensayo nos obliga a considerar si se ha alcanzado o no dicha igualdad.

Como en el caso de los métodos intuitivos, tampoco aquí se está obligado a escribir el proceso de resolución; el método puede desarrollarse mentalmente. Pero podemos ayudarnos con un esquema sencillo como éste:

Valor de la incógnita	Valor del miembro de la izquierda	Valor del miembro de la derecha

e ir escribiendo los sucesivos resultados en las filas inferiores de la tabla anterior hasta llegar a la solución buscada. Volveremos sobre este método posteriormente.

Resuelva por tanteo las siguientes ecuaciones:

a) $7 + 2y = 5y - 8$ b) $15 - 3v = 1 + 4v$ c) $2(x - 4) + 1 = x - 1$

c) Los métodos de despeje

Como hemos venido diciendo, la tarea de resolver una ecuación termina cuando se llega a obtener el valor de la incógnita; es decir, cuando se llega a una expresión como $x = 5$. Bien observada, esta última expresión tiene también la forma de una ecuación: hay dos miembros ligados por el signo de igualdad. La particularidad está en que en uno de los miembros figura la incógnita con coeficiente 1 y en el otro, un número. En lo que respecta a la incógnita, debe estar sola, "despejada" de cualquier otro término y de cualquier otro coeficiente que no sea 1.

Por consiguiente, es lógico pensar en un método que parta de la ecuación original y que, mediante una cadena de ecuaciones equivalentes obtenidas por la aplicación de transformaciones válidas, nos lleve a una expresión en la que la incógnita aparezca despejada. Y resulta natural identificar a este proceso como el método de despeje.

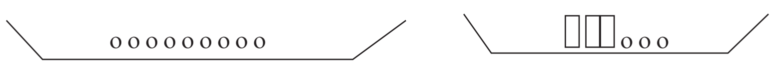
Vamos a trabajar con este método. Y la primera observación que formulamos es que pueden presentarse diversas alternativas de aplicación, de acuerdo con la naturaleza de los términos que presente la ecuación.

c.1) La técnica de la balanza

Consideremos la ecuación $2x + 9 = 5x + 3$, en la que los términos numéricos y los coeficientes de la incógnita son todos positivos. Podemos representar esta situación mediante una balanza en equilibrio (imagen de la igualdad), en la que cada platillo simboliza un miembro de la ecuación; y para representar los términos utilizamos, por ejemplo, un □ para cada x y un o para cada unidad numérica.

La ecuación podría, entonces, representarse así:

Despejar la incógnita significará ir extrayendo de cada platillo, en cada paso, la misma cantidad de cualquiera de los dos objetos dibujados. Esta condición es necesaria para que se mantenga el equilibrio de la balanza. Por ejemplo, podemos extraer dos "incógnitas", con lo que llegamos a:



Ahora podemos extraer tres unidades numéricas, operación que nos lleva a:

El equilibrio final traduce la equivalencia en "peso" de los objetos contenidos en cada platillo; es decir, un □ equivale a o o. Si regresamos ahora a las representaciones iniciales, decimos que hemos llegado al resultado: $x = 2$. Esta es la solución de la ecuación, como puede verificarse; el valor de la igualdad aritmética inicial es 13.

Como puede apreciarse, el procedimiento es útil para manipular y captar visualmente las transformaciones que afectan a cada miembro de la ecuación (platillo) y que van generando la cadena de ecuaciones equivalentes que nos llevan a la solución. Su limitación consiste en que los términos numéricos y los coeficientes de la incógnita deben ser todos positivos.

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando su representación en la balanza:

a) $5m + 1 = 7 + 4m$

b) $9 = 6 + p$

c) $7 + 3z = 8z + 7$

d) $3u = u + 12$

c.2) La técnica del gráfico transformacional

Denominamos así el procedimiento que va mostrando, a partir de la ecuación inicial, las transformaciones que se aplican en cada paso y las ecuaciones equivalentes que se generan como resultado. Así, para nuestra ecuación $2x + 9 = 5x + 3$ partimos de su representación inicial, en la que se colocan los términos de cada miembro encima y debajo de los lados horizontales de un rectángulo:

$$\begin{array}{c} 2x+9 \\ \boxed{} \\ 5x+3 \end{array}$$

y su resolución se representaría así:

$$\begin{array}{c} 2x+9 \\ \boxed{} \\ 5x+3 \end{array} \xrightarrow{-\ 2x} \begin{array}{c} 9 \\ \boxed{} \\ 3x+3 \end{array} \xrightarrow{-\ 3} \begin{array}{c} 6 \\ \boxed{} \\ 3x \end{array} \xrightarrow{:\ 3} \begin{array}{c} 2 \\ \boxed{} \\ x \end{array}$$

Evidentemente, el orden de aplicación de las transformaciones puede variar (por ejemplo, se pudo haber restado 3 unidades al comienzo y, después, $2x$). Cada eslabón rectangular contiene los pares de miembros que forman las sucesivas ecuaciones equivalentes hasta llegar a la solución.

Con respecto a la representación de la balanza, ahora ya no existe la limitación de que todos los términos numéricos sean positivos. Incluso, podemos resolver ecuaciones que no se presenten en su forma canónica. Por ejemplo, resolvamos la ecuación $2(x - 4) + 7 = 44 - 3x$:

$$\begin{array}{c} 2(x-4)+7 \\ \boxed{} \\ 44-3x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 2x-8+7 \\ \boxed{} \\ 44-3x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 2x-1 \\ \boxed{} \\ 44-3x \end{array} \xrightarrow{+\ 3x} \begin{array}{c} 5x-1 \\ \boxed{} \\ 44 \end{array}$$

$$\xrightarrow{+\ 1} \begin{array}{c} 5x \\ \boxed{} \\ 45 \end{array} \xrightarrow{:5} \begin{array}{c} x \\ \boxed{} \\ 9 \end{array}$$

Como se puede apreciar, las dos primeras transformaciones no implican operaciones aritméticas referidas a ambos miembros de la ecuación, sino simplemente transformaciones en la expresión de uno de los miembros, con el fin de llegar a la forma canónica de la ecuación.

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando su representación transformacional:

a) $2x - 1 = 3x - 8$ b) $5(2s - 6) = 0$

c) $5z + 2 = 2(1 + 3z)$ d) $1 = 16 - 3(m + 1)$

c.3) La técnica simbólica habitual

La técnica de despeje que se utiliza habitualmente para la resolución de una ecuación de primer grado es una simplificación de la técnica transformacional anterior, en el sentido de que únicamente se presenta la cadena de ecuaciones equivalentes, en su forma simbólica, sin indicar explícitamente la transformación que se lleva a cabo en cada paso.

Así, en nuestra ecuación $2x + 9 = 5x + 3$, la secuencia de resolución es:

(1)	$2x + 9 = 5x + 3$
(2)	$2x + 6 = 5x$
(3)	$6 = 3x$
(4)	$2 = x$

Esta técnica tiene validez para el resolutor si éste entiende cuál es la transformación que debe aplicar en cada paso. Con mucha frecuencia se suele sustituir esta comprensión de las transformaciones por reglas mecánicas sin mayor sentido. Por ejemplo:

> de (1) se pasa a (2) porque “el 3 que está sumando pasa restando”;
> de (2) se pasa a (3) porque “el $2x$ que está sumando pasa restando”;
> de (3) se pasa a (4) porque “el 3 que está multiplicando pasa dividiendo”.

Las reglas mecánicas que suelen aplicarse son, pues, éstas:

> lo que está sumando, pasa restando;
> lo que está restando, pasa sumando;
> lo que está multiplicando, pasa dividiendo;
> lo que está dividiendo, pasa multiplicando.

Indudablemente, estas reglas no deben enseñarse a los alumnos, ni en primer lugar, ni mucho menos exclusivamente; en todo caso deben ser descubiertas por ellos, como una conclusión práctica y posterior de su trabajo con la aplicación de las transformaciones correspondientes. Sólo si se guarda este orden se evitarán los errores tan frecuentes en las tareas de despeje de la incógnita.

De modo que la secuencia de aprendizaje de la resolución de una ecuación de primer grado por el método de despeje, bien puede pasar por las dos técnicas previas (de la representación en la balanza y por medio del gráfico transformacional) antes de llegar al modo habitual de sólo presentar la cadena de ecuaciones equivalentes (mal acompañada, a veces, por las reglas mecánicas al uso...).

No está de más, incluso, ver cómo se puede pasar del proceso en la balanza a la técnica centrada únicamente en la forma simbólica de las ecuaciones equivalentes. Veámoslo para la ecuación $2x + 9 = 5x + 3$.

Se utilizan los dos procedimientos de despeje: en el lado izquierdo, el de la balanza; y en el derecho, el correspondiente al uso de la forma simbólica:

Balanzas | **Símbolos**

$$2x + 9 = 5x + 3$$

Quitar ▯▯

Restar $2x$ en ambos miembros

$$2x - 2x + 9 = 5x - 2x + 3$$

$$9 = 3x + 3$$

Quitar ooo

Restar 3 unidades en ambos miembros

$$9 - 3 = 3x + 3 - 3$$

$$6 = 3x$$

De donde:

$$\frac{6}{3} = x$$

▯ = oo

$$\boxed{2 = x}$$

La experiencia enseña que habituarse a este tipo de "traslación" de lo gráfico a lo simbólico con términos numéricos positivos, facilita la comprensión posterior de las transformaciones simbólicas en ecuaciones con términos negativos.

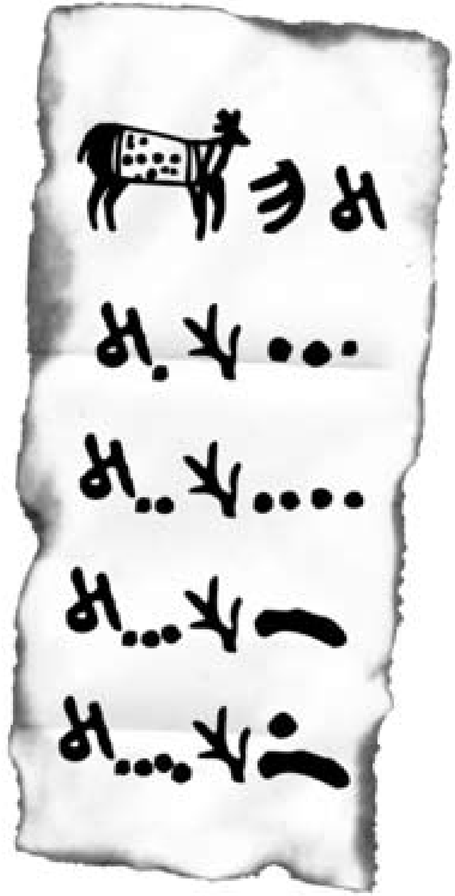
¿De dónde viene el nombre de Algebra?

He aquí lo que al respecto escribe Morris Kline (1992, p. 260) sobre los árabes: "Al álgebra contribuyeron antes que nada con el nombre. La palabra 'álgebra' viene del libro escrito el [año] 830 por el astrónomo Mohammed ibn Musa al-Khwârizmî (sobre el 825), titulado *Al-jabr w'al muqâbala*. La palabra *al-jabr* que en este contexto significa 'restauración', restaura el equilibrio en una ecuación al colocar en un miembro de la misma un término que ha sido eliminado del otro; por ejemplo, si –7 se suprime de $x^2 - 7 = 3$, el equilibrio se restaura escribiendo $x^2 = 7 + 3$. *Al' muqâbala* significa 'simplificación', en el sentido de que, por ejemplo, se pueden combinar $3x$ y $4x$ y obtener $7x$, o bien suprimir términos iguales en miembros distintos de una ecuación".

Como puede observarse, el nombre de álgebra se deriva de la primera palabra de un título más largo, título que recoge los nombres de dos de las transformaciones permitidas ('restaurar' y 'simplificar') para pasar de una ecuación a otra equivalente. Nada tiene de particular que el campo de la matemática orientado a la resolución de ecuaciones se conociera durante muchos siglos (prácticamente hasta el siglo XIX) con el nombre de álgebra y que, todavía hoy día, cuando nos hablan de álgebra, pensemos ante todo en la resolución de ecuaciones.

d) El tanteo formalizado: la regla "falsa" o de "falsa posición"

Retomemos la ecuación que nos sirvió de ejemplo al hablar del método de ensayo y ajuste, $5x - 7 = 3x + 5$. Como vimos, empezamos a ensayar con los valores 3 y 4 para x, con los que obtuvimos los valores respectivos de los miembros de la izquierda y de la derecha, 8 y 14 (para $x = 3$) y 13 y 17 (para $x = 4$); también obtuvimos las diferencias entre ambos miembros, en cada caso, 6 y 4. Vamos a llevar todos estos datos a la siguiente tabla, y agregaremos los correspondientes a $x = 5$ y a $x = 6$ (el subíndice que se coloca a las incógnitas indica el orden en que se consideran; así, $x_2 = 4$ indica que 4 es el segundo valor de x considerado):



Valor de la incógnita x	Valor del miembro de la izquierda: I	Valor del miembro de la derecha: D	Diferencia: F F = (I – D) ó (D – I)
$x_1 = 3$	8	14	D – I = 6
$x_2 = 4$	13	17	4
$x_3 = 5$	18	20	2
$x_4 = 6$	23	23	0

Cuando trabajamos con el método de ensayo y ajuste sólo remarcamos dos puntos: que la diferencia F disminuyó al pasar de $x = 3$ a $x = 4$ (lo que indicaba que la solución estaba del lado de los valores mayores que 3) y que había que seguir ensayando con algún valor mayor que 4, hasta llegar a la solución (cuando F = 0).

Ahora podemos fijarnos en otro dato adicional: la variación de F. Cuando x vale 3, F toma el valor 6; después, al incrementarse x en una unidad (al pasar de 3 a 4, de 4 a 5, y de 5 a 6), F disminuye en 2 unidades (de 6 a 4, de 4 a 2, y de 2 a 0). Pero realmente no teníamos que haber completado la tabla hasta llegar a tener F = 0. Con los dos primeros ensayos ($x = 3$ y $x = 4$) podíamos haber calculado la solución de la ecuación.

En efecto, estamos en presencia de ***una situación proporcional***: cada vez que x aumenta una unidad, la diferencia disminuye en 2 unidades. La pregunta es: ¿cuántas unidades tiene que aumentar x para que la diferencia se anule? Podemos plantear la siguiente regla de tres:

aumento del valor de x	disminución de la diferencia F
1	2
a	6

de donde, $a = \frac{6 \times 1}{2} = 3$. Es decir, la incógnita debe aumentar 3 unidades a partir de su valor inicial, que era 3. Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 6$. Puede verificarlo.

Lógicamente, el método funciona también en los casos en que el primer valor ensayado de x vaya por encima de la solución. Por ejemplo, para resolver la ecuación $16 + (20 - x) = 2(18 - 3x)$, formamos la tabla:

Valor de la incógnita x	Valor del miembro de la izquierda: I	Valor del miembro de la derecha: D	Diferencia: F F = (I – D) ó (D – I)
$x_1 = 5$	31	6	I – D = 25
$x_2 = 6$	30	0	30
$x_3 = 4$	32	12	20

Como observamos, al pasar de $x = 5$ a $x = 6$, F pasa de 25 a 30; esto indica que la solución no es ningún valor superior a 5, sino inferior; por eso ensayamos con $x = 4$ y vemos que F disminuye en 5 unidades (pasa de 25 a 20). Organizamos ahora la regla de tres correspondiente:

disminución del valor de x	disminución de la diferencia F
1	5
d	25

de donde, $d = \dfrac{25 \times 1}{5} = 5$ Es decir, la incógnita debe disminuir 5 unidades a partir de su valor inicial, que era también 5. Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 0$. Verifíquelo.

Como puede apreciarse, este método elude todo procedimiento de despeje y se basa en la proporcionalidad presente entre los valores que toma la incógnita y los correspondientes de la diferencia que se origina entre los valores de ambos miembros de la ecuación. ¿Sorprendente, no?

Si nos preguntamos desde cuándo se conoce esta forma de resolver ecuaciones de primer grado, tendremos que decir que ya era utilizado en la Edad Media, aunque en el documento egipcio conocido como “Papiro de Rhind” o “Papiro de Ahmes”, que data del siglo XVIII a. C., ya se utiliza un método similar para resolver algunos problemas por la vía de las ecuaciones de primer grado. Y, al parecer, también era conocido siglos atrás en Babilonia... (Mason, 1996).

En cuanto al apelativo de regla “falsa” (de hecho había más de una...), proviene del acto de proceder por tanteo, de adelantar una posible solución (generalmente “falsa”, con respecto a la correcta), luego otra próxima (casi siempre también “falsa”), comparar algunos resultados y generar a partir de ahí la solución correcta.

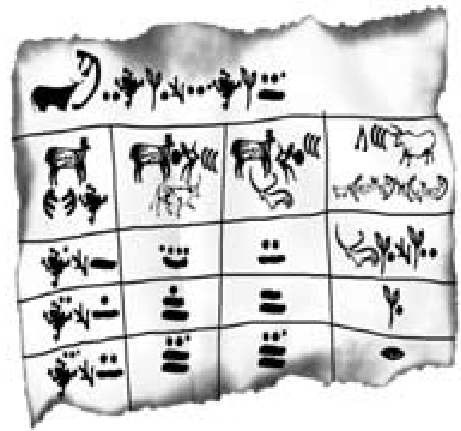
Aplique el método de la regla de falsa posición para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 1 = 3x - 8$

b) $5(2s - 6) = 0$

c) $5z + 2 = 2(1 + 3z)$

d) $1 = 16 - 3(m + 1)$



Este método de resolución de las ecuaciones de primer grado no es solamente una reliquia histórica; puede utilizarse hoy día con toda propiedad. Y, de hecho, en algunas circunstancias resulta más apropiado y explicativo que el método de despeje.

Al respecto, tomemos la ecuación $2(3z + 4) - 4 = 1 + 3(2z + 1)$. Si procedemos por despeje, tendremos la secuencia:

$2(3z + 4) - 4$	$\longrightarrow$	$6z + 8 - 4$	$\longrightarrow$	$6z + 4$	$\xrightarrow{-4}$	$6z$	$\xrightarrow{-6z}$	0
$1 + 3(2z + 1)$		$1 + 6z + 3$		$4 + 6z$		$6z$		0

Como se ve, al término de esta secuencia se llega a un resultado ($0 = 0$) que no nos permite inferir cuál es la solución de la ecuación, aun cuando el paso anterior ($6z = 6z$) nos deja ver que la incógnita puede tomar cualquier valor. De hecho, esta ecuación tiene ***como solución cualquier número*** (puede verificarlo con dos o tres valores) y, por ello, recibe el nombre de ***indeterminada***.

Esta situación se presenta cuando al construir la igualdad aritmética inicial colocamos la misma expresión en ambos términos de la igualdad (aunque éstos aparezcan después ligeramente transformados...).

Veamos este segundo ejemplo, $7 - 3u = 10 + 3(2 - u)$. Utilizamos de nuevo el método de despeje para su resolución:

$7 - 3u$	$\longrightarrow$	$7 - 3u$	$\longrightarrow$	$7 - 3u$	$\xrightarrow{+3u}$	7
$10 + 3(2 - u)$		$10 + 6 - 3u$		$16 - 3u$		16

Al término de esta nueva secuencia se llega a un resultado absurdo ($7 = 16$), que no nos permite decidir acerca de la solución de la ecuación. De hecho, esta ecuación no tiene solución. Dicho en otras palabras, no se puede construir ninguna igualdad aritmética inicial que desemboque en esta ecuación.

Veamos ahora el tratamiento de estas dos ecuaciones cuando se utiliza el método de la regla de falsa posición. Para la ecuación $2(3z + 4) - 4 = 1 + 3(2z + 1)$:

Valor de la incógnita z	Valor del miembro de la izquierda: I	Valor del miembro de la derecha: D	Diferencia: F $F = (I - D)$ ó $(D - I)$
$z_1 = 0$	$I_1 = 4$	$D_1 = 4$	$F_1 = I_1 - D_1 = 0$
$z_2 = 1$	$I_2 = 10$	$D_2 = 10$	$F_2 = 0$

Basta con tomar dos valores cualesquiera de la incógnita para observar que las diferencias finales F_1 y F_2 son ambas cero. Esto nos indica que la incógnita puede tomar cualquier valor.

Y para la ecuación $7 - 3u = 10 + 3(2 - u)$:

Valor de la incógnita u	Valor del miembro de la izquierda: I	Valor del miembro de la derecha: D	Diferencia: F $F = (I - D)$ ó $(D - I)$
$u_1 = 0$	$I_1 = 7$	$D_1 = 16$	$F_1 = D_1 - I_1 = 9$
$u_2 = 1$	$I_2 = 4$	$D_2 = 13$	$F_2 = 9$

Ahora nos encontramos con que al tomar la incógnita dos valores cualesquiera, las diferencias finales F_1 y F_2 son ambas iguales y distintas de cero. Esto nos indica que esta diferencia no variará, cualesquiera sean los valores asignados a la incógnita (puede verificarlo con cualquier otro valor). De aquí se deduce que no hay valor de la incógnita que pueda llevar esa diferencia final a cero; es decir, la ecuación no tiene solución.

En conclusión, el método de la regla de falsa posición se percibe como más pertinente que el método de despeje para dilucidar los casos en que la ecuación no tenga ninguna solución o tenga infinitas soluciones. Podemos resumir el proceso de resolución de ecuaciones por ese método mediante la siguiente secuencia de acciones:

Acciones	Resultados
1. Asignar un valor a la incógnita x	x_1
2. Obtener I_1, D_1, F_1	I_1, D_1, F_1
3. Asignar un segundo valor a x (el número anterior o siguiente de x_1), obtener I_2, D_2, F_2 y aceptar x_2 si F_2 no es mayor que F_1	x_2 I_2, D_2, F_2
4. Comparar F_1 y F_2 y decidir: a) si $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$ b) si $F_1 = F_2$, pero son diferentes de 0 c) si $F_1 \neq F_2$	a) la ecuación es indeterminada (tiene infinitas soluciones) b) la ecuación no tiene solución c) la ecuación tiene una solución: $x = x_1 + \frac{F_1}{F_1 - F_2}$

Esta secuencia de acciones es precisamente la más apropiada para elaborar un programa de computación que lea la ecuación y reporte como salida alguno de los tres resultados finales.

9. Aplique las acciones anteriores a las siguientes ecuaciones y reporte, en cada caso, el resultado final:

a) $8m + 1 = 13 - 4m$

b) $6(3 - 2t) = 1 + 4(5 - 3t)$

c) $3 + 7x = 3(2x + 1) + x$

d) $7 = 2(5z + 2) + 3$

e) $14r + 2(r + 2) = 4(1 + 4r)$

f) $3(y + 6) - 3y = 5$

Un comentario final en relación con la resolución de ecuaciones de primer grado. La primera actividad que debemos promover al enfrentar esta tarea tiene que ser ***observar atentamente cada ecuación propuesta***; examinar con detalle ambos miembros, los términos presentes, la incógnita cuyo valor se solicita. Y en segundo lugar, ***decidir el método a aplicar para su resolución***, tomando en cuenta que cualquiera de ellos es válido.

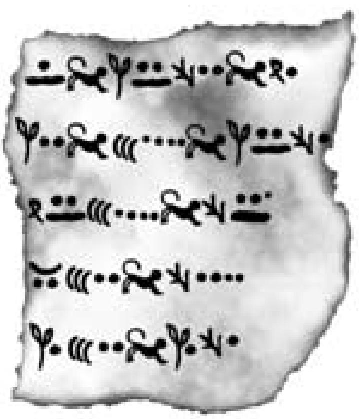
Hallar el valor de $x + 2$ si x es la solución de la ecuación $4x + 12 = 5x + 10$.

Un posible camino para resolver el problema puede ser obtener el valor de x como solución de la ecuación dada y, luego, agregar 2 unidades. La resolución de la ecuación (por cualquier método) nos lleva a $x = 2$; y de aquí llegamos a $x + 2 = 4$.

Pero hay otra forma de proceder que consiste en “ver” a $x + 2$, como un todo, “dentro” de la ecuación. Así, $4x + 12$ puede verse como $4(x + 2) + 4$ (verifique que es lo mismo); y $5x + 10$ como $5(x + 2)$. De esta forma, la ecuación puede escribirse como $4(x + 2) + 4 = 5(x + 2)$, con $x + 2$ como la nueva incógnita. Una lectura de esta ecuación nos dice que “4 veces la incógnita, más 4, es igual a 5 veces la incógnita”.

Si esta incógnita se representara, por ejemplo, con la letra z, podríamos escribir la ecuación como $4z + 4 = 5z$. Intuitivamente percibimos que z debe valer 4; es decir, $x + 2 = 4$, que es lo que nos pedían hallar. Acabamos de realizar un ***cambio de incógnita*** que nos ha llevado directamente a la respuesta solicitada.

10. A partir de la ecuación $6r - 7 = 2r + 1$, obtenga el valor de $2r - 1$. Hágalo como lo desee.



11. A partir de la ecuación $4 + 8y = 4y + 4$, obtenga el valor de $4y + 1$. Hágalo como lo desee.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones por el método que usted desee:

a) $3m - 7 = 2$
b) $16 - 5x = 4(4 + x)$
c) $3(z + 2) + 1 = 7 + 3z$
d) $4u - 3 = 8 - 7u$
e) $120 = 20 + 25z$
f) $98 + 2(c + 10) = 40(2 + c)$
g) $27 + 9s = 4(2s + 7) - 1$
h) $12t - 5 = 15 + 2t$
i) $4(x + 2) - 3x = 12$

4. La resolución de problemas

Después de este largo y necesario recorrido por el tema de las ecuaciones, volvemos al punto de la resolución de los problemas. Habíamos planteado éste: “La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuál es el menor de ellos?”. Y decíamos que si al número menor (que es la incógnita del problema) lo designamos con la letra n, entonces la traducción del enunciado nos lleva a la ecuación: $n + (n + 2) + (n + 4) = 81$.

La resolución de esta ecuación pasa por las ecuaciones equivalentes:

$n + n + 2 + n + 4 = 81$
$3n + 6 = 81$
$3n = 75$
$n = 75/3 = 25$

Este valor verifica la ecuación: $25 + 27 + 29 = 81$. Además son tres números impares consecutivos, tal como se pedía. Hemos resuelto el problema por la vía de las ecuaciones, además de haberlo hecho previamente por la vía del ensayo y ajuste.

Ahora ya podemos entender cómo funciona este nuevo método de resolución de problemas:

1. Leer atentamente el enunciado del problema (probablemente habrá que hacerlo más de una vez durante el proceso de su resolución). Determinar la incógnita del problema (lo que nos piden hallar).

2. Tratar de llevar las relaciones descritas en el enunciado a la forma de una ecuación (si es posible; si no lo es, hay que ensayar otro método).

3. Resolver la ecuación; verificar si la solución obtenida es la correcta.

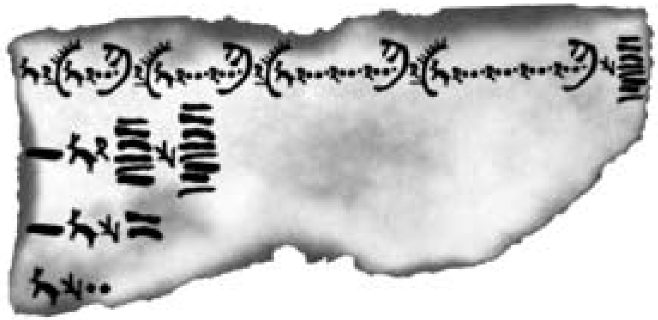
4. No olvidar que la solución del problema no es un simple número, sino un número en un contexto. Por ello, hay que llevar el valor hallado al enunciado del problema y verificar si satisface las condiciones descritas.

5. Ensayar otras vías para resolver el problema; esto no es un lujo, sino poner en práctica el principio de diversidad en el aprendizaje de la matemática.

Vamos a resolver por esta vía algunos problemas a cuya solución llegamos en su momento por otros métodos (se sugiere revisar esta primera forma de resolución en los Cuadernos y páginas indicados en cada caso).

Jugando al baloncesto, Daniel ha encestado 40 balones durante 5 días consecutivos. Si cada día logró encestar 3 balones más que el día anterior, ¿cuántas cestas consiguió el primer día? (Cuaderno 3, p. 22; solución propuesta en la p. 25).

Identificamos la incógnita del problema "nº de cestas que consiguió el primer día" con la letra z. El análisis del enunciado nos lleva a la ecuación: $z + (z + 3) + (z + 6) + (z + 9) + (z + 12) = 40$. De aquí se llega a las ecuaciones $5z + 30 = 40$; $5z = 10$; $z = 2$. Esta solución satisface la ecuación ($2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$) y también las condiciones del enunciado. Por consiguiente, el primer día Daniel consiguió 2 cestas.



En unas elecciones, el candidato ganador triplicó en votos a su oponente, y juntos sacaron 116.000 votos. ¿Cuántos obtuvo el candidato ganador? (Cuaderno 5, p. 29; sin solución propuesta).

El análisis del enunciado (el candidato ganador triplicó en votos a su oponente) nos lleva a seleccionar como incógnita del problema el "nº de votos consegui dos por el candidato perdedor". Si la representamos con la letra x, el nº de votos conseguidos por el candidato ganador será $3x$. Siguiendo el enunciado, llegamos a la ecuación: $x + 3x = 116.000$; y de aquí, $4x = 116.000$; de donde $x = 29.000$.

Esta solución satisface la ecuación ($29.000 + 87.000 = 116.000$) y también las condiciones del enunciado. Por consiguiente, el candidato ganador obtuvo 87.000 votos.

El problema anterior nos llevó a seleccionar como incógnita de la ecuación a una característica que no coincidía con la incógnita del problema, para evitar la aparición de fracciones. En efecto, si x hubiera representado el número de votos del ganador, el número de votos del perdedor se hubiera tenido que expresar como $x/3$; y la ecuación, como $x + x/3 = 116.000$, siempre más engorrosa para resolver. Esta selección es válida, siempre que al final se tome en cuenta que debe darse el valor de la incógnita del problema.

También podría haberse tomado como incógnita el número de votos del ganador, y haberla representado con el término $3x$; así, el número de votos del perdedor se hubiera tenido que expresar como x; y la ecuación, como $3x + x = 116.000$, repitiéndose el proceso de resolución ya planteado anteriormente.

Rafael tiene 40 años y la suma de las edades de sus tres hijos es 22 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Rafael será igual a la suma de las edades de sus tres hijos? (Cuaderno 7, p. 5; sin solución propuesta).

La incógnita del problema es el "número de años que tiene que pasar para que se produzca esa igualdad de edades"; podemos designarla con la letra u. Cuando pasen u años, Rafael tendrá $40 + u$ años; en cuanto a los tres hijos, cada uno de ellos habrá incrementado también su edad en u años, de modo que la suma de las tres edades se habrá incrementado en $3u$ años y será $22 + 3u$. La ecuación que recoge el enunciado del problema es: $40 + u = 22 + 3u$. De aquí se llega a las ecuaciones $18 + u = 3u$; $18 = 2u$; $9 = u$. Esta solución satisface la ecuación ($40 + 9 = 49$; $22 + 3 \times 9 = 22 + 27 = 49$) y también las condiciones del enunciado. Por consiguiente, dentro de 9 años la edad de Rafael será igual a la suma de las edades de los tres hijos.

Otra vía válida para la resolución de los dos últimos problemas es la del ensayo y ajuste.

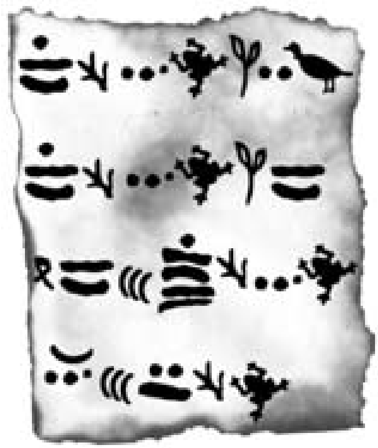
La señora Antonia compró un lote de caramelos a razón de 270 pesos por cada 9 caramelos y los vendió a razón de 10 caramelos por 800 pesos. Al venderlos todos obtiene una ganancia de 21.000 pesos. ¿Cuántos caramelos compró? (Cuaderno 7, p. 28; sin solución propuesta).

En primer lugar, podemos inferir ciertos datos, tales como el precio de compra y de venta de cada caramelo: 30 pesos y 80 pesos, respectivamente (¿por qué?). Identificamos la incógnita del problema "nº de caramelos comprados" con la letra n. El monto de las ventas será $80n$ y el de la compra, $30n$. Como la ganancia es el resultado de la diferencia entre ambos montos, podemos llegar a la ecuación: $80n - 30n = 21.000$. De aquí se llega a las ecuaciones $50n = 21.000$; $n = 21.000/50 = 420$. Esta solución satisface la ecuación ($80 \times 420 - 30 \times 420 = 33.600 - 12.600 = 21.000$) y también las condiciones del enunciado. Por consiguiente, se compraron 420 caramelos.

El problema se puede resolver también calculando el beneficio que se obtiene por la venta de cada caramelo: 80 pesos – 30 pesos = 50 pesos. Ahora se puede deducir el número de caramelos comprados mediante una simple división: el monto de las ganancias totales, entre la ganancia obtenida por cada caramelo vendido: 21.000 : 50 = 420 caramelos. Esta vía de resolución es estrictamente aritmética.

Resuelva los siguientes problemas por todas las vías que se le ocurran:

13. En una feria hay un puesto donde la gente puede probar su puntería intentando darle al blanco. Por cada tiro acertado se reciben 3 caramelos y por cada tiro errado se devuelven 2. Aunque Ramón ha perdido 5 veces, tiene 11 caramelos consigo. ¿Cuántas veces le ha dado al blanco?



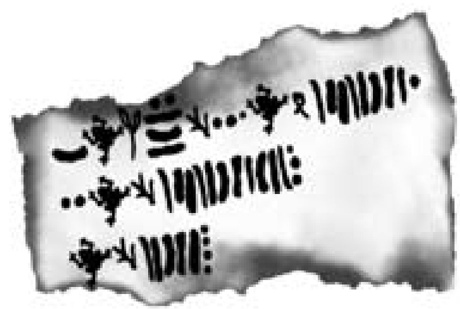
14. Hemos marcado en el mapa cuatro montañas cuyas alturas suman 19 kilómetros. La más alta supera en 1.055 m a la segunda; ésta, en 855 m a la tercera; y finalmente, ésta supera en 665 m a la montaña más baja. ¿Cuál es la altura de la montaña más alta?

15. Cuando mi papá tenía 31 años, yo tenía 8. Ahora su edad es el doble de la mía. ¿Cuántos años tengo actualmente?

16. En un grupo de 63 personas, el número de niños es el doble del de adultos. Entre estos últimos, el número de mujeres es el doble del de hombres. ¿Cuántos hombres hay en el grupo?

17. Una persona debe a dos comerciantes la misma cantidad de dinero. Al primero le paga con 18 kg de mercancía más 8.000 pesos. Al segundo le da 25 kg de la misma mercancía y recibe como devolución 45.200 pesos. ¿Cuánto debía, en pesos, a cada uno de los comerciantes?

18. Hallar el número cuyo quíntuplo disminuido en 17 es igual a su triple aumentado en 41



5. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

19. Escriba la igualdad simbólica literal correspondiente a los siguientes enunciados (utilice n para designar la indeterminada):

a) Dado un número, el producto de los dos números siguientes es igual al cuadrado del número dado, más el triple del mismo, más 2 unidades.

b) Dado un número, el producto de su número anterior por su número siguiente es igual al cuadrado del número dado, menos 1 unidad.

20. Halle la representación simbólica del término general de las siguientes sucesiones (indique también los valores de n para los que se cumple):

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35,...

b) 2, 3, 6, 11, 18, 27,...

c) 3, 9, 27, 81, 243, 729,...

d) 10, 100, 1.000, 10.000,...

e) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9},...$

f) 1, 3, 7, 15, 31, 63,...

g) la sucesión de los números que, al dividirse por 3, dan como resto 1

21. Determine si estos dos términos generales representan, o no, a la misma sucesión de números naturales: $a_n = 5n + 4$, $n \in \mathbf{N}$; $a_n = 5n - 1$, $n = 1, 2, 3,...$ En caso afirmativo, escriba los cinco primeros términos de la sucesión.

22. Resuelva las ecuaciones siguientes por el método que usted desee:

a) $5x + 21 = 21$

b) $7 = 115 - 27z$

c) $4[(3m + 1) - 3] = 1 + 3(m + 3)$

d) $2(5 + 2c) - 10 = 4c$

e) $15 - 3y = 2(7 - y) + (1 - y)$

f) $3x + 8 = 3(x + 2)$

g) $5n - 4 = 3n + 2$

h) $18 = 3(5 + x)$

i) $1 + 4r = 3(r + 1) - 2$

23. A partir de la ecuación $8m + 5 = 3 + 2(2m + 1)$, obtenga el valor de $2m + 1$. Hágalo como lo desee.

24. ¿Es cierto que cuando los dos miembros de una ecuación se multiplican por 3, la solución de la ecuación queda también multiplicada por 3?

25. Trate de expresar y probar las conjeturas siguientes:

a) La suma de tres números naturales consecutivos es múltiplo del número que ocupa la posición intermedia de los tres.

b) La suma de varios múltiplos de un número es también múltiplo de ese número.

c) La suma de cinco números naturales consecutivos es múltiplo de 5.

26. Una señora tiene 33 años y su hijo, 7. ¿Dentro de cuántos años será la edad de la mamá tres veces la de su hijo?

27. Julián pesa el doble de su esposa, ésta el doble de su hija, y los tres juntos, 154 kg. ¿Cuánto pesa la niña?

28. Distribuya 120 cuadernos en tres lotes, tales que el 2º tenga 15 cuadernos más que el 1º, y que el 3º tenga 6 cuadernos menos que el 2º.

29. En este momento, la edad de Marcos triplica a la de Rosaura, pero dentro de 14 años sólo será el doble. ¿Cuántos años tiene Rosaura actualmente?

30. ¿Es posible que la suma de cuatro números pares consecutivos sea 182? En caso afirmativo, halle el menor de esos números.

31. Si la suma de dos números es 50 y a uno de ellos lo identifico con la letra x, ¿cómo puedo designar al otro número, si no deseo utilizar otra letra?

32. En la escuela se han comprado 145 kg de abono para las plantas. El producto viene en 12 sacos, unos de 15 kg y otros de 10 kg. ¿Cuántos sacos de cada tipo se han comprado?

33. Hay dos números tales que el triple del mayor es igual a cuatro veces el menor. Si la diferencia de ambos números es 8, ¿cuál es el mayor?

34. En un conjunto de vacas y de pollos el número de patas es 14 unidades mayor que el de cabezas, que es 6. ¿Cuántas vacas hay?

35. La suma de dos números enteros es 168; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene 7 como cociente y 16 como residuo. ¿Cuáles son los números?

Referencias bibliográficas

- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Vol. I.* Madrid: Alianza.

- Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 9, 7-21.

Otras referencias recomendadas

- Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 14, 75-91.

- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present, and future*, pp. 11-49. Rotterdam: Sense Publishers.

- Radford, L. (1997). Una incursión histórica por la cara oculta del desarrollo primitivo de las ecuaciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 14, 61-73.

- Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática 11*, Nº 3, 25-53.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) 8; b) 18; c) 202; d) 7; e) 0; f) 5; g) 124; h) 49; i) 96

2. a) $2a$; b) $3a+1$; c) $3(a+1)$; d) $(a+b)^2$; e) a^2+b^2; f) $(a+b)(a-b)$; g) $1+(a+b)^3$; h) $3a-2b$; i) $a/4$; j) ; $\frac{a^2-b^2}{2}$; k) $\frac{(a-b)^2}{5}$; l) $a+1$

3. a) $(n+m)-(n-m)=2m$; b) $(n+m)(n-m)=n^2-m^2$; c) $n+(n+1)=2n+1$

4. a) $4n+1$, $n\in \mathbf{N}$; b) $2n+1$, $n=5, 6, 7,...$ o también: $2n+11$, $n\in \mathbf{N}$ c) 2^n, $n=1, 2, 3,...$ o también: $2^{n+1}, n\in \mathbf{N}$, d) $n(n+1)$, $n\in \mathbf{N}$; e) $(0,2)^n$, $n=1, 2, 3,...$ f) $10n+1$, $n\in \mathbf{N}$; g) $(2n+1)/4(n+1)$, $n\in \mathbf{N}$; o también: $(2n-1)/4n$, $n=1, 2, 3,...$; i) $5n+2$, $n\in \mathbf{N}$.

5. Sí: b, c, f, g, h, i

6. a) $5=15-5x$; b) $4+9p=13$; c) $x=3$; d) $z=0$; e) $11-c=0$; f) $y=3$

7. Son equivalentes: a, e, f, g, h, i, l

8. Sí

9. a) $m=1$; b) no tiene solución; c) tiene infinitas soluciones; d) $z=0$; e) tiene infinitas soluciones; f) no tiene solución

10. 3

11. 1

12. a) $m=3$; b) $x=0$; c) tiene infinitas soluciones; d) $u=1$; e) $z=4$; f) $c=1$; g) $s=0$; h) $t=2$; i) $x=4$

13. 7 veces

14. 6.135 m

15. 23 años

16. 7 hombres

17. 144.800 pesos

18. 29

19. a) $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$; b) $(n-1)(n+1)=n^2-1$

20. a) $6n+5$, $n\in \mathbf{N}$; b) n^2+2, $n\in \mathbf{N}$; c) 3^n, $n=1, 2, 3,...$; d) 10^n, $n=1, 2, 3,...$; e) $1/(2n+1)$, $n\in \mathbf{N}$; f) 2^n-1, $n=1, 2, 3,...$; g) $3n+1$, $n\in \mathbf{N}$

21. Sí; 4, 9, 14, 19, 24

22. a) $x=0$; b) $z=4$; c) $m=2$; d) tiene infinitas soluciones; e) tiene infinitas soluciones; f) no tiene solución; g) $n=3$; h) $x=1$; i) $r=0$

23. 1

24. No; no varía

25. a) $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$; b) $an+bn+cn=(a+b+c)n$; c) $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5(n+2)$

26. 6 años

27. 22 kg

28. 32, 47 y 41 cuadernos

29. 14 años

30. No es posible

31. $50-x$

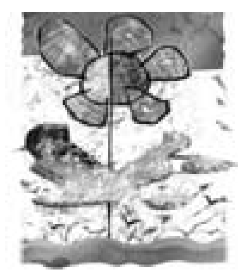
32. 5 sacos de 15 kg y 7 de 10 kg

33. 32

34. 4 vacas

35. 149 y 19

Índice



FE Y ALEGRIA