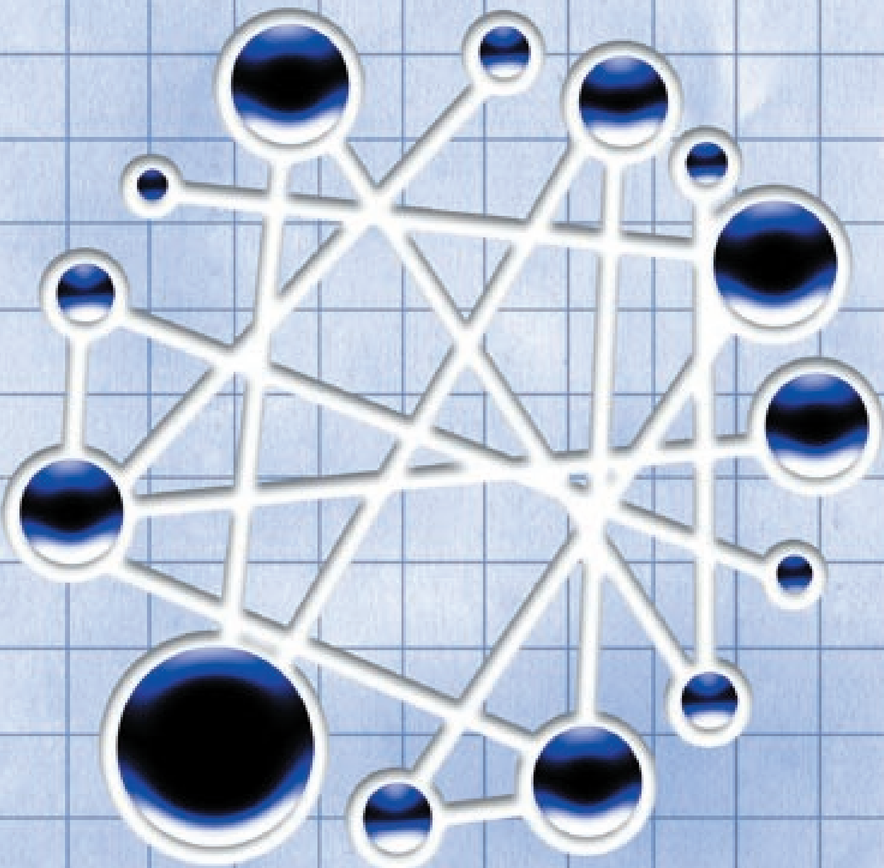
SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 15

LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO



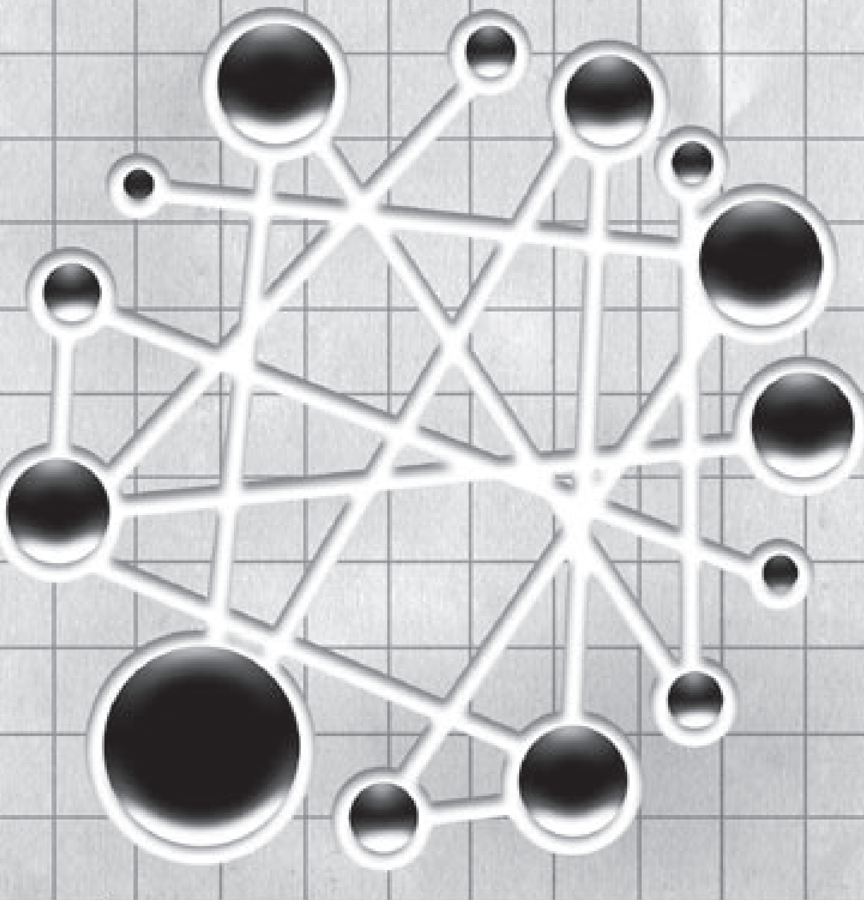
FE Y ALEGRÍA

CAF

UNESCO
IESALC

SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 15

LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO



FE Y ALEGRÍA

CAF

UNESCO IESALC

POR MARTÍN ANDONEGUI ZABALA

372.7
And.
Cuaderno N° 15
La circunferencia y el círculo
Federación Internacional Fe y Alegría,
2007
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-6418-92-9
Matemáticas, Geometría

Los centros educativos, tanto formales como no formales, deben proporcionar a los educandos una sólida formación científico-técnica general, que desarrolle sus destrezas intelectuales de modo que sean capaces de razonar, proponer, innovar y acceder a los nuevo códigos y lenguajes en los que se fundamenta la tecnología actual.

DOCUMENTO DEL XXVI
Congreso Internacional
Caracas-Venezuela

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno Nº 15
La circunferencia y el círculo
Autor: Martín Andonegui Zabala

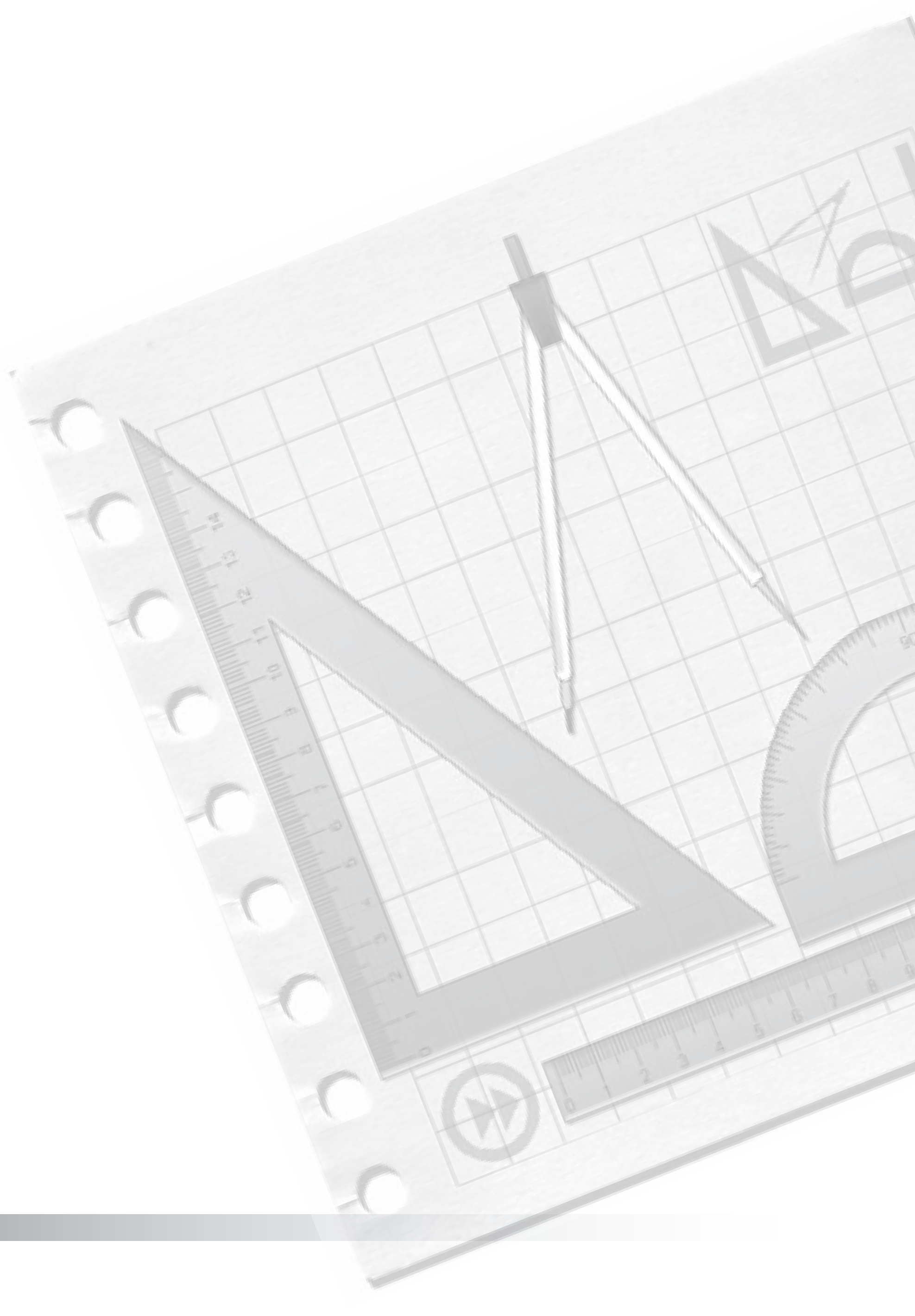
Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del ***Programa Internacional de Formación de Educadores Populares*** *desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

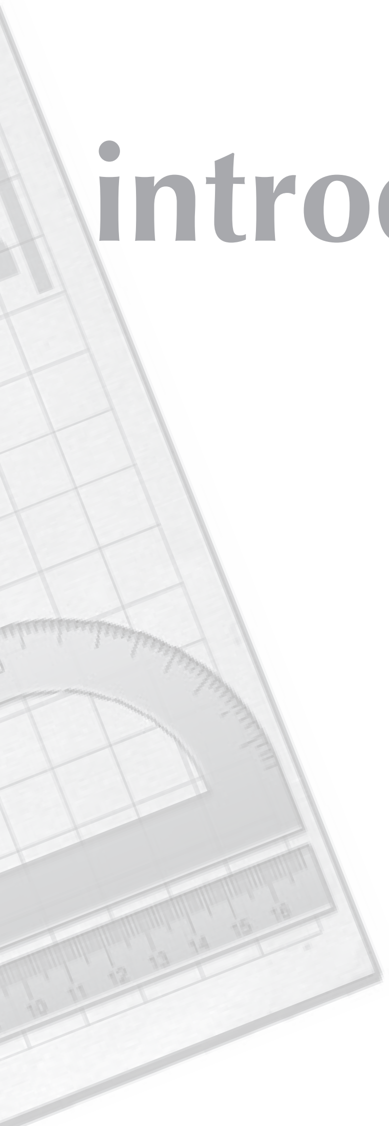
Diseño y Diagramación: ***Moira Olivar***
Ilustraciones: ***Corina Álvarez***
Concepto gráfico: ***Juan Bravo***
Corrección de textos: ***Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela. Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 603 2007 5101 886
Caracas, Marzo 2007

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)





introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la circunferencia y el círculo.

1. Los conceptos de circunferencia y círculo

Como ya explicábamos en el Cuaderno 12, a partir de objetos planos (o que se ven planos) y de forma redonda, presentes en la naturaleza o hechos por el hombre (una rueda, una flor, la sección de un tronco cortado, la cara de la luna...), se puede pasar a la idea de línea plana "redonda", la línea que "rodea" o limita externamente el objeto. Pero el tránsito no termina aquí. Aún hay un paso más, que es llegar a la idea de circunferencia (del latín: circum [alrededor] + ferre [llevar] = lo que se lleva alrededor).

Esta idea se desliga de los objetos de los que proviene y da paso al concepto geométrico. ¿Qué es una ***circunferencia***? He aquí algunas formas de definirla:

a) Línea formada por todos los puntos de un plano que equidistan de uno dado (el centro de la circunferencia). Se trata, pues, de una línea cerrada.

b) Línea trazada por el extremo de un segmento que gira un ángulo de 360º alrededor del otro extremo fijo.

c) Línea cerrada del plano que mantiene una curvatura constante en cada punto (para entender esto último, recuerde que si se "tuerce" el volante de un carro y se le deja con ese giro fijo, el carro, al moverse suficientemente, traza una circunferencia, ya que constantemente está dando "la misma curva").

Perucho Aguirre es un compositor venezolano nacido en 1940, cuyas piezas musicales forman parte del folklore popular, particularmente del folklore de la isla de Margarita. Entre ellas hay una titulada "La abuela", cuyo coro dice:

Mi abuela, mi abuela
no sabía geometría,
pero una arepa en sus manos
redondita le salía.

La arepa es un producto típico de la cocina tradicional venezolana, una especie de masa hecha de harina de maíz que, en las manos de las amas de casa, adquiere una forma redonda antes de asarse o freírse para acompañar las comidas. ¿Cómo se le da esa forma redonda a la masa? Con un movimiento de ambas manos: una sirve de soporte a la masa y la hace girar lentamente, mientras que los dedos de la otra, convenientemente doblados, forman un arco de circunferencia fijo que va obligando al borde de la masa a plegarse en cada momento a la misma curvatura. De esta forma se consigue que la arepa salga "redondita".

Así que la abuela de Perucho Aguirre, no es que no supiera geometría; lo que no sabía es que lo que sabía era geometría... y que ésta estaba en sus manos.

d) Línea obtenida como límite de la sucesión de polígonos regulares, cuando el número de lados de estos últimos tiende a infinito.

Esta idea proviene de algunos matemáticos griegos, quienes observaron que los polígonos regulares, a medida que aumenta el número de sus lados, van adquiriendo una forma más cercana a la redonda. De hecho y como detallaremos más adelante, los polígonos regulares pueden considerarse como inscritos en una circunferencia (con los vértices sobre ésta). Así, al aumentar el número de sus lados, la sucesión de polígonos que se genera tiende a producir polígonos cuya figura se "aproxima" cada vez más a la de una circunferencia.

Y ¿qué es un ***círculo***? Es justamente la región interna de una circunferencia, ***la región del plano contenida dentro de una circunferencia***. Como se ve, ambos conceptos van ligados permanentemente: toda circunferencia determina un círculo, y viceversa. Pero resulta importante distinguirlos: la circunferencia es una línea, y el círculo, una región del plano.

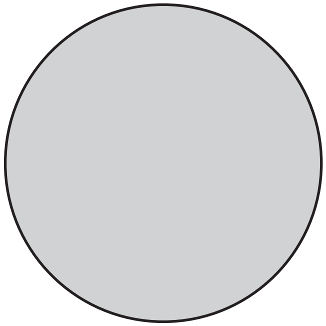


Fig. 1: Circunferencia (línea) y círculo (región interior)

2. Elementos de una circunferencia y de un círculo

2.1. Puntos y líneas (rectas y curvas)

a) Centro de la circunferencia, punto fijo del que equidistan todos los puntos de la circunferencia; en la figura 2, el punto O.

b) Radio *r*, segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia; en la figura 2, los segmentos OE, OD; también, OA, OH, OB. Toda circunferencia queda determinada al conocerse su centro y su radio.

c) Arco, porción de circunferencia limitada por dos puntos de la misma, que son los extremos del arco; en la figura 2, el arco AB. Obsérvese que al fijar estos puntos A y B, quedan determinados dos arcos, según se proceda de A hacia B en el sentido de las agujas del reloj, o en sentido opuesto. Por ello, si hay dudas, se puede colocar otra letra mayúscula que designe un punto intermedio del arco (H, en el arco AHB, por ejemplo).

d) Cuerda, segmento que une dos puntos de la circunferencia; en la figura 2, el segmento AB. A esta cuerda le corresponde el arco AB y se dice que la cuerda subtiende (se tiende por debajo de) el arco correspondiente.

d) Diámetro (dia [a través] + metron [medida] = medida a través), cuerda que pasa por el centro de la circunferencia; en la figura 2, el segmento DE. Todo diámetro subtiende una semicircunferencia.

e) Sagita (del latín: sagitta [flecha]), segmento comprendido entre el punto medio de una cuerda y el del arco correspondiente; en la figura 2, el segmento MH. La sagita siempre forma parte de un radio. El nombre le viene porque el arco y la cuerda, juntos, componen la figura de un arco (arma), dentro del cual la sagita sería la flecha lista para ser disparada.

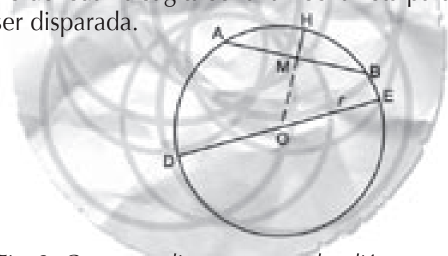
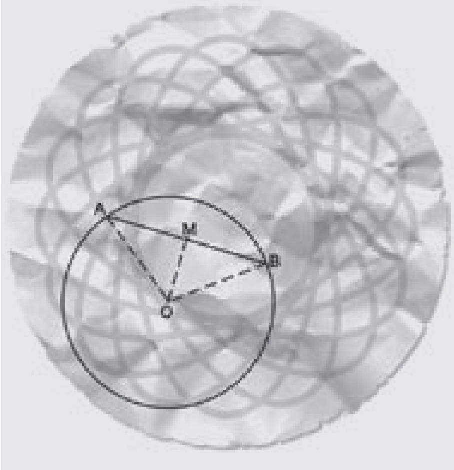


Fig. 2: Centro, radio, arco, cuerda, diámetro y sagita de una circunferencia

Una propiedad característica de ***toda cuerda de una circunferencia*** es que ***es perpendicular al radio que pasa por su punto medio.***



En la figura, M es el punto medio de la cuerda AB. El Δ AOB es isósceles, ya que sus lados OA y OB son congruentes por ser radios de la circunferencia. OM es la mediana correspondiente a la "base" AB. Pero en el Cuaderno 13 vimos que en un triángulo isósceles, la mediana de la base coincide con la altura de este mismo lado; por consiguiente, OM es perpendicular a AB en su punto medio M.

2.2. Rectas relacionadas con una circunferencia

Una recta puede tener una de estas posiciones con respecto a una circunferencia:

a) Recta secante, cuando corta a la circunferencia en dos puntos; en la figura 3, la recta *s*.

b) Recta tangente, cuando comparte un solo punto con la circunferencia (el punto de tangencia); en la figura 3, la recta *t*.

c) Recta exterior, cuando no posee ningún punto en común con la circunferencia; en la figura 3, la recta *e*.

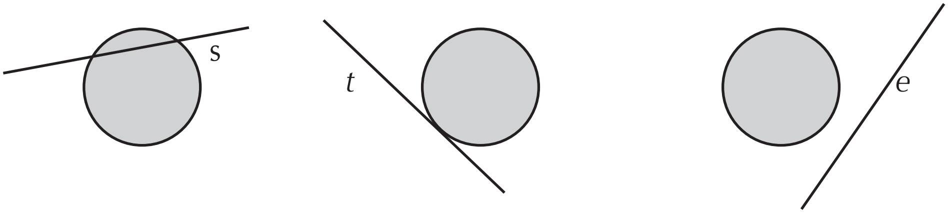
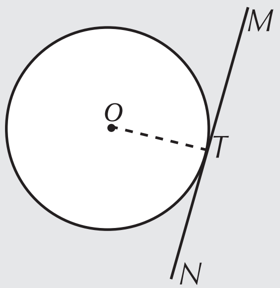


Fig. 3: Rectas secante, tangente y exterior a una circunferencia

Una propiedad característica de ***toda recta o segmento tangente a una circunferencia en un punto*** es que tal recta o segmento es ***perpendicular al radio que llega al punto de tangencia.***



En la figura, la recta MN es tangente a la circunferencia en el punto T; esto significa que el radio OT es perpendicular a MN en T. La razón de esta propiedad radica en que, si MN es tangente a la circunferencia, la distancia más corta desde O a MN viene dada justamente por la longitud del segmento OT. Pero sabemos que la distancia más corta desde un punto a una recta se consigue precisamente sobre el segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Así, pues, OT debe ser perpendicular a MN en T.

Recíprocamente, ***toda recta que es perpendicular a un radio de una circunferencia en su punto extremo, es tangente a la circunferencia en ese punto.***

1. Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de una diagonal, ¿cuál es la relación que existe entre ambas rectas tangentes?

2. Si ahora trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de dos radios perpendiculares entre sí, ¿cuál es la relación que existe entre ambas rectas tangentes?

3. Si dos rectas tangentes a una circunferencia son paralelas entre sí, ¿qué podemos decir acerca de los dos puntos de tangencia?

2.3. Circunferencias relacionadas con una circunferencia

Dos circunferencias pueden tener una de estas posiciones relativas entre sí:

a) Circunferencias exteriores, cuando la distancia entre los centros de ambas es mayor que la suma de sus radios respectivos; en la figura 4, C2 y C4, C4 y C7, C6 y C5, por ejemplo.

b) Circunferencias tangentes exteriores, cuando la distancia entre los centros de ambas es igual a la suma de sus radios respectivos; en la figura 4, C2 y C3.

c) Circunferencias secantes, cuando la distancia entre los centros de ambas es menor que la suma y mayor que la diferencia de sus radios respectivos; en la figura 4, C4 y C5.

d) Circunferencias tangentes interiores, cuando la distancia entre los centros de ambas es igual a la diferencia de sus radios respectivos; en la figura 4, C6 con respecto a C4.

e) Circunferencias interiores, cuando la distancia entre los centros de ambas es menor que la diferencia de sus radios respectivos; en la figura 4, C7 con respecto a C5.

f) Circunferencias concéntricas, cuando ambas poseen el mismo centro, es decir, cuando la distancia entre los centros de ambas es nula; en la figura 4, C1 y C2.

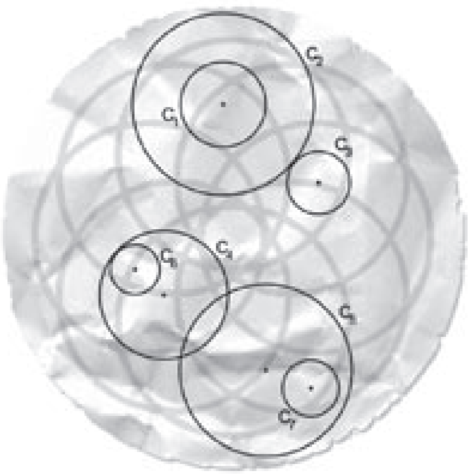


Fig. 4: Posiciones relativas entre circunferencias

4. ¿Pueden dos circunferencias cortarse en más de dos puntos? Y si dos circunferencias comparten tres puntos, ¿cuál es la posición relativa entre ambas?

5. Si dibujo dos circunferencias y tres rectas, ¿cuál es el mayor número de puntos de intersección que puedo obtener entre esas cinco figuras?

2.4. Ángulos en una circunferencia

En una circunferencia podemos considerar diversos tipos de ángulos, de acuerdo con la ubicación de su vértice y la naturaleza (o posición relativa con respecto a la circunferencia) de sus lados:

a) Ángulo central, ángulo cuyo vértice se halla en el centro de la circunferencia y cuyos lados contienen sendos radios o, simplemente, son dos radios; en la figura 5, < AOB.

b) Ángulo inscrito en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se halla en la circunferencia y cuyos lados contienen sendas cuerdas o, simplemente, son dos cuerdas; en la figura 5, < KJL.

c) Ángulo semiinscrito en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se halla en la circunferencia y cuyos lados son una tangente y una semirrecta que contiene a una cuerda, o, simplemente, una tangente y una cuerda; en la figura 5, < MNQ.

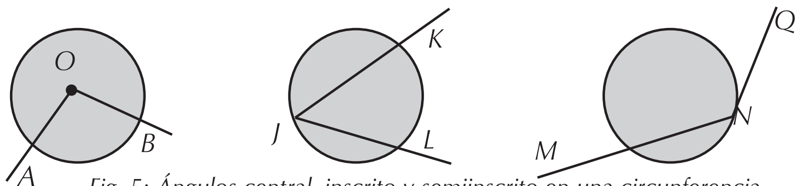


Fig. 5: Ángulos central, inscrito y semiinscrito en una circunferencia

d) Angulo interior a una circunferencia, ángulo formado por dos secantes (o dos cuerdas) que se intersectan dentro de la circunferencia; en la figura 6, los ángulos < AOB y < AOC (y sus respectivos opuestos por el vértice).

e) Ángulo exterior a una circunferencia, ángulo cuyo vértice es un punto exterior de la circunferencia y cuyos lados pueden ser dos semirrectas secantes, o una secante y otra tangente, o dos tangentes a la circunferencia; en la figura 6, los ángulos <NMP, < HJL y < RST, respectivamente. En el último caso, se dice que el ángulo (< RST en la figura 6) está circunscrito a (trazado alrededor de) la circunferencia.

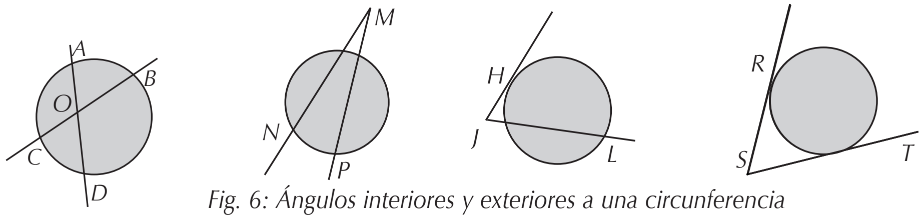


Fig. 6: Ángulos interiores y exteriores a una circunferencia

2.5. Subconjuntos o regiones de un círculo

a) Sector circular, porción del círculo limitada por dos radios y el arco de circunferencia correspondiente a los puntos extremos de ambos radios; en la figura 7, la región OAHB de la sección a).

b) Segmento circular, porción del círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente; en la figura 7, la región FLG de la sección b).

c) Corona circular, porción del círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas; en la figura 7, la región coloreada de la sección c).

d) Trapecio circular, porción de una corona circular limitada por dos radios; en la figura 7, el trapecio cuya base mayor curva es el arco MN.

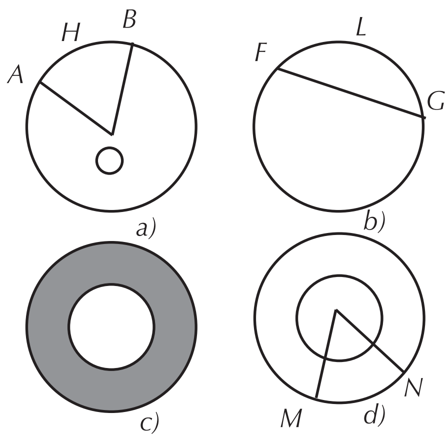


Fig. 7: Regiones de un círculo: sector, segmento, corona y trapecio circulares

3. Construcción de circunferencias

3.1. Condiciones suficientes para construir una circunferencia

Existen varios procedimientos para construir circunferencias, apoyados cada uno de ellos en determinadas condiciones:

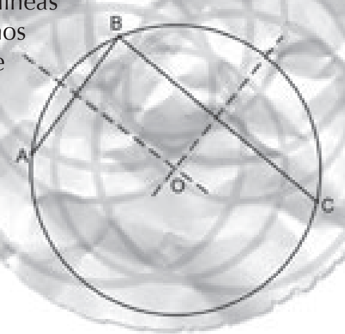
a) Conocidos el centro y el radio. Basta fijar el punto que servirá de centro y hacer girar el compás 360º con una abertura correspondiente a la longitud del radio. Este procedimiento se ajusta a la formulación b) del concepto de circunferencia: "Línea trazada por el extremo de un segmento que gira un ángulo de 360º alrededor del otro extremo fijo". Y el resultado corresponde a la formulación a) del concepto de circunferencia: "Línea formada por todos los puntos de un plano que equidistan de uno dado".

b) Conocidos el centro y un punto de la circunferencia. El radio se obtiene con el compás midiendo la distancia entre ambos puntos, y así volvemos al caso a).

c) Conocido el diámetro. Trazado el diámetro en un plano, basta obtener su punto medio (Cuaderno 12), tomar como radio el segmento que une el centro con uno de los extremos del diámetro, y trazar la circunferencia con el compás.

d) Conocidos tres puntos no alineados por los que pasa (o debe pasar) la circunferencia. Necesitamos conocer el centro y el radio de la circunferencia; de estos dos requerimientos, el fundamental es el centro, ya que conocida su ubicación, el radio se obtiene con el compás midiendo la distancia entre el mismo y cualquiera de los tres puntos.

¿Cómo se obtiene gráficamente un punto? Sencillamente, por la intersección de dos líneas, rectas o curvas. Ahora bien, si conocemos tres puntos de la circunferencia, ¿podemos construir dos líneas que pasen por el centro? Sí: anteriormente hemos visto que una cuerda es perpendicular al radio que pasa por su punto medio. Si le "damos la vuelta" a esta afirmación podemos concluir que ***dada una cuerda, su mediatriz pasa por el centro de la circunferencia***. Y si tenemos dos cuerdas, sus mediatrices se cortarán exactamente en el centro de la circunferencia, ya que ambas tienen que pasar por él.



En la figura, A, B y C son los tres puntos de la circunferencia; se han trazado las cuerdas AB y BC y se han construido sus mediatrices. El punto de intersección O es justamente el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

Evidentemente, hay otros procedimientos para construir circunferencias sin utilizar las herramientas geométricas fundamentales, regla y compás. Por ejemplo:

• Recorrer con un lápiz o una tiza el borde redondo de ciertos objetos: una moneda, un vaso, una rueda, un botón, una tapa de envase..., al tiempo que el instrumento de escribir se aplica sobre un papel, el suelo u otra superficie plana.

• Promover una línea de curvatura constante, tal como la abuela y sus arepas redonditas, o el trazado de las vueltas que da un carro con el volante girado y fijo, o un triciclo con el manillar girado y fijo...

• Sustituir el compás por un hilo o una cuerda tensos, o por cualquier otro objeto rígido, con un extremo fijo y con un lápiz o tiza en el extremo opuesto.

• ¿Se le ocurre alguna otra forma práctica de hacerlo?

3.2. Condiciones insuficientes para construir una circunferencia

Veamos estos otros casos en los que se dan ciertas condiciones para construir una circunferencia:

• Se conoce un solo punto de la circunferencia.

• Se conoce un punto de la circunferencia y su radio

• Se conocen dos puntos de la circunferencia

• Se conocen dos puntos de la circunferencia y el radio

Evalúe cada caso: Si puede construirse una sola circunferencia, explique a sus compañeros(as) cómo lo haría. Si pueden construirse varias, trate de visualizar la situación y exprese las condiciones o restricciones que deberían verificar los radios o los centros de tales circunferencias. Y si no puede construirse ninguna, explique por qué.

Trate de analizar y resolver cada caso por su cuenta o con sus compañeros(as), antes de seguir leyendo. Después, contraste su argumentación con la que se expone de seguido.

En los casos anteriores, las condiciones son insuficientes y no es posible precisar una sola circunferencia. Así:

a) Conocido un solo punto de la circunferencia. Evidentemente, hay infinitas circunferencias que pasan por un punto dado, circunferencias cuyo centro y cuyo radio no están sometidos a ninguna restricción.

b) Conocidos un punto de la circunferencia y su radio. Hay infinitas circunferencias que cumplen este par de condiciones. Todas ellas tienen el mismo radio, pero sus centros pueden variar, ya que están ubicados sobre la circunferencia que tiene como centro el punto dado, y como radio, el radio dado.

c) Conocidos dos puntos de la circunferencia. También hay infinitas circunferencias que pasan por dos puntos dados del plano. Sus centros están ubicados en la mediatriz del segmento que une ambos puntos y, como se ve, sus radios pueden variar.

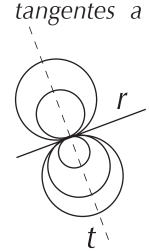
d) Conocidos dos puntos de la circunferencia y el radio. Es una restricción del caso anterior. En estas condiciones se pueden construir dos circunferencias, ya que hay dos puntos en la mediatriz del segmento que une ambos puntos (uno a cada lado del segmento) cuya distancia a los mismos es igual al radio.

¿Cuántas circunferencias pueden pasar por 4 puntos dados? Puede ocurrir que pase una sola; en este caso, para construirla hay que seguir el procedimiento expuesto para el caso de tres puntos no alineados y esperar que el cuarto punto quede incluido en la circunferencia así trazada. Si no se cumple esto último, no existe tal circunferencia. De modo que, a partir de tres puntos, no se necesitan otros adicionales; más bien puede complicarse la situación si se agregan otros posibles puntos de la circunferencia.

3.3. Algunos casos particulares de construcción de circunferencias

Construya circunferencias tangentes a una recta en un punto.

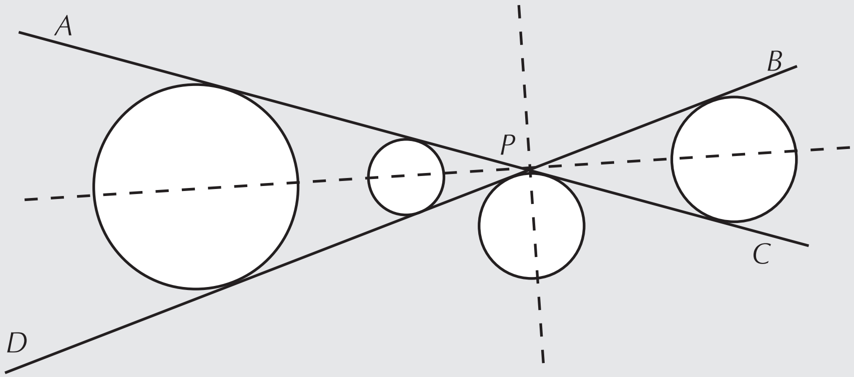
Como puede apreciarse, pueden construirse infinitas circunferencias a ambos lados de la recta r; sus radios pueden variar, pero sus centros se hallan todos sobre la recta t, perpendicular a r en el punto de tangencia.



Construya una circunferencia de radio dado y tangente a una recta en un punto.

El problema agrega una restricción al caso anterior. Trazada la perpendicular *t* a *r* por el punto de tangencia, con el compás se hace centro en este punto y con la abertura del radio se marcan dos puntos, uno en cada lado de *t*. Estos puntos son los centros de las dos circunferencias que responden al enunciado del problema.

Construya circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan.



Como puede apreciarse en la figura, al cortarse las rectas AC y DB se forman cuatro ángulos. Pueden construirse infinitas circunferencias en cada uno de esos ángulos, todas ellas tangentes a ambas rectas. Pero presentan una regularidad: en cada circunferencia, el segmento que une el centro con cada uno de los dos puntos de tangencia es un radio; es decir, el centro equidista de ambas rectas; dicho de otra manera, el centro equidista de los lados del ángulo correspondiente (< APD, por ejemplo). Esto significa que el centro de cada circunferencia se ubica en alguna de las bisectrices de los ángulos que se forman al intersectarse ambas rectas.

Así, pues, para trazar las circunferencias pedidas, basta con construir las bisectrices del caso, hacer centro en cualquier punto de ellas y abrir el compás adecuadamente para lograr la tangencia solicitada.

Construya una circunferencia que sea tangente a los tres lados de un triángulo (***circunferencia inscrita en un triángulo***).

El problema presenta una restricción con respecto al que acabamos de resolver: hay que agregar una tercera recta que cierre un triángulo. Pero el razonamiento es análogo: el centro de la circunferencia debe equidistar de los tres lados. Esta condición puede desglosarse en otras tres: el centro de la circunferencia debe equidistar de cada par de lados, lo que equivale a afirmar que debe estar situado en la bisectriz de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

Así, pues, para trazar esta circunferencia hay que construir las tres bisectrices del triángulo (en realidad, basta trazar dos de ellas). Ese punto de intersección es el centro de tal circunferencia; el radio viene dado por el segmento que va desde el centro a cada uno de los puntos de tangencia con los lados.

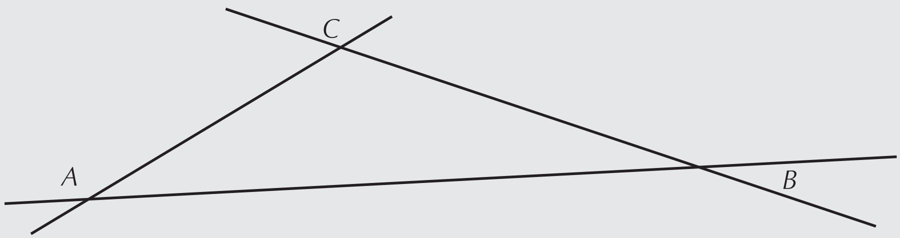
En el Cuaderno 13 se hizo ver que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, al que denominamos ***incentro***. Ahora podemos aclarar que este nombre le viene dado por ser el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Construya una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo ***(circunferencia circunscrita a un triángulo)*****.**

El problema se reduce a uno de los casos de construcción propuestos anteriormente (conocidos tres puntos no alineados de la circunferencia). Hay que trazar las mediatrices de los segmentos que unen los puntos dos a dos, es decir, de los tres lados del triángulo (en realidad, basta trazar dos de ellas). Ese punto de intersección es el centro de tal circunferencia; el radio viene dado por el segmento que une el centro con cualquiera de los tres vértices.

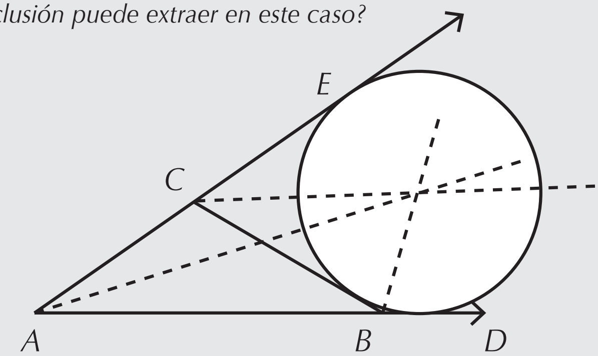
En el Cuaderno 13 se hizo ver que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, al que denominamos ***circuncentro***. Ahora podemos aclarar que este nombre le viene dado por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Dadas tres rectas distintas que se cortan de manera no concurrente (no se cortan las tres en el mismo punto), construya una circunferencia tangente a ellas.



Evidentemente, el problema se reduce a la construcción del incentro en el triángulo Δ ABC.

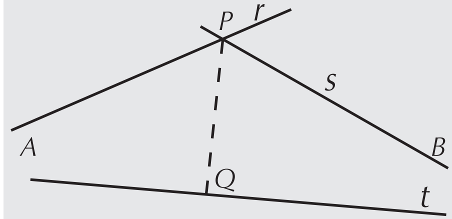
El problema **31**. del Cuaderno 13 proponía:"Dada la figura anexa, trace las bisectrices de los ángulos < DAE, < DBC y < ECB. Observe qué ocurre". Ahora agregamos: *¿Qué conclusión puede extraer en este caso?*



Lo que ocurre, como se muestra en la figura, es que las tres bisectrices concurren en un solo punto. Esto significa que ese punto equidista de las semirrectas AE y AD, así como del segmento BC. Es decir, que puede considerarse como el centro de una circunferencia que es tangente a las dos semirrectas y al segmento mencionado.

Esta circunferencia recibe el nombre de **exinscrita** en el triángulo (es decir, inscrita pero en el exterior del triángulo). Observe que se pueden construir tres de estas circunferencias en todo triángulo.

Dadas tres rectas, construya una circunferencia que sea tangente a dos de ellas y tenga su centro en la tercera.



La circunferencia debe ser tangente a las rectas *r* y *s*, y tener su centro en la recta *t*. Tenemos que hallar este último punto. Ahora bien, para ser tangente a *r* y *s*, el centro debe equidistar de ambas rectas, es decir, de los lados del ángulo <APB; como ya sabemos, esto significa que el centro debe hallarse en la bisectriz de dicho ángulo.

Así, pues, para hallar el centro de la circunferencia pedida, se traza la bisectriz del ángulo formado al cortarse las rectas *r* y *s*; la intersección de esta bisectriz con la recta *t* determina el centro *Q* de la circunferencia. Para hallar los puntos de tangencia, basta trazar las perpendiculares a *r* y *s* desde el punto *Q*; cualquiera de estos dos segmentos es el radio de la circunferencia pedida.

Construya una circunferencia conocidas dos rectas tangentes y ambos puntos de tangencia.

Construya una circunferencia conocida una tangente y su punto de tangencia, así como otro punto de la misma circunferencia.

4. La medición en circunferencias y círculos

Son diversos los elementos que pueden ser medidos en una circunferencia y en un círculo. Vamos a agruparlos en los siguientes tipos de magnitudes:

- longitudes de líneas curvas
- longitudes de segmentos
- amplitudes de ángulos
- áreas de regiones planas

4.1. Longitud de la circunferencia y de un arco

En principio, la única manera de ***medir la longitud de una circunferencia*** consiste en "rectificarla", es decir, transformarla en un segmento rectilíneo y aplicar ahí la regla o la escuadra para dar su medida exacta. O bien, abarcar con un hilo flexible una circunferencia (por ejemplo, la de una rueda) y medir luego la longitud del hilo estirado.

A estos procedimientos iniciales podemos agregar una observación: la longitud de la circunferencia depende de la longitud de su diámetro; por ejemplo, a mayor diámetro, mayor longitud. Más aún, si medimos la longitud de una circunferencia de determinado diámetro y después hacemos lo mismo con otra circunferencia cuyo diámetro sea el doble, el triple, la mitad, etc. de la inicial, veremos que la longitud de la segunda circunferencia es el doble, el triple, la mitad, etc., respectivamente, de la longitud de la primera.

Por consiguiente, hay algo que permanece constante en todas estas mediciones; no es la longitud de los diámetros o de las circunferencias, que varían de una a otra, sino la relación multiplicativa entre ambas magnitudes: ***la longitud de la circunferencia se obtiene siempre multiplicando la longitud de su diámetro por una cantidad constante***. Esta cantidad constante se obtiene, pues, dividiendo la longitud de la circunferencia entre la longitud *l* del diámetro correspondiente; se trata de una razón.

Esta razón tiene un valor no exacto: 3,141592... y se designa con una letra griega: π (pi) [de él hablamos al final del Cuaderno 11]. De modo que se establece la siguiente relación entre la longitud l de la circunferencia y la longitud *d* de su diámetro:

$$l = \pi \times d$$

Conviene observar que π tiene infinitas cifras decimales que no forman ningún período, por lo que se considera como un número irracional. Por otro lado, como la longitud del diámetro es el doble de la del radio r ($d = 2 \times r$), podemos escribir:

$$l = 2 \times \pi \times r$$

Resulta conveniente adquirir un sentido práctico en referencia a esta relación. Por ejemplo, toda circunferencia mide algo más que el triple de la longitud de su diámetro, y algo más que seis veces la longitud de su radio. Esta referencia nos permite obtener un estimado de la longitud de cualquier circunferencia una vez que conozcamos la medida de su diámetro o de su radio.

Cuando se persigue tener el valor real de dicha longitud, π se maneja como 3,14 ó 3,1416 según la necesidad de precisión en el cálculo. En los demás casos, la expresión de la longitud de la circunferencia puede darse en términos de π; por ejemplo, puede decirse que una circunferencia mide 8π unidades de longitud, sin necesidad de efectuar la multiplicación.

En cuanto a ***medir la longitud de un arco***, el procedimiento a aplicar se deriva de otra observación: esta longitud depende de la amplitud del ángulo central que corresponde a dicho arco. Por ejemplo, si medimos la longitud de un arco para un determinado ángulo central y después trazamos otros ángulos centrales cuya amplitud sea el doble, el triple, la mitad, etc. del inicial, veremos que la longitud de los arcos correspondientes es el doble, el triple, la mitad, etc., respectivamente, de la longitud del primero.

En consecuencia, dentro de cada circunferencia existe una proporcionalidad entre las medidas de los ángulos centrales y de los arcos correspondientes. Ahora bien, conocemos uno de estos pares de medidas correspondientes: A un ángulo central de 360º (un giro completo) le corresponde un arco cuya medida es la longitud de la circunferencia, $2 \times \pi \times r$.

A partir de aquí podemos recurrir a la técnica de la regla de tres para hallar la longitud de un arco, conocido el ángulo central correspondiente; o para hallar la amplitud de este ángulo, conocida la longitud del arco correspondiente:

Amplitud ángulo central	Longitud del arco
360º	$2 \times \pi \times r$
nº	l

Longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de amplitud nº:

$$l = \frac{2\pi rn}{360}$$

Amplitud de un ángulo central correspondiente a un arco de longitud l:

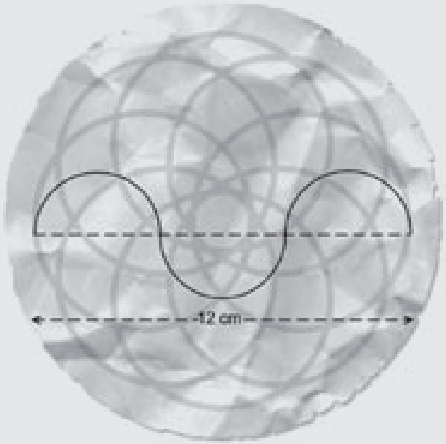
$$n = \frac{360l}{2\pi r}$$

Radio de una circunferencia, conocidas la longitud l de un arco y la amplitud nº del ángulo central correspondiente:

$$2\pi r = \frac{360l}{n} \Rightarrow r = \frac{360l}{2\pi n}$$

¿Cuál es la longitud de la curva de la figura?

Como puede apreciarse se trata de tres semicircunferencias de un mismo radio. El diámetro mide 12 cm : 3 = 4 cm. La longitud de una semicircunferencia es de $\pi \times r = 2\pi$ cm. Por consiguiente, la curva mide $3 \times 2\pi$ cm $= 6\pi$ cm.



6. *Calcule:*

a) la longitud de una circunferencia de 7 cm de diámetro

b) el radio de una circunferencia cuya longitud es de 9π dm

c) la longitud de un arco correspondiente a un cuadrante en una circunferencia de 12 cm de diámetro

d) la amplitud del ángulo central correspondiente a un arco de π cm de longitud en una circunferencia de 4 cm de radio

e) la longitud del radio de una circunferencia si en ésta, a un arco de $2\pi/3$ cm de longitud le corresponde un ángulo central de 60º

En cualquier circunferencia, ***un arco*** muy singular es aquel ***cuya longitud coincide con la del radio correspondiente***; un arco así se denomina ***radián***. En seguida surgen varias preguntas:

¿Cuántas veces está contenido un radián en una circunferencia? Para contestarla, basta dividir la longitud de la circunferencia entre la de su radio: $2 \times \pi \times r / r = 2\pi$ veces. La longitud de cualquier circunferencia contiene 2π radianes.

¿Cuántos grados sexagesimales mide un radián, es decir, el ángulo central correspondiente a un arco de medida equivalente a la del radio de la circunferencia? Para averiguarlo establecemos una regla de tres sencilla:

Amplitud ángulo central	Longitud del arco
360º	$2 \times \pi \times r$
xº	r

de donde:

$$x = \frac{360r}{2\pi r} = \frac{360}{2\pi} = \frac{360}{6{,}2832...} = 57{,}3º$$

aproximadamente.

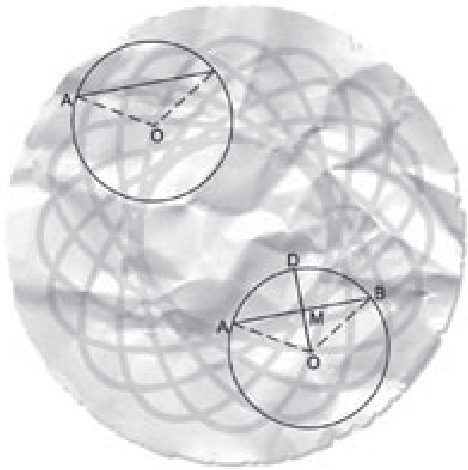
Finalmente, puede establecerse el siguiente cuadro de pares de valores de las amplitudes de algunos ángulos centrales (en grados) y las longitudes (en radianes) de los arcos correspondientes:

Amplitud ángulo central	Longitud del arco en radianes
360º	2 π
180º	π
90º	π/2
45º	π/4
22º 30′	π/8
60º	π/3
30º	π/6
120º	2π/3
270º	3π/2
135º	3π/4

4.2. Longitudes de segmentos en una circunferencia

Como acabamos de ver, la longitud del radio (y, por consiguiente, del diámetro) de una circunferencia puede obtenerse a partir de la longitud de ésta; y también de la relación entre la longitud de un arco y la amplitud del ángulo central correspondiente. Pero también puede relacionarse con otros elementos presentes en una circunferencia, como comprobaremos a continuación.

Puede resultar de interés ***calcular la longitud de una cuerda***. Para ello necesitamos ubicarla dentro de alguna figura con elementos conocidos. Por ejemplo, en la figura de la izquierda se presenta acompañada de los dos radios que llegan a sus extremos A y B. El triángulo Δ AOB es isósceles, pero aun conocido el valor del radio, nada nos dice de cómo obtener la longitud de la cuerda.



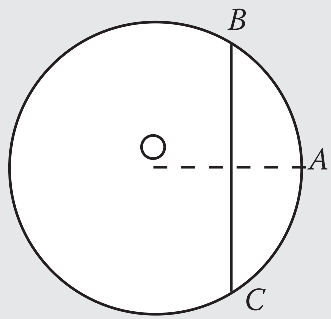
Por otro lado, si conocemos el radio y la medida del ángulo central, es posible hallar la longitud de la cuerda, pero este cálculo se apoya en conocimientos (trigonometría) que no están todavía a nuestro alcance. Lo que sí se presenta como sugerente es el triángulo rectángulo Δ MOB en la figura de la derecha. Este triángulo aparece cuando se traza el radio OD perpendicular a la cuerda AB en su punto medio M. Observamos que el segmento MD es la sagita correspondiente a la cuerda AB.

En este triángulo, si designamos con s a la s***agita***, con c a la semicuerda MB, y con r al radio OB, vemos que el segmento OM equivale a $r – s$ y podemos aplicar la relación pitagórica: $c^2 = r^2 – (r – s)^2$, que puede resultar de interés en algún problema particular. Lo que sí queda claro es que existe una relación entre las longitudes de una cuerda, de la sagita correspondiente y del radio de la circunferencia. Conocidos dos de esos valores, es posible hallar el tercero.

Determine la longitud de la sagita de una circunferencia cuya longitud mide 10π cm, si la cuerda correspondiente a la sagita mide 6 cm.

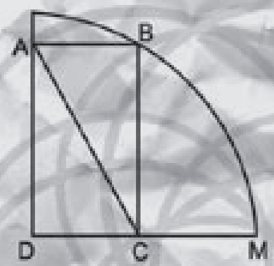
Si la longitud de la circunferencia es de 10π cm, el radio mide 5 cm. Ahora estamos en condiciones de aplicar la relación $c^2 = r^2 – (r – s)^2$, de donde deducimos $(r – s)^2 = r^2 – c^2$; conocemos $r = 5$ cm y la semicuerda $c = 3$ cm. Por consiguiente, $(5 – s)^2 = 25 – 9 = 16$ cm². De aquí, $5 – s = 4$ cm, lo que nos lleva a $s = 1$ cm.

En la figura, BC es una cuerda que está contenida en la mediatriz del radio OA. Si el radio mide 2 cm, ¿cuánto mide la cuerda BC?



El segmento que va desde O al punto medio M del radio OA mide 1 cm; y el segmento (radio) OB mide 2 cm. Se forma así un triángulo rectángulo de hipotenusa OB y catetos OM y BM, en el que podemos aplicar la relación pitagórica: $BM^2 = OB^2 – OM^2$, es decir, $BM^2 = 4 – 1 = 3$. De aquí, BM $= \sqrt{3}$ cm y BC $= 2\sqrt{3}$ cm.

En la figura, C es el punto medio del radio DM, que mide 10 cm. ¿Cuál es la longitud de la diagonal AC del rectángulo ABCD?



Se observa que la diagonal AC forma parte del triángulo rectángulo ADC. Pero en este triángulo sólo conocemos uno de los lados, DC, y así no podemos utilizar la relación pitagórica.

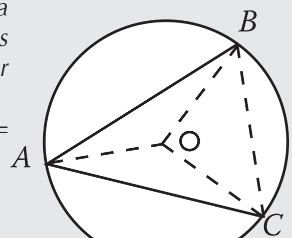
Lo que sí podemos es observar que la diagonal AC es congruente con la diagonal BD, que es un radio de la circunferencia. Por consiguiente, AC mide 10 cm.

4.3. Medidas de ángulos en una circunferencia

En la sección **2.4.** presentamos la variedad de ángulos que pueden considerarse en una circunferencia; ahora vamos a establecer su medida.

La medida de un ángulo central puede obtenerse directamente con un transportador; también hemos visto que puede deducirse de la medida de la longitud de un arco, si ésta es conocida. A veces suele darse la medida de un arco en grados; cuando esto ocurre se quiere decir que esa es realmente la medida del ángulo central que abarca ese arco.

En la figura se muestra el **ángulo inscrito** *<BAC. Para calcular su medida y con ayuda del centro O, trazamos los triángulos Δ AOB, Δ AOC y Δ BOC, que son isósceles (¿por qué?).*



De aquí se siguen las siguientes igualdades: <BAO = <ABO; <OAC = <OCA; <OCB = <OBC; y también:

<AOB = 180º - (<BAO + <ABO);

<AOC = 180º - (<OAC + <OCA).

Por otro lado, observamos que <BAC = <BAO + <OAC.
Y que, alrededor del punto O: <BOC + <AOB + <AOC = 360º (¿por qué?).

Vamos a sustituir en esta igualdad los valores de los dos últimos ángulos:

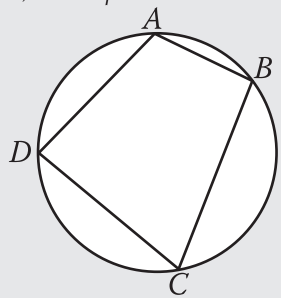
360º = <BOC + [180º - (<BAO + <ABO)] + [180º - (<OAC + <OCA)]. Y de aquí:

360º = 360º + <BOC - 2 x (<BAO) – 2 x (<OAC). Y restando 360º en ambos miembros de la igualdad, nos queda: 0 = <BOC - 2 x (<BAO) – 2 x (<OAC). Es decir, que:

<BOC = 2 x (<BAO) + 2 x (<OAC) = 2 x (<BAO + <OAC) = 2 x <BAC.

De aquí llegamos, finalmente, a: <BAC = 1/2 (<BOC). Es decir, ***la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del ángulo central que abarca el mismo arco***; o la mitad de la medida del arco (si esta medida viene en grados).

Demuestre que si ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, entonces los ángulos opuestos <A y <C (y <B y <D) son suplementarios.

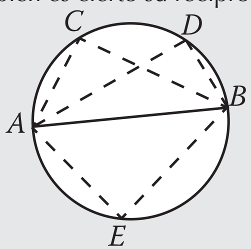


Los ángulos <A y <C (y también <B y <D) son inscritos y sus medidas son la mitad de las medidas de los arcos BCD y BAD,

respectivamente. Pero la suma de estos dos arcos nos da la circunferencia completa, es decir, 360º.

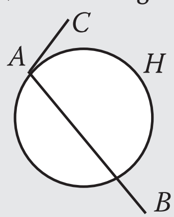
Por consiguiente, la suma de las medidas de los ángulos <A y <C es 180º. En otras palabras, los ángulos opuestos son suplementarios.

Una de las consecuencias más importantes (y útiles) de la medida de un ángulo inscrito es la siguiente: ***todo ángulo inscrito que abarca una semicircunferencia, es un ángulo recto***. También es cierto su recíproco: todo ángulo inscrito que es recto, abarca una semicircunferencia.



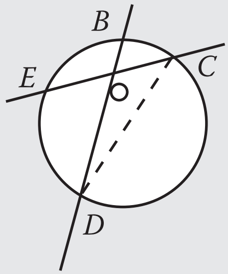
De aquí se desprende una de las formas más sencillas de dibujar triángulos rectángulos: se traza una circunferencia y cualquier diagonal AB se convierte en hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo vértice del ángulo recto es cualquier punto de la circunferencia (C, D, E, ...). Volveremos sobre esta propiedad posteriormente.

En la figura se muestra el ***ángulo semiinscrito*** <BAC. , **Su medida es** como en el caso de los ángulos inscritos, ***la mitad de la medida del arco BHA (medida en grados).***



Para llegar a esta conclusión basta observar que éste es un caso límite de un ángulo inscrito, uno de cuyos lados es AB, mientras que el lado AC es cualquier secante a la circunferencia que, en el límite, alcanza la posición de la tangente AC de la figura.

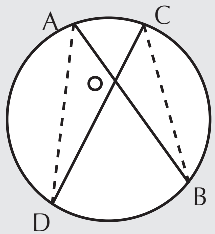
En la figura se muestra el ***ángulo interior*** <BOC. Para calcular su medida, trazamos el segmento DC. Se obtiene así el Δ DOC.



El ángulo <BOC es un ángulo exterior a este triángulo, y su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos <ODC y <OCD. Ahora bien, estos dos ángulos están inscritos en la circunferencia y sus medidas son la mitad de los arcos BC y ED.

Por consiguiente, ***la medida de un ángulo interior a una circunferencia es la semisuma de las medidas de los arcos (en grados) que las secantes que forman los lados del ángulo determinan en la circunferencia***. Si se trata del ángulo <BOE, su medida viene dada por 1/2 (medida arco BE + medida arco CD).

En la circunferencia de la figura, AB y CD son dos cuerdas que se cortan en O. Demuestre que el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra cuerda, es decir: AO x OB = CO x OD.



Recordemos que este tipo de igualdad nos sugiere la presencia de una proporción y que ésta aparece en el caso de triángulos semejantes. Para posibilitar esta presencia, trazamos los segmentos AD y CB, con lo que se construyen los triángulos Δ DOA y Δ BOC.

Estos triángulos son semejantes, ya que sus tres ángulos son congruentes; veámoslo:

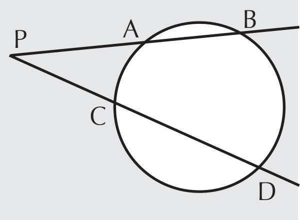
<AOD = <COB, por opuestos por el vértice;

<DAB = < DCB, porque están inscritos en la circunferencia y abarcan el mismo arco DB;

<ADC = < ABC, porque están inscritos en la circunferencia y abarcan el mismo arco AC.

Por consiguiente, se establece una relación de proporcionalidad entre sus lados correspondientes: $\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$. Y aplicando la relación fundamental de las proporciones (Cuaderno 11), llegamos a: AO x OB = CO x OD.

Demuestre que ***la medida de un ángulo exterior a una circunferencia es la semidiferencia de las medidas de los arcos (en grados) que las secantes que forman los lados del ángulo determinan en la circunferencia.*** Es decir, la medida del <APC es ½ (medida arco BD – medida arco AC).

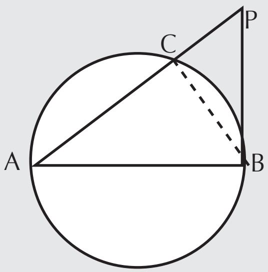


Como sugerencia, trace

las cuerdas AD y BC y proceda de una manera similar a la de la demostración referente a la medida de un ángulo interior a una circunferencia.

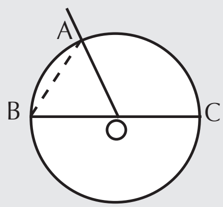
Con referencia a la misma figura del problema anterior, si AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia que al prolongarse se cortan externamente en un punto P, demuestre la siguiente igualdad de productos de longitudes de segmentos: PA x PB = PC x PD. Puede seguir las sugerencias propuestas en los dos problemas anteriores; en particular, trate de establecer la semejanza de los triángulos Δ PAD y Δ PBC.

En la figura, AB es un diámetro que mide 10 cm. Si CB mide 5 cm, ¿cuánto mide el <CPB?



Como hemos visto, el Δ ABC es rectángulo. Si el cateto CB mide la mitad de la hipotenusa, el <CAB debe medir 30º (ver Cuaderno 13). Por consiguiente, el <APB (que es el mismo <CPB) debe medir 60º.

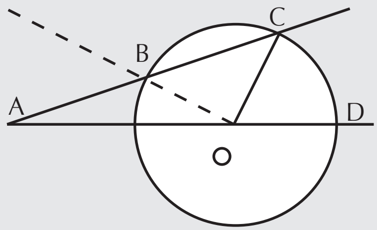
En la figura, CB es un diámetro. Si el <AOB mide 118º, ¿cuánto mide el <CAO?



El <AOB es un ángulo exterior del Δ CAO, que es isósceles, ya que los lados CO y AO son radios de la circunferencia. Por consiguiente, la suma de las medidas de los ángulos <ACO y <CAO es 118º.

Pero como estos dos últimos ángulos son congruentes, la medida del <CAO es la mitad de 118º, es decir, 59º.

En la figura, el segmento AD pasa por el centro de la circunferencia. Además, AB = OC y el <COD mide 72º. ¿Cuánto mide el <AOB?

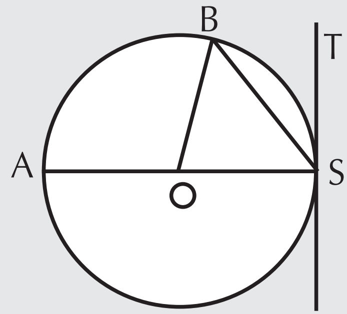


En la figura quedan trazados dos triángulos: Δ AOB y Δ BOC; ambos son isósceles (AB, BO y OC son congruentes). Vamos a centrarnos en el <AOD, que mide 180º por ser llano. En él concurren los ángulos <COD que mide 72º; el <BOC, de medida desconocida; y el <AOB, cuya medida buscamos. Necesitamos dar la medida del <BOC en función de la medida del <AOB.

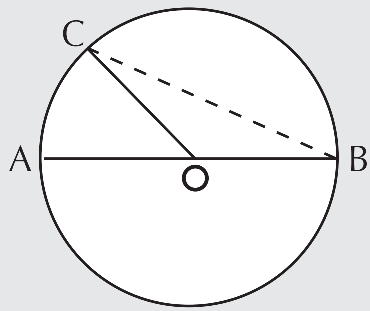
Si observamos la figura, el <CBO es un ángulo exterior con respecto al Δ AOB; por consiguiente, su medida equivale a la suma de las medidas de los ángulos no adyacentes, <BAO y <AOB; y como éstos son congruentes, la medida del <CBO es el doble de la medida del <AOB. Ahora bien, los ángulos <CBO y <BCO son congruentes y juntos miden 4 veces la medida del <AOB. De aquí se sigue que la medida del <BOC es 180º - 4 x (medida del <AOB).

Ahora podemos expresar esta igualdad de medidas: <COD + <BOC + <AOB = <AOD; es decir: 72º + [180o - 4(<AOB)] + <AOB = 180º. De donde deducimos: 72º - 3(<AOB) = 0º; es decir, 3(<AOB) = 72º. Y, finalmente, medida del <AOB = 24º.

7. En la figura, AS es un diámetro, el <AOB mide 100º y la recta TS es tangente a la circunferencia en el punto S. ¿Cuánto mide el <BST?



8. ¿Cuánto mide el <ACO, si el <BOC mide 54º?



4.4. Área del círculo y de algunas de sus regiones

Para aproximarnos al cálculo del ***área de un círculo***, podemos seguir de nuevo el camino de los griegos. En la sección 1 habíamos definido la circunferencia como la "línea obtenida como límite de la sucesión de polígonos regulares, cuando el número de lados de estos últimos tiende a infinito". El área del círculo será "el límite de las áreas de los polígonos regulares, cuando el número de lados de estos últimos tiende a infinito".

Pero en el Cuaderno 14 establecimos que el área de un polígono regular viene dada por el producto del semiperímetro por la apotema. Llevando estos polígonos al límite, el semiperímetro se convierte en la mitad de la longitud de la circunferencia ($\pi \times r$), y la apotema, en el radio *r* de esta última. Así, el área del círculo será: $A = \pi \times r \times r$; es decir:

$$\mathbf{A = \pi \times r^2}$$

Uno de los problemas matemáticos más famosos de la antigüedad fue el de la ***cuadratura del círculo***, es decir, el intento de encontrar, utilizando sólo regla y compás, el lado de un cuadrado cuya área fuera exactamente la misma que la del círculo. Sólo a finales del siglo XIX se llegó a la convicción de que este problema no se podía resolver de la manera en que fue planteado, es decir, usando sólo regla y compás. En este sentido, el círculo no se puede "cuadrar"; hay metros "cuadrados", no metros "redondos"...

Nos queda solamente el vuelo de la imaginación para preguntar con Neruda, "¿qué distancia en metros redondos hay entre el sol y las naranjas?".

Para obtener el ***área de un sector circular***, podemos razonar de la misma manera a como lo hicimos para calcular la longitud de un arco de circunferencia: existe una relación de proporcionalidad directa entre la amplitud del ángulo central que define el sector y el área de éste. Y como disponemos de una referencia conocida (a un ángulo central de 360º le corresponde el área del círculo), podemos establecer una regla de tres:

Amplitud ángulo central	***Área del sector circular***
360º	$\pi \times r^2$
nº	A

Área de un sector circular correspondiente a un ángulo central de amplitud nº:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Amplitud de un ángulo central correspondiente a un sector circular de área A:

$$n = \frac{360\,A}{\pi r^2}$$

Radio de una circunferencia, conocidos el área A de un sector circular y la amplitud nº del ángulo central correspondiente:

$$\pi \times r^2 = \frac{360A}{n} \Rightarrow r^2 = \frac{360A}{n\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{360A}{n\pi}}$$

Hay otra fórmula que nos permite hallar el ***área de un sector circular en función de la longitud del arco que abarca***; para ello, sustituimos en la fórmula anterior de A el valor de *n* obtenido en el punto **4.1**., con lo que llegamos a:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi r^2}{360} x \frac{360 l}{2\pi r} = \frac{rl}{2}$$

Así, la fórmula del área de un sector circular es similar a la del área de un triángulo: es la mitad del producto de su "base" (el arco de circunferencia) por su "altura" (el radio).

El área de un sector circular es 4π u². Si el radio mide 6 u, ¿cuánto mide el ángulo central correspondiente?

Podemos aplicar directamente la fórmula

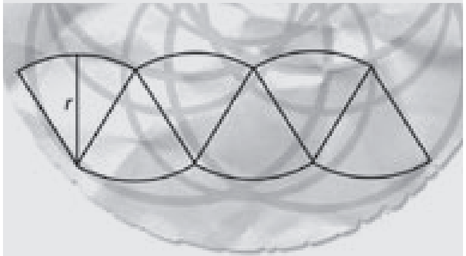
$$n = \frac{360\,A}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo en ella los valores conocidos, tenemos:

$$n = \frac{360 \, x 4\pi}{36\pi} = 40^{\circ}.$$

9. En un círculo de radio 9 cm, halle el área de un sector circular cuyo ángulo central mide 60º.

Si dividimos un círculo en seis sectores circulares congruentes, podemos reacomodarlos de la siguiente forma (el área no varía...):



Se obtiene una "especie" de rectángulo, cuya base curva mide π x *r* (la longitud de una semicircunferencia) y cuya altura mide permanentemente *r*. El área de esta figura, como "rectángulo", sería: A = π x r^2.

Y si lográramos "enderezar" la línea de la circunferencia, podríamos construir un triángulo rectángulo cuyos catetos midieran *r* y 2 x π x *r*, respectivamente. El área del círculo coincidiría con la de este triángulo: π x r^2. He aquí dos visualizaciones del cálculo del área de un círculo.

Por su parte, el ***área de un segmento circular*** se obtiene como diferencia de las áreas del sector circular correspondiente y del triángulo isósceles formado por los dos radios que limitan el sector, y la cuerda que limita el segmento.

El ***área de una corona circular*** se obtiene también como diferencia de las áreas de los círculos que la constituyen. Si denominamos *R* al radio del círculo externo, y *r* al del círculo interno, el área de la corona será: $Ac = \pi \times R^2 - \pi \times r^2 = \pi \times (R^2 - r^2)$.

En la fórmula anterior aparece el factor $R^2 - r^2$. Si nos remitimos al Cuaderno 6, vemos que esta expresión puede descomponerse en un producto: $R^2 - r^2 = (R + r) \times (R - r)$. De esta forma, nos queda: $Ac = \pi \times (R^2 - r^2) = \pi \times (R + r) \times (R - r)$; y de aquí: $Ac = (\pi \times R + \pi \times r) \times (R - r)$; y multiplicando y dividiendo por 2 el primer paréntesis: $Ac = 1/2 \times 2 \times (\pi \times R + \pi \times r) \times (R - r)$. Con lo que llegamos a esta expresión del área de una corona circular:

$$Ac = ½ \times (2 \times \pi \times R + 2 \times \pi \times r) \times (R - r).$$

Si comparamos esta expresión con la del área de un trapecio: $A = ½ \times (B + b) \times h$, podemos percibir que ambas tienen la misma forma; así descubrimos que una corona circular "funciona" como un trapecio cuya base mayor es la circunferencia externa, su base menor es la circunferencia interna, y su altura es la distancia entre ambas circunferencias.

Dos circunferencias concéntricas miden 10π y 16π cm, respectivamente. Halle el área de la corona circular correspondiente.

Los radios de ambas circunferencias son, respectivamente, 5 y 8 cm. Por consiguiente, el área de la corona será: A = π x (64 – 25) cm^2, es decir, 39π cm^2.

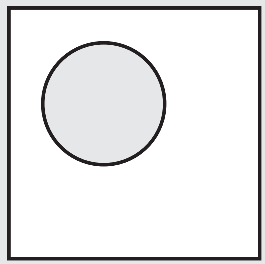
Finalmente, el ***área de un trapecio circular*** correspondiente a un ángulo central de amplitud nº se obtiene aplicando al caso de la corona circular el criterio de proporcionalidad considerado al hallar la longitud de un arco y el área de un sector circular (plantee la regla de tres correspondiente).

Si la longitud del radio de un círculo aumenta en un 100%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Supongamos que el radio mide 5 cm; un aumento del 100% significa que su longitud se incrementa en 5 cm, con lo que pasa a medir 10 cm (el doble). Si el área al comienzo era de 25π cm^2, ahora será de 100π cm^2, es decir, se habrá cuadruplicado y su incremento será de 75π cm^2 (el triple de lo que era antes); en otras palabras, habrá experimentado un incremento del 300%. Este resultado es válido para cualquier valor del radio.

Halle el área de la región comprendida entre el cuadrado de lado 4a cm y la circunferencia cuyo radio mide a cm.

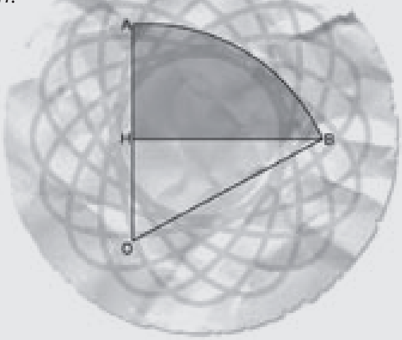
El área solicitada se obtiene por la diferencia de las áreas del cuadrado y del círculo dados. Es decir, $A = (4a)^2 - \pi \times a^2 = 16a^2 - \pi \times a^2 = (16 - \pi) \times a^2$ cm^2. En este resultado no influye la ubicación de la circunferencia en el interior del cuadrado.



Halle el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 8 cm.

Este es un caso parecido al del problema anterior; el área solicitada se obtiene también por la diferencia de las áreas del cuadrado de 8 cm de lado y de un círculo de 4 cm de radio. Así, $A = 64\ cm^2 - 16\pi\ cm^2$, es decir, $A = (64 - 16\pi)\ cm^2$.

Halle el área de la región sombreada, si el ángulo central <AOB mide 60º y HB es perpendicular al radio OA que mide 6 cm.



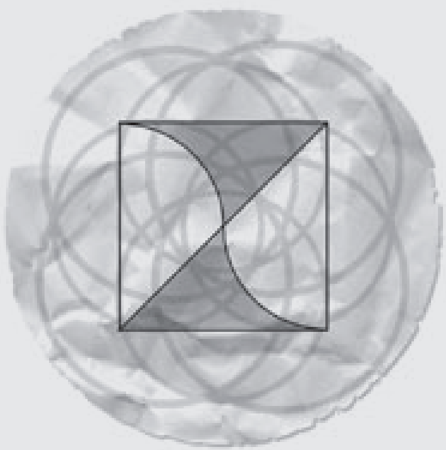
El área solicitada se obtiene por la diferencia de las áreas del sector circular OAB y del triángulo rectángulo Δ HOB.

El área del sector es:
$A = (\pi \times r^2 \times n) / 360 = 6\pi\ cm^2$.

El Δ HOB es la mitad de un triángulo equilátero (¿por qué?), por lo que el cateto OH mide 3 cm; para hallar la medida de HB utilizamos la relación pitagórica:

$HB = \sqrt{36-9} = \sqrt{27}\ cm^2$. Y el área del Δ HOB será: ½ $(3 \times \sqrt{27}) = (3/2) \times \sqrt{27}\ cm^2$. Por consiguiente, el área solicitada mide $(6\pi - 1{,}5 \times \sqrt{27})\ cm^2$ (aproximadamente, $11\ cm^2$).

Halle el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 20 cm.

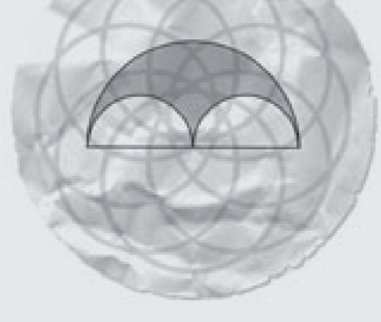


La región sombrada está formada por dos regiones congruentes (mitad superior e inferior de la figura); trabajaremos con la superior. En ella, el área solicitada se obtiene restando del área del rectángulo (de base 20 cm y de altura 10 cm) el área del cuadrante (de 10 cm de radio) y el área del triángulo rectángulo (los catetos miden 10 cm cada uno).

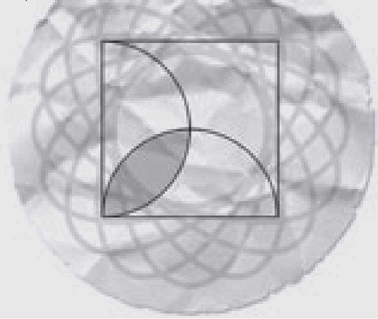
Así, el área de la región superior es: $20 \times 10 - 100\pi/4 - 1/2(10 \times 10) = 200 - 25\pi - 50 = (150 - 25\pi)\ cm^2$. Y el área de toda la región sombreada será el doble: $A = (300 - 50\pi)\ cm^2$.

10. Halle el área de las siguientes regiones sombreadas:

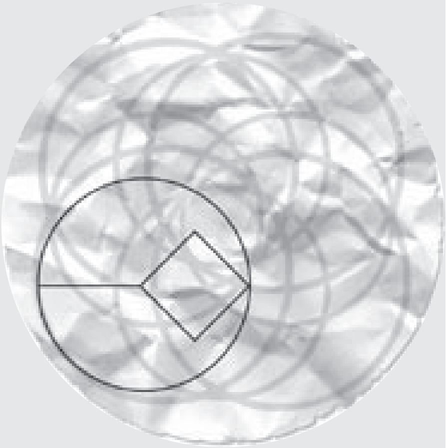
a) Radio de la circunferencia mayor: 12 cm



b) Lado del cuadrado: 8 cm



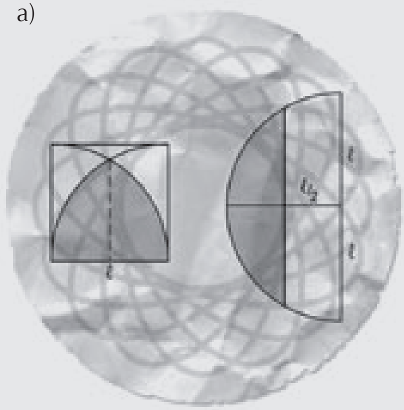
11. A partir de la figura, calcule la razón entre las áreas del cuadrado y del círculo, sabiendo que el radio de éste mide 20 cm.



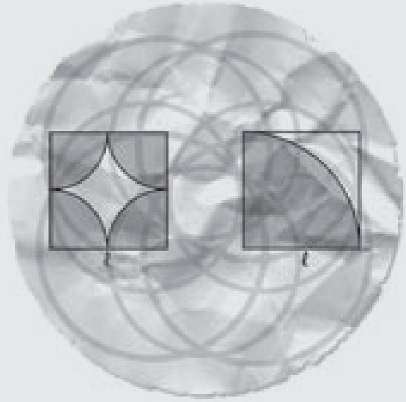
12. Halle el área de la región sombreada, si el lado del triángulo equilátero mide 4 cm.

13. Determine si son iguales las áreas de las regiones sombreadas, en cada uno de los casos:

a)



b)



5. Otras construcciones en la circunferencia

Los ***polígonos regulares*** pueden considerarse ***inscritos en una circunferencia***. El centro de ésta coincide con el del polígono regular, y su radio, con el segmento que va desde el centro del polígono a cualquiera de sus vértices.

En general, para construir un polígono regular de *n* lados, se van adosando alrededor del centro y con ayuda de un transportador, *n* ángulos centrales, de medida $(360/n)^o$ cada uno. Los puntos en que los lados de estos ángulos cortan a la circunferencia son los vértices del polígono regular; basta unirlos consecutivamente para obtener el polígono deseado.

El método anterior puede no resultar muy exacto; si desea métodos más exactos para los polígonos regulares más usuales, puede visitar el sitio que se indica a continuación:
http://www.dibujotecnico.com/saladeestudios/teoria/gplana/poligonos/poredalacc.asp

También tienen cierto interés estético los llamados ***polígonos estrellados***, cuya construcción, a partir de los polígonos regulares (con más de 4 lados) correspondientes, resulta más sencilla. En efecto, en lugar de unir los vértices consecutivos, se van trazando segmentos de dos en dos vértices, de tres en tres, etc. Si desea una visualización

animada de esta construcción, puede visitar el sitio que se indica a continuación:
http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/poligonos_estrellados/Indice.htm

Construya un triángulo rectángulo, conocida la medida de la hipotenusa.

Tomando en cuenta que todo ángulo inscrito que abarca una semicircunferencia es un ángulo recto, basta con trazar una circunferencia cuyo radio mida la mitad de la longitud de la hipotenusa y trazar un diámetro cualquiera; ésta será la hipotenusa; y los segmentos que unan sus extremos con cualquier otro punto de la circunferencia, sus catetos. Evidentemente, podemos construir infinitos triángulos rectángulos de hipotenusa dada.

Construya un triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo y el radio de la circunferencia circunscrita.

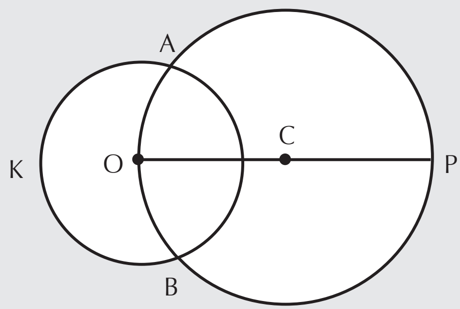
De acuerdo con el resultado anterior, cualquier diámetro de la circunferencia coincide con la hipotenusa. Basta con trasladar el ángulo agudo a uno de sus extremos; el punto en que el lado del ángulo corte a la circunferencia será el vértice del ángulo recto.

Trace una tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ésta.

Sea *K* la circunferencia de centro O y sea P un punto exterior a ella. Una tangente desde P a *K* (en realidad se pueden trazar dos tangentes) tiene que ser perpendicular a un radio de *K* en el punto de tangencia. Para conseguir esta perpendicularidad, construimos el segmento OP y hallamos su punto medio C. Con centro en C y radio CO se traza una circunferencia. Si A y B son los puntos de intersección con *K*, los ángulos <OAP y <OBP son rectos (¿por qué?). Como OA y OB son radios de *K*, entonces las rectas PA y PB son las tangentes buscadas.

En efecto, si A (y B) se trasladara sobre *K* a cualquier punto próximo A′ (B′), el ángulo <OA′P (<OB′P) ya no sería recto y PA′ (PB′) no sería la tangente buscada.

Si el punto P se halla sobre la circunferencia, la tangente es la perpendicular a OP en P.



6. Otros problemas para resolver

En un libro de cuentos, Manuel lee que el Guerrero tenía que pasar desde un punto del borde de un lago circular de 500 m de radio, al punto opuesto al otro lado del lago. Para ello contaba con dos vías: si iba a pie bordeando el lago, podía avanzar a una velocidad constante de 6 km/h; pero si lo cruzaba a nado, podía hacerlo a una velocidad constante de 4 km/h. ¿Por cuál de las dos vías llegará antes el Guerrero al punto opuesto?

El problema nos pide averiguar los tiempos que podría tardar por las dos vías, compararlos y seleccionar la vía que conlleva menos tiempo. Como sabemos, cuando un movimiento se produce con velocidad constante, el tiempo se obtiene dividiendo el espacio recorrido entre la velocidad desarrollada.

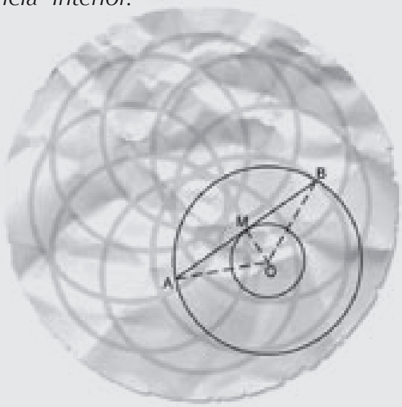
Si bordea el lago, el espacio *e* a recorrer es media circunferencia de radio 0,5 km: $e = \pi \times r = 3{,}14 \times 0{,}5$ km = 1,57 km; y el tiempo empleado será: $t = e / v = 1{,}57$ km / 6 km/h = 0,26 h.

Si atraviesa el lago nadando, el espacio *e* a recorrer es el diámetro de la circunferencia de radio 0,5 km: $e = 2 \times r = 2 \times 0{,}5$ km = 1 km; y el tiempo empleado será: $t = e / v = 1$ km / 4 km/h = 0,25 h. Por consiguiente, emplea menos tiempo si cruza el lago nadando.

El diámetro de un círculo es igual al radio de un segundo círculo. Encuentre la razón entre sus áreas.

Si el radio del primer círculo es *r*, el del segundo es 2 x *r*. El área de este círculo es π x (2 x *r*)^2 = 4 x π x *r*^{2}; y como el área del primer círculo es π x *r*^{2}, la razón entre ambas áreas es 1 : 4. En general, si la razón entre los radios es 1: *n*, entre las áreas es 1 : *n*^{2}; y si es *a : b*, la razón entre las áreas es *a*^{2} : *b*^{2}. Recíprocamente, si la razón entre las áreas de dos círculos es *m : n*, la razón entre sus radios (y entre sus diámetros) será $\sqrt{m} : \sqrt{n}$.

Demuestre que el área de un anillo circular es igual al área de un círculo cuyo diámetro es una cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior.

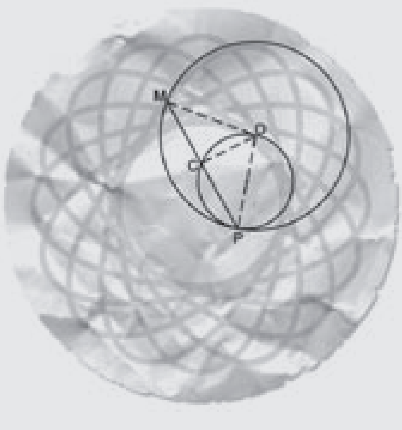


En la figura se muestran ambas circunferencias; sea *R* el radio de la mayor y *r* el de la menor. El área del anillo circular es: *A* = π x (*R*^{2} – *r*^{2}).

La cuerda AB satisface la condición exigida en el enunciado; el radio OM de la circunferencia interior, trazado hasta el punto de tangencia M, es perpendicular a AB.

El Δ OMB es, pues, rectángulo. La hipotenusa MB mide *R* y el cateto OM, *r*. Aplicando la relación pitagórica: *MB*^{2} = *R*^{2} – *r*^{2}. Por otro lado, el círculo cuyo diámetro es AB tiene como radio a MB, y su área será: A = π x MB^2 = π x (R^2 – r^2). Y ésta es, precisamente, la medida del área del anillo circular dado.

La figura muestra dos circunferencias tangentes interiormente en P; la circunferencia interior pasa, además, por el centro O de la exterior. Demuestre que toda cuerda de la circunferencia exterior trazada desde P mide el doble que la cuerda que se forma en la circunferencia interior.



En la figura se ha trazado la cuerda MP, que determina la cuerda CP en la circunferencia interior. Se trata de demostrar que MP = 2 x CP.

Una vía para ello puede consistir en hacer ver que MC = CP. Pero si queremos llegar a esta igualdad, tenemos que considerar ambos segmentos como formando parte de dos triángulos congruentes. Con ese fin construimos los segmentos OP, OM y OC. En principio, OM y OP son radios de la circunferencia exterior, es decir, OM = OP. Pero, además (y aquí está la clave de la demostración), OP es un diámetro de la circunferencia interior (¿por qué?). Por consiguiente, el < OCP es recto.

De ahí se sigue que los Δ OMC y Δ OPC son congruentes, ya que: < OMP = < OPM por ser isósceles el Δ OMP; < OCM = < OCP por ser ambos rectos; < COM = < COP por las congruencias anteriores; y OC es un lado común a ambos triángulos. Por consiguiente, MC = CP, de donde se sigue que MP = 2 x CP.

Una máquina posee dos ruedas engranadas, tales que la razón entre sus radios es 1: 3. Cuando la rueda mayor da una vuelta en sentido contrario a las agujas de un reloj, ¿cuántas vueltas, y en qué sentido, da la rueda menor?

La razón entre los radios puede escribirse: *R = 3 x r*. Una vuelta de la rueda mayor *(2 x π x R)* equivale a *2 x π x 3 x r*, es decir, 3 veces *2 x π x r*; en otras palabras, 3 vueltas completas de la rueda menor. Eso, sí, en el sentido de las agujas del reloj.

Todas las figuras que hemos considerado: circunferencia y círculo, sector, segmento, anillo y trapecio circulares, presentan ***simetría axial***. La circunferencia, el círculo y el anillo circular poseen infinitos ejes de simetría (cualquier diámetro); las demás figuras, uno solo.

Revise las figuras que aparecen en los problemas resueltos y propuestos en el punto **4.4.** y determine los posibles ejes de simetría de cada una de ellas.

Nuestro Guerrero del cuento se cansó de nadar (cinco problemas atrás). Ahora tiene que atravesar, desde la orilla A a la B y sin mojarse, este río de 10 m de ancho, y sólo dispone de dos tablas de 9 m de largo cada una. ¿Se le ocurre alguna sugerencia al respecto?

Construya un triángulo rectángulo conocida la medida de un ángulo agudo y del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

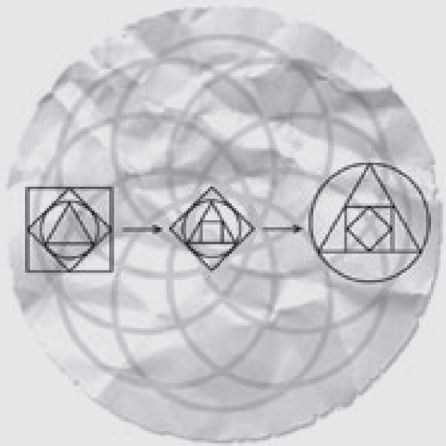
Inscriba un cuadrilátero cualquiera en una circunferencia. Trace las mediatrices de sus cuatro lados y de sus dos diagonales, y observe qué ocurre.

14. La Tierra se encuentra aproximadamente a 149 millones de kilómetros del Sol. Suponga que la órbita de la Tierra, en su movimiento de traslación, es circular. En estas condiciones, ¿cuánto avanza la Tierra, aproximadamente, a lo largo de su órbita en cada segundo? [Considere $\pi = 3{,}1416$ y el año de 365 días].

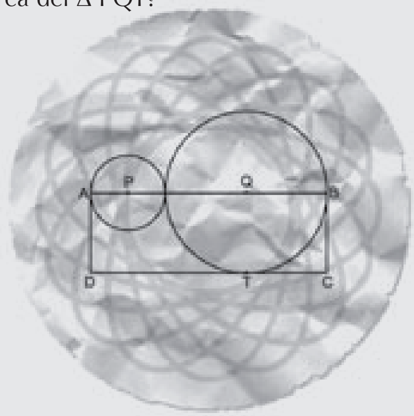
7. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

Construya una circunferencia concéntrica a otra dada, cuyo radio mida la mitad del de la circunferencia dada.

15. ¿Qué figura sigue en la siguiente secuencia?



16. En la figura, P y Q son los centros de dos circunferencias tangentes. El rectángulo ABCD es tangente a la circunferencia mayor en B y T. Si el área del rectángulo mide 15 cm², ¿cuánto mide el área del Δ PQT?



Construya una circunferencia tangente a dos rectas (paralelas o secantes), dado un punto de tangencia en una de las dos rectas.

Construya una circunferencia tangente a dos rectas secantes, dado su radio.

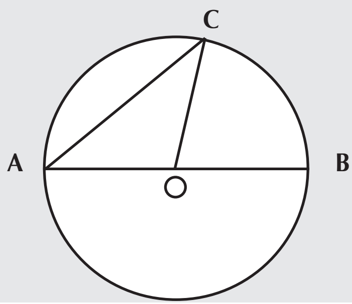
Construya una circunferencia tangente interiormente a otra en un punto dado y que pase por el centro de la circunferencia externa.

Dadas las medidas de la hipotenusa y de un cateto, construya el triángulo rectángulo correspondiente.

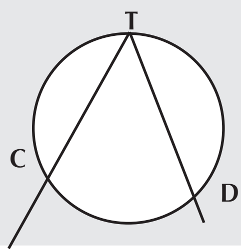
17. Halle la longitud de una cuerda en una circunferencia cuyo diámetro mide 12 cm, si la sagita correspondiente a la cuerda mide la mitad del radio.

18. ¿Qué es mayor, el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 1,5 dm, o la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 1 dm?

19. Si el <CAO de la figura mide 40^{o}, ¿cuánto mide el <COB?



20. El <CTD mide 40^{o}; y el arco TC, 120^{o}, ¿cuánto mide el arco TD en grados?

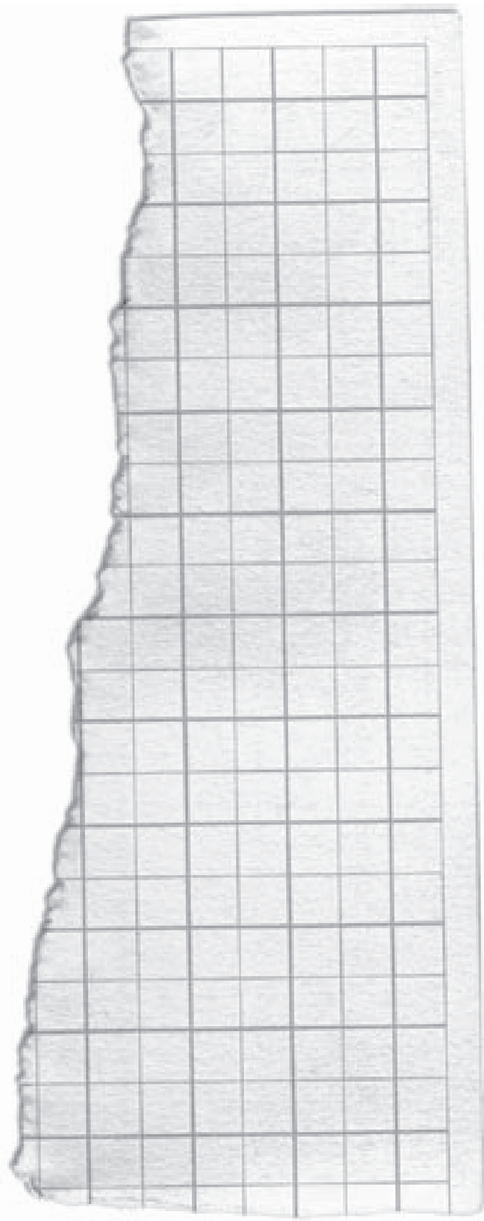


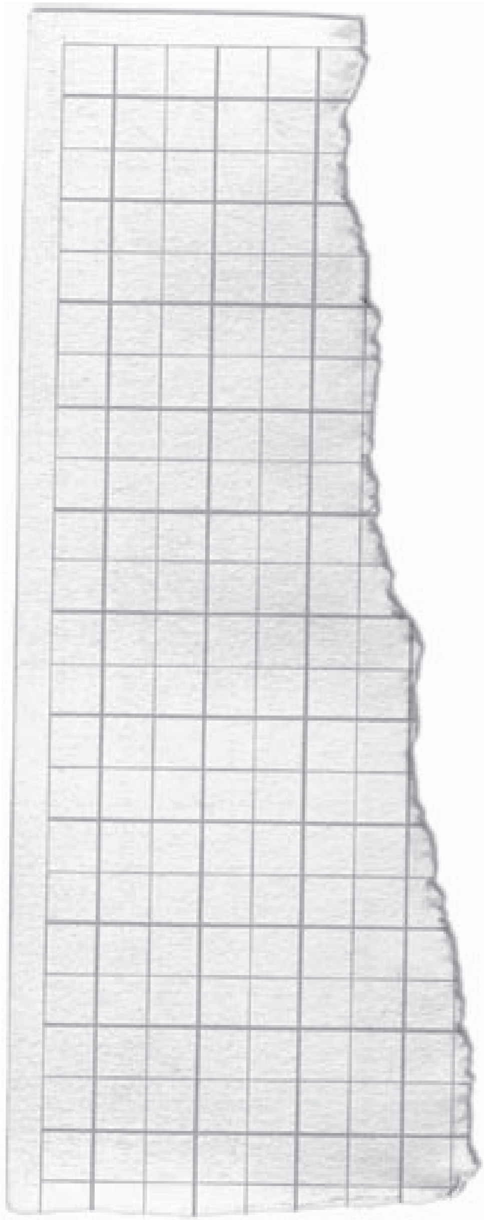
21. Se ha trazado en un círculo de radio *r* un sector circular con un ángulo central de n^{o}. En otro círculo de radio *2r* se quiere construir otro sector circular de la misma área que el anterior; ¿qué amplitud tendrá el ángulo central de este segundo sector circular?

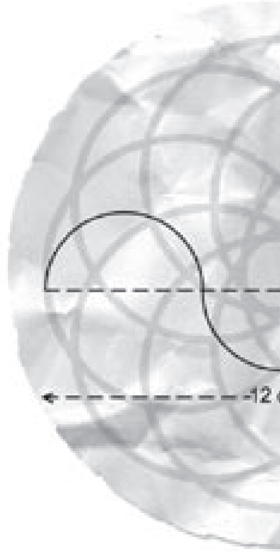
Construya un triángulo rectángulo isósceles conocida la medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Construya un triángulo rectángulo conocida la medida de un cateto y del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

22. Dadas dos circunferencias concéntricas, tales que el radio de la externa mide 12 cm, ¿cuánto medirá el radio de la circunferencia interna si el área de la corona circular mide las tres cuartas partes del área del círculo mayor?







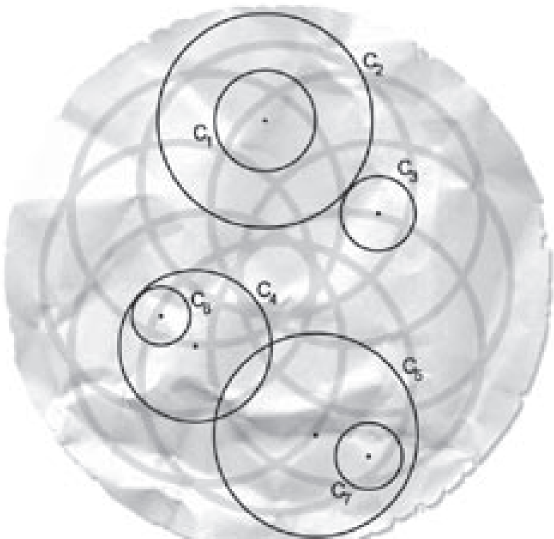
Referencias electrónicas

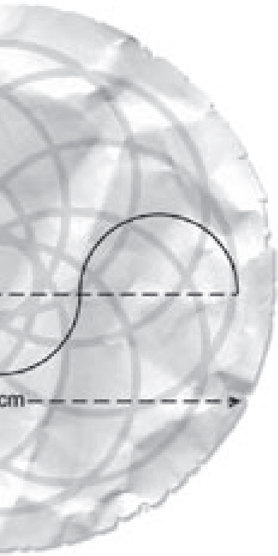
- López L., B. (2004). Construcciones de polígonos regulares dada la circunferencia circunscrita. Disponible en:

http://www.dibujotecnico.com/saladeestudios/teoria/gplana/poligonos/poredalacc.asp

- Muñoz N., A. (2001). Polígonos estrellados y algoritmos. Madrid: MEC. Disponible en:

http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/poligonos_estrellados/Indice.htm





Respuestas de los ejercicios propuestos

1. Son paralelas **2**. Son perpendiculares **3**. Son los extremos de una diagonal **4**. No. Ambas circunferencias coinciden **5**. 17 puntos **6**. a) 7π cm; b) 4,5 dm; c) 3π cm; d) 45º; e) 2 cm **7**. 40º **8**. 27º **9**. $(27/2)\ \pi$ cm **10**. a) 36π cm^2; b) $(8\pi - 16)$ cm^2 **11.** $1 : 2\pi$ **12**. $(4\sqrt{3} - 2\pi)$ cm^2 **13**. a) Si; b) si **14.** Casi 30 km **15.** De afuera hacia dentro: un triángulo equilátero, un cuadrado, un rombo, una circunferencia

16. 15/4 cm^2 **17.** $2\sqrt{27}$ cm **18**. La longitud de la circunferencia (6,28 dm) **19.** 80º **20.** 160º **21.** $(n/4)$º **22.** 6 cm

Postdata: El número π, otro fenómeno

Nos hemos encontrado con el número π como la razón de la longitud de la circunferencia y la de su diámetro. Podemos hacer dos acotaciones en torno a π. La primera se refiere a su valor; la segunda, a las posibles vías para hallar este último.

El valor asignado a este extraño número ha variado con el pasar del tiempo. Así, en la antigua Babilonia se le asignaba el valor $3\frac{1}{8}$ entre los egipcios (unos 2.000 años a. C.), 4 – $(8/9)^2$. En la Biblia (500 años a. C.), el valor 3; también 500 años a. C., un astrónomo chino, Tsu Chung Chi, aproximó su valor a 355/113; dos siglos más tarde, Arquímedes estableció que se encontraba entre $3+\frac{10}{71}$ y $3+\frac{1}{7}$.

La serie de aproximaciones es muy larga y la preocupación siempre fue la de dar el mayor número de decimales exactos. Pues bien, en 1995, en la Universidad de Tokio y con ayuda de una computadora lograron calcular el valor de π con... 4.294.960.000 decimales exactos. ¿No nos suena esto como algo parecido a la búsqueda del mayor número primo de la que hablamos en el Cuaderno 8?

La segunda cuestión es cómo se halla el valor de este número. Evidentemente, no se procede a dividir la longitud de una circunferencia entre la de su diámetro... Hay otras vías, porque el número π aparece sorpresivamente en muchos rincones de la matemática.

Por ejemplo, consideremos esta serie: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$ ... Ya se ve cómo se van agregando términos a esta suma; y si vamos haciendo los cálculos paso a paso obtenemos:

Términos obtenidos paso a paso	Términos multiplicados por 4
1 = 1	4
1 – 1/3 = 2/3 = 0,66666.... = 0,***6***	2,***6***
1 – 1/3 + 1/5 = 0,8***6***	3,4***6***
1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 = 0,7***238095***	2,8***952380***
1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 + 1/9 = 0,8***349106***	3,3***396425***
1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 + 1/9 – 1/11 = 0,7***440015***	2,9***760061***
1 – 1/3 + 1/5 ... – 1/11 + 1/13 = 0,8***209246***	3,2***836984***
1 – 1/3 + 1/5 ... + 1/13 – 1/15 = 0,7***542579***	3,0***170318***
1 – 1/3 ... – 1/15 + 1/17 = 0,81308148...	3,252325934...
1 – 1/3 ... + 1/17 – 1/19 = 0,760449905...	3,041799620
....	....

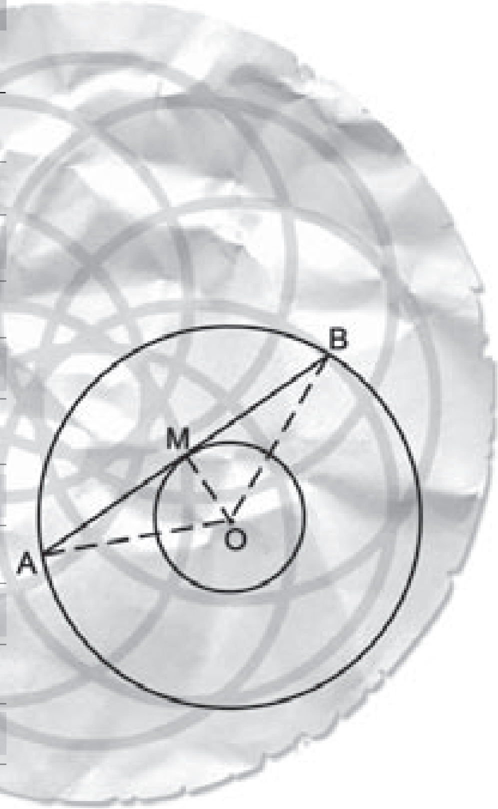
Y así indefinidamente. Ya en esos primeros términos de la serie de la derecha se observa que los valores obtenidos están unos por encima (los impares) y otros por debajo (los pares) de algún valor intermedio, que debe valer algo más que 3. ¿Preparados para la sorpresa? Ese valor intermedio al que nos vamos acercando poco a poco es ¡π! Y si vamos avanzando en los cálculos anteriores, agregando las fracciones sucesivas, llegaremos a ver que tanto los resultados que van disminuyendo (los impares: 4; 3,4***6***; etc.) como los que van aumentando 2,***6***; 2,8***952380***; etc.), a partir de cierto momento empiezan a tener los primeros decimales iguales: 141592...

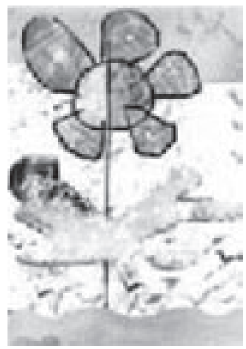
Pues bien, esta es una manera de ir obteniendo decimales “exactos” de π: los que comparten los términos que van aumentando con los que van disminuyendo. Y esta manera se la debemos al matemático alemán Leibniz (1646-1716), quien estableció la igualdad:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \ \ldots$$

Claro que después se han establecido otras formas de obtener π, más “rápidas” que la de Leibniz que, en rigor, es muy lenta. Si algún(a) lector(a) siente curiosidad por el tema, puede entrar en cualquier buscador de Internet y preguntar por la “historia del número pi”...

Índice





FE Y ALEGRIA